

# 乱流場の大スケールデータ同化による 小スケールの再生

## Regeneration of small scales by large-scale data assimilation in turbulence

吉田恭 (筑波大学大学院数理物質研究科)

金田行雄 (名古屋大学大学院工学研究科)

Kyo Yoshida (Department of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

Yukio Kaneda (Department of Engineering, Nagoya University)

### 概要

最近著者らが行った, 乱流におけるデータ同化の影響についての直接数値シミュレーション (DNS) による研究 [K. Yoshida, J. Yamaguchi, and Y. Kaneda, Phys. Rev. Lett. **94**, 014501 (2005)] を紹介する. Taylor マイクロスケールに基づく Reynolds 数  $R_\lambda$  で 179 までの DNS により, ある臨界波数  $k^*$  以下のモード (大きい渦) の時々刻々の正しいデータがあれば, それより高波数のモード (小さい渦) のデータは, たとえ初期において失われていても, 時間が経つにつれ「再生」されることが示された. また臨界波数は Kolmogorov 長  $\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ , ただし  $\epsilon$  は平均エネルギー散逸率,  $\nu$  は動粘性係数, を用いて  $k^* \approx 0.2\eta^{-1}$  と表せることが分かった.

## 1 背景

乱流において, 流れ場は初期条件や境界条件に敏感に依存することが広く知られている. 例えば, Batchelor は文献 [1] の中で以下のように記している. 「…ある種の流体運動において, 流体中の与えられた時間, 位置の速度は, 殆ど同じ条件下で何度か測定を行っても, 測定の度に異なる値を示す.」乱流のこの敏感性は, その予測可能性の限界に関係している. 気象予報に関連しては, Leith and Kraichnan [2] が完結近似に基づく理論解析により, 大気乱流の予測は小スケールの初期誤差のため約 2 週間が限界である, と見積もった. また Lorenz [3] 以降の非線形カオス系の研究も, 乱流の誤差, 摂動に対する敏感性という側面を強調している.

しかし、一方である状況においては乱流は誤差に対して敏感ではなくなる、という可能性が考えられる。例として、大気乱流を考えてみよう。大気運動の詳細なデータを得るのは困難でも、例えば衛星等を使って（空間的にも、時間的にも）粗いデータなら得られる場合はあるだろう。気象の分野で Charney *et al.* [4] は、連続データ同化（continuous data assimilation）と呼ばれる方法を提案した。これは、時々刻々観測で得られる粗いデータを気象数値モデルに活用して、現在の大気の状態の予測を向上させようとするものである。

最近の研究 [5, 6, 7, 8] において、連続データ同化の方法は、Navier-Stokes 方程式に従う乱流の直接数値シミュレーション（DNS）にも適用された。その結果、ある程度の量の疎視化された場の時々刻々のデータがあれば、細かいスケールの場の誤差は時間とともに減少する事が分かっている。これは、ある時刻の小さい渦のデータが失われたとしても、大きい渦のデータがあれば、小さい渦のデータは時間とともに「再生」されることを意味する。この観点において、小さい渦は大きい渦に隷属的であると言える。また、連続データ同化の問題は、数学においては、いわゆる場を決定するモード数の理論（theory of determining modes）と密接に関わっている。（例えば、文献 [9, 10, 11] やそれらの中の引用文献を見よ。）

ただし、これら先行研究では、乱流（特に高 Reynolds 数の）におけるデータ同化の影響の定量的評価は十分にはなされていない。過去の数値実験による研究で扱ったのは、発達した乱流に特徴的なエネルギースペクトルの  $-5/3$  乗則が実現されていない低 Reynolds 数乱流であった。また、数学の研究において、誤差抑制のために必要なデータ量の十分条件が得られているが、数値実験ではその条件よりかなり少ないデータ量でも誤差が抑制されることが示唆されている [7, 8]。

そこで著者らは、高 Reynolds 数乱流におけるデータ同化の影響の定量的評価を、特に小さい渦が「再生」するために最小限必要なデータ量とその乱流の統計量への依存性に焦点を当て、DNS を用いて行った。[12]。以下ではこの研究の内容を紹介する。

## 2 データ同化の数値実験方法

$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$  と  $\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$  を Navier-Stokes 方程式に従う 2 つの速度場とする。2 つの速度場では初期条件が異なり、またそれぞれの外力  $\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$  と  $\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$  も異なっていてよいとする。簡単のため、流体の占める領域を 1 辺  $2\pi$  の立方体として周期境界条件を課す。 $\hat{\mathbf{u}}^{(i)}(\mathbf{k}, t) (i = 1, 2)$  を  $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$  の  $\mathbf{x}$  についての Fourier 変換とする。 $\mathbf{u}^{(1)}$  から  $\mathbf{u}^{(2)}$  への大スケールのデータ同化を、 $k \equiv |\mathbf{k}| < k_a$  を満たす低波数モードについて時間間隔  $T_a$  で、 $\hat{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{k}, t)$  を  $\hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{k}, t)$  に置き換えることで行う。よって、

$$\hat{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{k}, t_0 + nT_a) = \hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{k}, t_0 + nT_a) \quad (k < k_a, n = 1, 2, \dots)$$

表 1: DNS パラメタと速度場  $\mathbf{u}^{(1)}$  の初期における統計量.  $N$ : 1 方向の格子点数,  $k_{\max}$ : 最大解像波数,  $k_i$ :  $\Delta(k, 0) \neq 0$  となる最小波数,  $\nu$ : 動粘性係数,  $\Delta t$ : 時間刻み,  $\epsilon$ : 平均エネルギー散逸率,  $L_0$ : 積分長,  $\lambda$ : Taylor ミクロスケール,  $\eta$ : Kolmogorov 長,  $R_\lambda$ : Taylor ミクロスケールに基づく Reynolds 数. (文献 [12] より引用.)

|          | $N$ | $k_{\max}$ | $k_i$ | $\nu(\times 10^{-3})$ | $\Delta t(\times 10^{-3})$ | $\epsilon$ | $L_0$ | $\lambda$ | $\eta(\times 10^{-3})$ | $R_\lambda$ |
|----------|-----|------------|-------|-----------------------|----------------------------|------------|-------|-----------|------------------------|-------------|
| RUN64-1  | 64  | 30         | 28    | 10.0                  | 10.0                       | 0.171      | 0.941 | 0.541     | 49.2                   | 31          |
| RUN128-1 | 128 | 60         | 58    | 2.70                  | 10.0                       | 0.138      | 0.796 | 0.312     | 19.4                   | 67          |
| RUN256-1 | 256 | 120        | 112   | 1.10                  | 4.00                       | 0.132      | 0.759 | 0.204     | 10.0                   | 107         |
| RUN512-1 | 512 | 241        | 236   | 0.410                 | 1.00                       | 0.127      | 0.728 | 0.127     | 4.82                   | 179         |
| RUN128-2 | 128 | 60         | 58    | 5.50                  | 10.0                       | 0.148      | 0.882 | 0.431     | 32.6                   | 45          |

が成り立つ.  $T_a \rightarrow 0$  の極限が連続データ同化に対応する. ここでは特に断らない限り, この極限のみを考える. 速度場  $\mathbf{u}^{(1)}$  と  $\mathbf{u}^{(2)}$  はそれぞれ「正しい場」と「正しい場の大スケールデータを用いてシミュレーションした場」のモデルと考えることができる.

$E^{(i)}(k, t)$  と  $E^{(i)}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) をそれぞれ  $\mathbf{u}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) のエネルギースペクトルと単位質量当たりのエネルギーとする. 同様に  $\Delta(k, t)$  と  $\Delta(t)$  をそれぞれ速度差 (誤差) 場  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}$  のエネルギースペクトル, エネルギーとする. つまり,

$$E^{(i)}(k, t) = (1/2) \sum_{\mathbf{k}'=k} |\hat{\mathbf{u}}^{(i)}(\mathbf{k}', t)|^2, \quad E^{(i)}(t) = \sum_k E^{(i)}(k, t),$$

$$\Delta(k, t) = (1/2) \sum_{\mathbf{k}'=k} |\delta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)|^2, \quad \Delta(t) = \sum_k \Delta(k, t)$$

である. ここで,  $\sum_{\mathbf{k}'=k}$  は領域  $k - 1/2 < |\mathbf{k}'| \leq k + 1/2$  についての和である.

$E^{(1)}(k, t) = E^{(2)}(k, t)$  が成り立つ場合,  $\Delta(k, t) = 0$  は波数領域  $(k - 1/2, k + 1/2]$  で  $\hat{\mathbf{u}}^{(1)} = \hat{\mathbf{u}}^{(2)}$  であることを意味し, また  $\Delta(k, t) = 2E^{(1)}(k, t)$  は同じ波数領域で  $\sum_{\mathbf{k}'=k} \hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{k}', t) \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(2)}(-\mathbf{k}', t) = 0$ , つまり  $\mathbf{u}^{(1)}$  と  $\mathbf{u}^{(2)}$  に相関が無いことを意味する. よって,  $\Delta(k, t)$  はその波数領域における  $\mathbf{u}^{(1)}$  と  $\mathbf{u}^{(2)}$  のずれ,  $\Delta(t)$  はずれ全体の定量的評価を与えている.

DNS は  $\mathbf{u}^{(1)}$  と  $\mathbf{u}^{(2)}$  の双方についてエイリアスを除去したスペクトル法を用いた. 時間発展には 4 次の Runge-Kutta 法を用いた. 行った DNS は 5 つのグループ, RUN64-1, RUN128-1, RUN256-1, RUN512-1, RUN128-2 に分けられる. それぞれのグループの中の DNS は格子点数  $N^3$ ,  $\mathbf{u}^{(1)}$  と  $\mathbf{u}^{(2)}$  の初期場が等しいが,  $k_a$  が互いに異なっている.

$\mathbf{u}^{(1)}$  の初期場には, 予め行った外力を加えた Navier-Stokes 方程式の DNS の統計的準定常状態を用いた. 外力  $\mathbf{f}$  は低波数領域  $2 < k < 3$  に負の摩擦

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) = \gamma \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$$

の形で加え,  $\gamma (> 0)$  の値は各時間ステップ毎にエネルギー  $E^{(1)}$  をほぼ一定値 0.5 に保つように決定した. 動粘性係数  $\nu$  は  $k_{\max} \eta \approx 1$  となるような値を選んだ. (ただし, RUN128-2 のみは  $k_{\max} \eta \approx 2$  となるような値を選んだ.) ここで  $k_{\max}$  は最大解像波数,  $\eta \equiv (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$

は Kolmogorov 長,  $\epsilon$  は単位体積当たりの平均エネルギー散逸率である.  $\hat{u}^{(2)}(\mathbf{k}, t)$  の初期  $t = t_0$  での値は,  $k_i$  を  $k_a$  より大きい任意の高波数として, 低波数領域  $k < k_i$  では  $\hat{u}^{(1)}(\mathbf{k}, t_0)$  と等しくし, 高波数領域  $k \geq k_i$  では  $E^{(2)}(k, t_0) = E^{(1)}(k, t_0)$  をほぼ満たすようにして乱数で発生させた. よって  $k < k_i$  では  $\Delta(k, t_0) = 0$ ,  $k \geq k_i$  では  $\Delta(k, t_0) \approx 2E^{(1)}(k, t_0)$  となる, つまり初期の誤差は高波数領域  $k_i \leq k \leq k_{\max}$  に局在している.

$T_a \rightarrow 0$  の極限は, DNS では  $T_a = \Delta t$ , ただし  $\Delta t$  は時間刻み, と置くことで近似した.  $E^{(i)}(k) (i = 1, 2)$  を準定常に保つために, 初期場を準備するための DNS と同様に外力を  $\mathbf{f}^{(i)}$

$$\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{k}, t) = \gamma \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{k}, t) \quad (2 < k < 3)$$

のように加えた. データ同化する最大波数  $k_a$  は常に 3 より大きく選んでいるので,  $\delta \hat{u} \neq 0$  となる波数領域  $k \geq k_a$  では  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) = 0$  である. つまり,  $\mathbf{f}$  は  $\delta \mathbf{u}$  に直接影響を及ぼすことはなく, 非線形相互作用を通してのみ影響を与える.

表 1 に DNS のパラメタと初期場  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{k}, t_0)$  の乱流を特徴づけるいくつかの量を記した. ここで, 積分長は  $L_0 = (\pi/2u'^2) \int dk k^{-1} E(k)$ , Taylor マイクロスケールは  $\lambda = (15\nu u'^2/\epsilon)^{1/2}$ , Taylor マイクロスケールの基づく Reynolds 数は  $R_\lambda = (u'\lambda/\nu)$ , で与えられる, ただし  $u' = (2E/3)^{1/2}$  である.

図 1 は初期のエネルギースペクトル  $E^{(1)}(k) [\approx E^{(2)}(k)]$  を示している. Reynolds 数の最も大きい乱流 ( $R_\lambda = 179$ ,  $N = 512$ ) において慣性小領域を特徴づける  $k^{-5/3}$  スペクトルがcaろうじて見られることに注目されたい.

### 3 数値実験結果

図 2 は,  $R_\lambda = 107$  で様々な  $k_a$  についての  $\Delta(t)$  の時間発展を表している. ここで  $t_0 = 0$  として, 横軸には Kolmogorov 時間  $\tau \equiv (\nu/\epsilon)^{1/2}$  で無次元化した時間  $t/\tau$  を用いている.  $k_a$  が小さい場合,  $\Delta(t)$  は初期の短い経過期間の後, 時間とともに増大する. これは文献 [2] 等の乱流の初期値敏感性と整合する結果である. しかし, 一方で,  $k_a$  がある波数より大きい場合は, 逆に  $\Delta(t)$  は時間とともに減少している. 図から  $\Delta(t)$  が初期の経過期間の後

$$\Delta(t) \approx A \exp(-\alpha t), \quad (1)$$

とほぼ指数関数的に増大または減少しているのが分かる. ここで減衰定数  $\alpha$  は  $k_a$  に依存している.  $\bar{\alpha}$  と  $\Delta\alpha$  をそれぞれ局所減衰定数  $\alpha(t) \equiv -\partial/\partial t [\log \Delta(t)]$  の時間区間  $10\tau < t \leq T_{\max}$  での平均と標準偏差とする. ここで  $T_{\max}$  は DNS を終了した時刻,  $\Delta(t)$  が  $10^{-30}$  よりも小さくなった時刻 ( $\alpha > 0$  のとき),  $\Delta(t)$  が指数的增加をしなくなり飽和する適当な時刻 ( $\alpha < 0$  のとき), の何れかである. また初期経過の期間  $0 \leq t \leq 10\tau$  は時間平均区間から除外した.

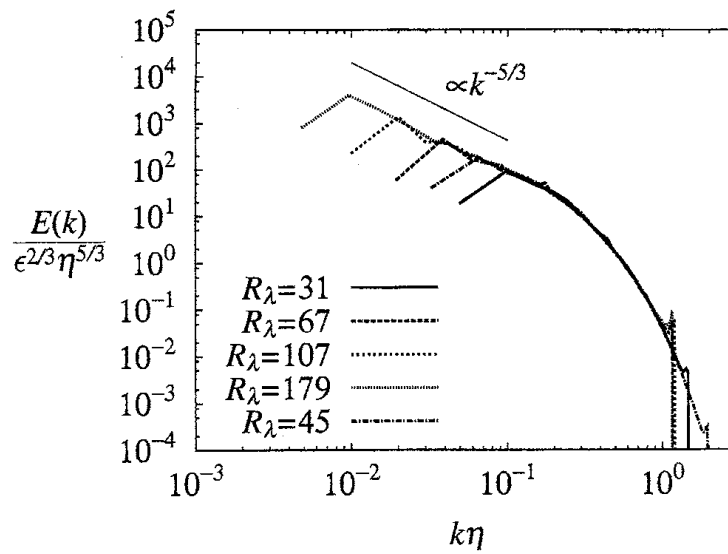


図 1: 様々な  $R_\lambda$  についての初期速度場  $\mathbf{u}^{(1)}$  のエネルギースペクトル  $E^{(1)}(k)$  両軸は  $\epsilon$  と  $\eta$  を用いて無次元化してある. (文献 [12] より引用.)

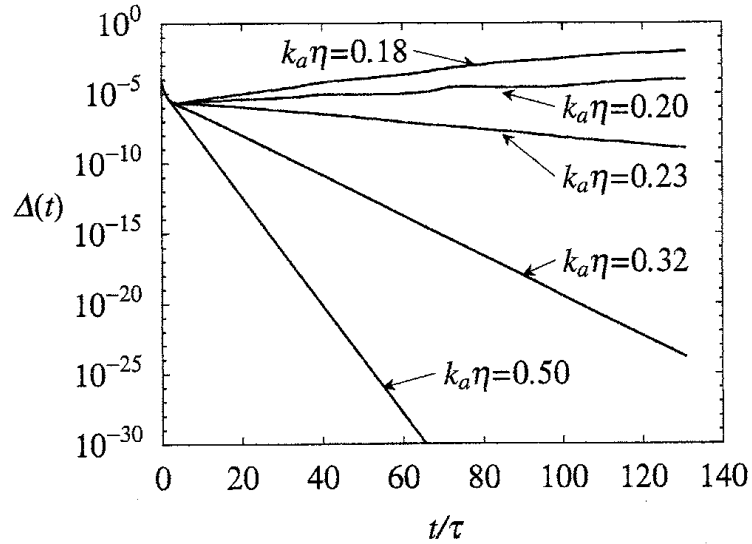


図 2: 様々な  $k_a$  における, 誤差場  $\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}$  のエネルギー  $\Delta(t)$  の時間発展 ( $R_\lambda = 107$ ). (文献 [12] より引用.)

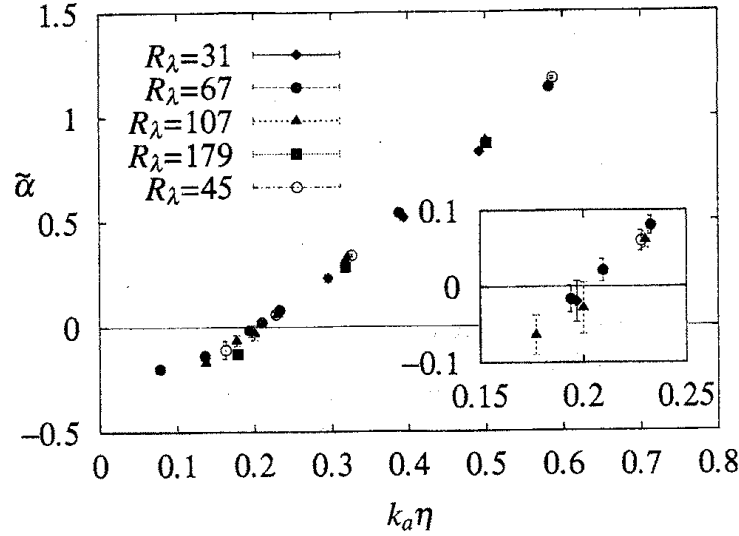


図 3: 様々な  $R_\lambda$  における  $k_a \eta$  の関数としての無次元化された減衰定数  $\tilde{\alpha}$ . エラーバーは無次元化された標準偏差  $\tau \Delta \alpha$  を表す. 挿入図は  $\tilde{\alpha}$  が符号を変える付近の拡大図. (文献 [12] より引用.)

$T_a = \Delta t$  と  $T_a = 2\Delta t$  の DNS において  $\bar{\alpha}$  の違いはほぼ  $\sim 1\%$  程度であり, これより  $T_a = \Delta t$  が  $\bar{\alpha}$  を見積もることにおいて  $T_a \rightarrow 0$  の極限の良い近似であることが示唆される. また平均減衰定数  $\bar{\alpha}$  は時間平均区間が十分ある限り  $k_i$  には殆ど依存しない.  $\bar{\alpha}$  の  $k_i$  の違いによる典型的な変化量は  $\Delta \alpha$  より小さい.

平均減衰定数  $\bar{\alpha}(k_a)$  を  $k_a$  の関数として見た場合, その関数は  $R_\lambda$  に依存する. しかし,

$$\bar{\alpha}(k_a \eta) = \bar{\alpha}(k_a) \tau, \quad (2)$$

のように無次元化された関数  $\bar{\alpha}$  は,  $R_\lambda$  に殆ど依存しないことが図 3 により分かる. ここで臨界波数  $k^*$  を  $\Delta(t)$  が減衰する  $k_a$  の下限, つまり図 3 で  $\bar{\alpha}(k^*) = 0$  となる  $k^*$ , と定義する. すると, 図 3 から

$$k^* \approx 0.2 \eta^{-1}, \quad (3)$$

と見積もることができる.

$k_{\max} \eta \approx 1$  となる DNS (RUN64-1, RUN128-1, RUN256-1, RUN512-1) と DNS  $k_{\max} \eta \approx 2$  となる DNS (RUN128-2) の間でも無次元関数がほぼ一致していることは,  $k_{\max} \eta \approx 1$  が  $\bar{\alpha}$  を見積もる上で十分な解像度であることを示唆している. 我々の予備的 DNS によれば,  $k_{\max} \eta < 1$  の DNS においては  $\bar{\alpha}$  の値が図中の値よりもかなり小さくなることが分かっている. つまり,  $\bar{\alpha}$  を正しく見積もるには  $k_{\max} \eta \geq 1$  の解像度が必要である.

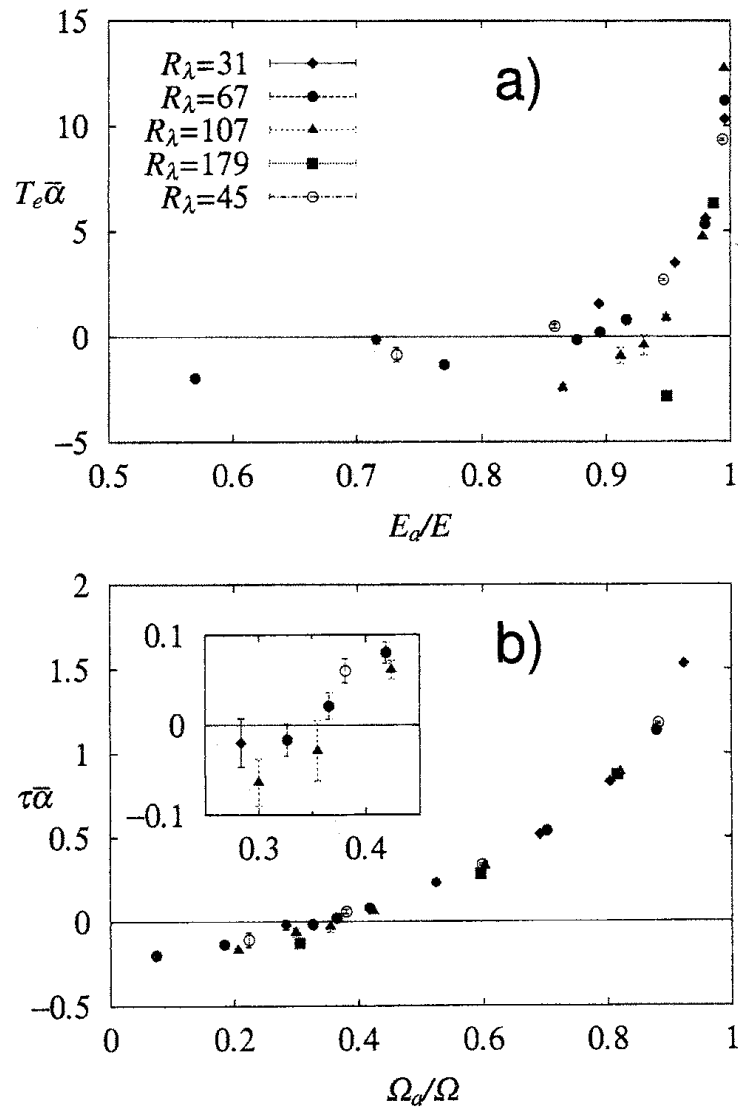


図 4: a) 様々な  $R_\lambda$  における, エネルギー比  $E_a/E$  と無次元化された減衰定数  $T_e \bar{\alpha}$  の関係. エラーバーは無次元化された標準偏差  $T_e \Delta \alpha$ . b) エンストロフィー比  $\Omega_a/\Omega$  と無次元化された減衰定数  $\tau \bar{\alpha} (= \bar{\alpha})$  の関係. 図中のシンボルは a) と同じ  $R_\lambda$  を表す. 挿入図は  $\tau \bar{\alpha}$  が符号を変える付近の拡大図. (文献 [12] より引用.)

平均減衰定数  $\bar{\alpha}$  は、エネルギー比  $E_a/E$  またはエンストロフィー比  $\Omega_a/\Omega$  の関数と捉えることもできる。ここでエンストロフィーは

$$\Omega = \sum_k k^2 E(k),$$

で、 $E_a, \Omega_a$  はそれぞれ同化されるエネルギー、エンストロフィーで、

$$E_a = \sum_{k < k_a} E(k), \quad \Omega_a = \sum_{k < k_a} k^2 E(k),$$

により定義される。

図 4 a) は様々な  $R_\lambda$  について、渦回転時間  $T_e \equiv L_0/u'$  を用いて無次元化した減衰定数  $\bar{\alpha}$  をエネルギー比の関数として表している。図から、 $\bar{\alpha} = 0$  となる臨界エネルギー比  $(E_a/E)^*$  は  $R_\lambda$  に強く依存していることが分かる。一方、図 4 b) は Kolmogorov 時間を用いて無次元化した減衰定数  $\tau\bar{\alpha} (= \tilde{\alpha})$  をエンストロフィー比率の関数として表している。グラフは異なる  $R_\lambda$  について良く一致しており、 $\bar{\alpha} = 0$  となる臨界エンストロフィー比は  $0.30 < (\Omega_a/\Omega)^* < 0.35$  と見積もられる。図 3, 4 から  $\bar{\alpha}$  はエネルギー保有スケールの量  $L_0, T_e, E$  ではなく、エネルギー散逸スケールの量  $\eta, \tau, \Omega$  によって特徴付けられることが示唆される。

## 4 考察

今、 $Re_\ell \equiv u_\ell \ell / \nu$  を大きさ  $\ell$  の渦についての Reynolds 数と定義しよう、ただし  $u_\ell$  は大きさ  $\ell$  の渦の特徴的速度である。Kolmogorov のスケール則  $u_\ell \sim (\epsilon \ell)^{1/3}$  を用いると  $Re_\ell \sim (\ell/\eta)^{4/3}$  となる。すると  $\ell^* = 1/k^*$  の大きさの渦についての Reynolds 数は  $Re_{1/k^*} \sim (k^* \eta)^{-4/3} \sim 9$  となる。ここで、この「臨界 Reynolds 数」 $Re_{1/k^*}$  を与えられた境界条件毎に決まる通常の臨界 Reynolds 数  $Re_c$  (例えば、平面 Poiseuille 流では  $Re_c = 5722$ ) の類似として捉えることができよう。今考えている「臨界 Reynolds 数」が通常のものである点は、「境界条件」が定常ではなく、大きいスケールの乱流場で与えられるという点である。

無次元化した減衰定数  $\tilde{\alpha}$  は DNS を行った範囲の  $R_\lambda$  の乱流場においては  $R_\lambda$  に殆ど依存しないことが、示された。また  $\tilde{\alpha}$  の形から、高波数 ( $k \geq k_a$ ) モードのデータが低波数 ( $k < k_a$ ) モードのデータ同化から「再生」されるための  $k_a$  の条件が  $k_a > k^*, k^* \approx 0.2\eta^{-1}$  で与えられることが分かった。この条件が満たされている範囲では、一般に受けいられている乱流の描像とは異なり、乱流場は初期値の誤差にたいして鈍感である。本研究で得られた  $\tilde{\alpha}$  や  $k^* \eta$  は、本研究で調べた  $R_\lambda$  の範囲で  $R_\lambda$  に殆ど依存しないので、それぞれ高 Reynolds 数極限の普遍形、普遍定数の良い近似になっていることが期待される。

ここで  $k < 0.2\eta^{-1}$  を満たす自由度の数は全体の自由度の数と比べて非常に小さいことに注目されたい。例えば、 $k_{\max} \eta = 1$  の DNS においては、全自由度数中の 1% に満たない。

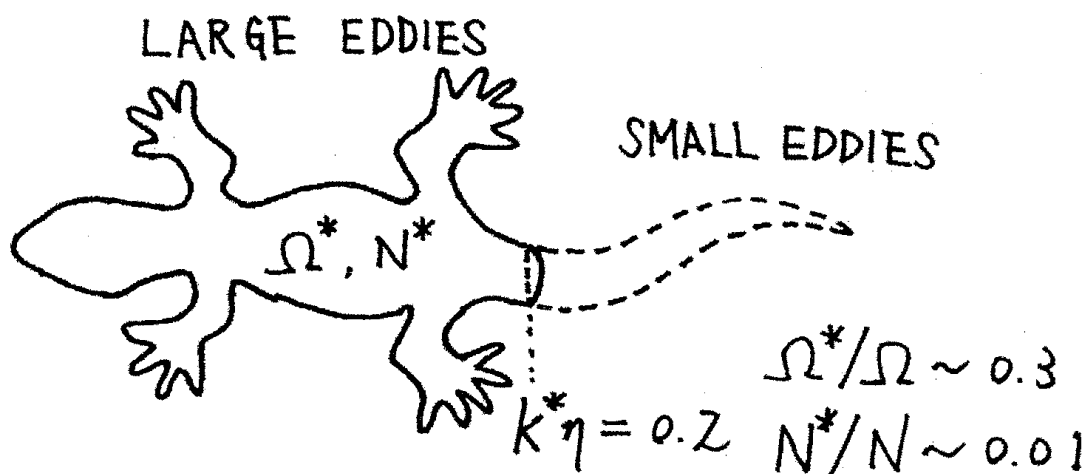


図 5: 小さい渦は「トカゲのシッポ」.

したがって, 99% の高波数モードのデータを「再生」するには, たった 1% の低波数モードの時々刻々のデータがあればよいのである. この意味で, 波数  $k^*$  以上のモード (小さい渦) はそれより波数の小さいモード (大きい渦) に隷属的であり, 「トカゲのシッポ」であると言えよう (図 5) .

## 謝辞

DNS は名古屋大学情報連携基盤センターの富士通 VPP5000/56 で行われた. 表 1 と図 1-4 は文献 [12] より引用した. また, この研究は一部, 21 世紀 COE 「計算科学フロンティア」, 文部科学省科研費萌芽研究 14654073, 日本学術振興会科研費 (B)14340033, (C) 15607011 の援助を受けている.

## 参考文献

- [1] G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1953), Chap. 1.
- [2] C. E. Leith and R. H. Kraichnan, J. Atmos. Sci., **29**, 1041 (1972).

- [3] E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci., **20**, 130 (1963).
- [4] J. Charney, H. Halem, and R. Jastrow, J. Atmos. Sci. **26**, 1160 (1969).
- [5] G. Browning, W. Henshaw, and H. Kreiss, UCLA CAM Technical Report 98-23, 1998.
- [6] K. Hayashi, T. Ishihara, and Y. Kaneda, in *Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence, Modern Perspectives and Applications to Global-Scale Flows*, edited by Y. Kaneda and T. Gotoh (Springer, 2002), p.239.
- [7] W. Henshaw and H.-O. Kreiss, J. Yström, Multiscale Modeling and Simulation **1**, 119 (2003).
- [8] E. Olson and E.S. Titi, J. stat. phys. **113**, 799 (2003).
- [9] C. Foias and G. Prodi. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **39**, 1 (1967).
- [10] C. Foias, O.P. Manley, R. Temam, and Y.M. Trève, Physica D **9**, 157 (1983).
- [11] D.A. Jones and E.S. Titi, Indiana Univ. Math. J. **42**, 875 (1993).
- [12] K. Yoshida, J. Yamaguchi, and Y. Kaneda, Phys. Rev. Lett. **94**, 014501 (2005).