

The Isaacs corresponding blocks of finite groups

越谷 重夫 (こしたに) 千葉大学 理学部
Shigeo Koshitani, Chiba University
e-mail koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp

これは Morton E. Harris (University of Illinois at Chicago, USA) との共同研究である [2].

2つの有限群の既約指標たちの集合の間の対応 (全単射) として, いわゆる Glauberman 対応と Isaacs 対応がよく知られている ([1], [4] 参照). (ただし, ここで単に指標と言えば, それは通常指標 ordinary character を意味することとする). これらはもちろん指標のレベルでの話であるが, 1999年に発表された渡辺アツミ (熊本大学) による画期的かつ重要な結果 [7] により, これらが有限群のモジュラー表現における2つのブロックの間の対応の話となった.

以下次の記号を使う (ただし, いろいろな用語の詳しい正確な意味を知るためには, [5] を参照のこと).

G := 有限群,

p := 素数,

$(\mathcal{O}, \mathcal{K}, k)$ は G のすべての部分群に対して十分大きな, いわゆる分裂 p -モジュラー系,

つまり,

$\mathcal{O}$:= 標数ゼロの完備離散付値環,

$\mathcal{K}$:= $\mathcal{O}$ の商体,

k := $\mathcal{O}$ の剰余体 で標数が p のもの,

そして, $\mathcal{K}$ と k はどちらも G のすべての部分群に対しての分裂体になっている,

$|G|$:= 群 G の位数,

$\mathfrak{A}$:= G の自己同型群 $\text{Aut}(G)$ のある部分群で, 位数が互いに素, つまり $(|G|, |\mathfrak{A}|) = 1$ となっているもの,

$C := C_G(\mathfrak{A}) = G^{\mathfrak{A}}$,

$\text{Irr}(G)$:= G の通常既約指標全体の集合,

$\text{Irr}(G)^{\mathfrak{A}} := \text{Irr}(G)$ の元で $\mathfrak{A}$ で固定されているものの全体,

つまり

$\text{Irr}(G)^{\mathfrak{A}} := \{\chi \in \text{Irr}(G) \mid \chi^{\alpha} = \chi, \forall \alpha \in \mathfrak{A}\}$

このとき, G.Glauberman [1] と I.M.Isaacs [4] は, 下記のような自然な対応 (全単射) が存在する (定義できる) ことを証明した.

$$\pi(G, \mathfrak{A}) : \text{Irr}(G)^{\mathfrak{A}} \longrightarrow \text{Irr}(G^{\mathfrak{A}})$$

特に, $\mathfrak{A}$ が可解群の時に, この対応 $\pi(G, \mathfrak{A})$ は Glauberman 対応と呼ばれ, それ以外の場合には (Feit-Thompson の定理により $|G|$ が奇数の場合を考えれば十分になるので), つまり $|G|$ が奇数の場合には Isaacs 対応 と呼ばれている. ちなみに, これらが同時に起こるとき, つまり $\mathfrak{A}$ が可解群で, $|G|$ が奇数の場合にはいったいどうなるのか, ということが心配になる訳であるが, 実はこの場合には, この 2 つの対応が一致していることがわかっているので, 安心できる (T.R.Wolf [10]).

さて, 渡辺アツミによる重要な結果 [7] により上記の設定で以下のことが証明されている. ただし以下の記号を使う.

これまでの結果. A を G の p -ブロックで, 不足群 P を持つとし, そして $\text{Irr}(A)$ で A に属する G の既約指標全体の集合を表すことにする. さらに, A は $\mathfrak{A}$ -不変, また $P \subseteq G^{\mathfrak{A}}$ を満たしていると仮定する (これが L. Puig が呼ぶところの, いわゆる「Watanabe's situation」である). このとき次のことが成り立つ.

- (i) (渡辺アツミ [7]) $\text{Irr}(A) \subseteq \text{Irr}(G)^{\mathfrak{A}}$.
- (ii) (渡辺アツミ [7]) $\mathfrak{A}$ が可解群のときには $\{[\pi(G, \mathfrak{A})](\chi) \mid \chi \in \text{Irr}(A)\} = \text{Irr}(B)$ となる $G^{\mathfrak{A}}$ の p -ブロック B がただ一つ存在して, B は A と同じ不足群 P を持つ (この B は A の Glauberman-渡辺 対応子 と呼ばれている). その上 A と B の間には isotopies が存在する.
- (iii) (堀本博 [3], 渡辺アツミ [8]) 特に $|G|$ が奇数の場合にも, (ii) と全く同様のことが成立する.
- (iv) (渡辺アツミ [9]) (iii) の設定で, つまり Isaacs 対応の設定においては, 2 つのブロック代数 A と B は森田同値になっている.

定理 (M.E.Harris-越谷 [2]). 上記の設定でさらに $|G|$ が奇数の場合, つまり $\pi(G, \mathfrak{A})$ が Isaacs 対応の場合を考える. このとき, 次のような (A, B) -両側加群 M が存在する (すなわち, 上記 (iv) の "少しだけ" の精密化).

- (1) M を右 $\mathcal{O}[G \times G^{\mathfrak{A}}]$ -加群と考えたとき M は vertex ΔP を持ち, そして endo-permutation 右 $\mathcal{O}[\Delta P]$ -加群である M の source が存在する. ここで, $\Delta P := \{(u, u) \in P \times P \mid u \in P\}$.

- (2) Isaacs 対応 $\pi(G, \mathfrak{A}) : \text{Irr}(A) \rightarrow \text{Irr}(B)$ は M によって誘導されている. つまり, $\chi \in \text{Irr}(A) \Rightarrow \chi \otimes_{\mathcal{K}G} (M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})_{\mathcal{K}[G^{\mathfrak{A}}]} = [\pi(G, \mathfrak{A})](\chi)$.

追記. 今回ここで取り扱った Isaacs 対応ではなくて, もう一方の Glauberman 対応のについてであるが, いわゆる Brauer 対応と Glauberman 対応を同時に扱おう, という L. Puig による興味ある論文が最近発表された [6].

謝辞. 今回の研究集会「群論とその周辺」は大変興味深い講演が多く, 非常に楽しめ, そして勉強になりました. 研究代表者 千吉良 直紀さん, および副研究代表者 宮本雅彦さんの御二人に深く感謝したいと思います.

REFERENCES

- [1] G. Glauberman, Correspondence of characters for relatively prime operator groups, *Canad. J. Math.* **20** (1968), 1465–1488.
- [2] M.E. Harris and S. Koshitani, An extension of Wabenabe’s theorem for the Isaacs-Horimoto-Watanabe corresponding blocks, *J. Algebra* **296** (2006), 96–109.
- [3] H. Horimoto, On a correspondence between blocks of finite groups induced from the Isaacs character correspondence, *Hokkaido Math. J.* **30** (2001), 65–74.
- [4] I.M. Isaacs, Characters of solvable and symplectic groups, *Amer. J. Math.* **95** (1973), 594–635.
- [5] 永尾 汎–津島行男, 有限群の表現論, 裳華房, 1987.,
- [6] L. Puig, On the Brauer-Glauberman correspondence, *J. Algebra* (2006), doi:10.1016/j.jalgebra.2006.02.041
- [7] A. Watanabe, The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups, *J. Algebra* **216** (1999), 548–565.
- [8] A. Watanabe, The Isaacs character correspondence and isotypies between blocks of finite groups, *Advanced Studies in Pure Mathematics* (Mathematical Society of Japan), **32** (2001), 437–448.
- [9] A. Watanabe, Morita equivalence of Isaacs correspondence for blocks of finite groups, *Arch. Math.* **82** (2004), 488–494.
- [10] T.R. Wolf, Character correspondences in solvable groups, *Ill. J. Math.* **22** (1978), 327–340.