

Super Grassmann hierarchy と super KP hierarchy

横浜市大・文理 土野喜三雄
(Kimio Ueno)
広島大・理 山田裕史
(Hirofumi Yamada)

0. Introduction

佐藤幹夫氏により導入された Kadomtsev - Petviashvili (KP) hierarchy は, 無限次元 Grassmann 多様体上の力学系, として自然に解釈された ([0, 1]), その線型化方程式 (佐藤方程式) は線型常微分作用素の積への分解という素朴な問題の “時間発展” を記述するものとしてとらえることが出来る。この framework に従い我々は KP hierarchy の超対称化 (supersymmetric extension) を考えてみることにした。

そもそも超対称化とは物理学の統一場理論に端を発する概念である。通常の時空座標の他に Grassmann 数も座標として許し, field (函数) も Grassmann 代数值として, Bose 場, Fermi 場と同時に記述しようという formalism である。また数子においても, 70年代から主にリッポの人々により, リー

超代数, 超多様体などが研究されている。この辺で、微分方程式の可積分系の超対称化を考えてみるのも無駄ではなからう。

1. Grassmann hierarchy と KP hierarchy

本節は通常の KP hierarchy の復習にあてられる。ここでは K は x -変数函数体, $\partial_x: K \rightarrow K$ は derivation, C は定数体とする。 $\mathcal{D} = \sum_{n \geq 0} K \partial_x^n$ は微分作用素環と呼ぶ。積は Leibniz rule で入れる。 $\mathcal{D}(N)^{monic} = \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \partial_x^{N-n}; a_0 = 1 \right\}$ とおく。次の問題を考えよう。「 $P \in \mathcal{D}(N)^{monic}$ は K 上可解とする。すなわち線型微分方程式 $P\phi = 0$ の K 内に N 個の $(C上)$ -一次独立な解を持つとする。 $N = m+n$ としたとき $W = \sum_{j=0}^m w_j \partial_x^{m-j} \in \mathcal{D}(m)^{monic}$ とし

$$P = ZW \tag{0}$$

と微分作用素の積に分解せよ。」この問題は $\mathcal{D}$ -加群 $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ の商 $\mathcal{D}$ -加群 $M' = \mathcal{D}/\mathcal{D}W$ を決定せよ、という問題と同等である。そして次の事実がわかる。 $V = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, K)$ とおいたとき

$$\{M \text{ の商 } \mathcal{D}\text{-加群}\} \cong \{V \text{ の } m\text{-次元線型部分空間}\}.$$

これは純粋に線型微分方程式の問題であるが (0) と $w_1, \dots, w_m$ に関する非線型微分方程式と思えば、

非線型微分方程式 (0) の解空間 $\cong GM(m, V)$

を意味する。

この辺の事情をもう少し詳しく見てみよう。簡単の為、 $P = \partial_x^N$ とする。 $P\phi = 0$ の解の基本系 $\varepsilon (\phi_0, \dots, \phi_{N-1})$ とする。 $W\psi = 0$ の解の基本系 $\varepsilon (\psi_0, \dots, \psi_{m-1})$ とすると、
 $\psi_j = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i \xi_{ij}$ と表わすことができる。 ここで $\xi = (\xi_{ij})_{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < m}} \in Mat(N, m; \mathbb{C})$,
 $\text{rank } \xi = m$ である。このような行列 ξ を N 次元, m -frame と呼ぶ。今、Wronski 行列 $\Phi = (\phi_j^{(i)})_{0 \leq i, j < N}$ と考えれば、

$$W\psi_j = 0 \quad (0 \leq j < m) \iff (w_m, \dots, w_1, 1, 0, \dots, 0) \Phi \xi = 0 \quad \dots (1)$$

がわかる。 (1) は Grassmann 方程式と呼ばれることにしよう。今、我々は P の分解 (0) から出発して Grassmann 方程式 (1) に到達したので、逆に任意の N 次元, m -frame ξ から出発して、(1) を解くことにより、 P の右因子 W を求めることもできる。実際、
 $\det(\xi_0 \Phi \xi) \neq 0$ (ただし $\xi_0 = [I_m \parallel 0_{m, n}]$) より (1) は一意解 $w_1, \dots, w_m$ を持つので $W = \sum_{j=0}^m w_j \partial_x^{m-j}$ ($w_0 = 1$) と置いてやればよい。

次に時間変数 $t_1, t_2, t_3, \dots$ を導入して W の“時間発展”がある変形を考えよう。 $P = \partial_x^N$ の場合を例にとれば、Wronski 行列 Φ は、 $\partial_x \Phi = \Lambda_N \Phi$ ($\Lambda_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$) と満たすことに鑑みて、 Φ の時間発展 $\varepsilon \partial_{t_k} \Phi = \Lambda_N^k \Phi$ により与えてやる。

このように重に対して (1) を考える。この結果得られる $w_1, \dots, w_m$ に対する非線型微分方程式を "Grassmann hierarchy" と呼ぶ。今、この解に対して微分作用素 W を考えると $W\psi_k = 0$ ($0 \leq k < m$) を満たす。ここで $(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})$ は行列重の第 0 行目である。この式を t_k で微分する。

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} \psi_k + W \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t_k} \right) = 0 \quad (0 \leq k < m).$$

ここから時間発展の入力方より明らかに $\frac{\partial \psi_k}{\partial t_k} = \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2}$ であるから、

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t_k} + W \partial_x^2 \right) \psi_k = 0.$$

ここに現れる微分作用素を $\frac{\partial W}{\partial t_k} + W \partial_x^2 = B_k W + R_k$ と割り算する。 $B_k \in \mathcal{O}(l)^{m \times m}$, $\text{ord } R_k < m$ である。すると、

$$(B_k W + R_k) \psi_k = 0$$

であるから $R_k \psi_k = 0$ 。これは $R_k = 0$ を意味する。よって、

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} = B_k W - W \partial_x^2 \quad (2)$$

が得られる。右から W^{-1} という擬微分作用素をかけると、

$$B_k = W \partial_x^2 W^{-1} + \frac{\partial W}{\partial t_k} W^{-1}.$$

ここから $\text{ord} \left(\frac{\partial W}{\partial t_k} \right) W^{-1} < 0$ であるので、結局

$$B_k = (W \partial_x^2 W^{-1})_+ (= W \partial_x^2 W^{-1} \text{ の微分作用素部分}) \quad (3)$$

である。 W の時間発展は (2), (3) で与えられたわけだが、これは、

KP hierarchy の佐藤方程式そのものである。KP hierarchy は、

無限次元 Grassmann 多様体上の運動として与えられるが、

Grassmann hierarchy は、その有限次元軌道に対していっているので

ある。また Grassmann hierarchy の適当な極限 $m, n \mapsto \infty$ とすれば KP hierarchy が得られる。

少し例を挙げてよう。 $W = \partial_x + w \in \mathcal{D}(1)^{\text{monic}}$ とする。 B_L は (3) に従って求めてみると、

$$\begin{aligned} B_1 &= \partial_x, & B_2 &= \partial_x^2 - 2w\partial_x, & (w_x = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ 等}) \\ B_3 &= \partial_x^3 - 3w_x\partial_x - 3w\partial_{xx} + 3w^2\partial_x, \end{aligned}$$

となる。(2) において、 $l=1$ とおくと、これは $x=t_1$ と同一視してよい事を示している。また $l=2, 3$ とおくとにより、次の方程式が得られる。

$$w_{t_2} = w_{xx} - 2w w_x \quad (4)$$

$$w_{t_3} = w_{xxx} - 3w_x^2 + 3w^2 w_x - 3w w_{xx} \quad (5)$$

(4) は、Burgers-Hopf 方程式と呼ばれているものである。 $u = -w_x$ とおいて (4), (5) を書き直すと (本来の) KP 方程式

$$3u_{t_2 t_2} + (-4u_{t_3} + u_{xxx} + 12u u_x)_x = 0$$

が得られる。

2. Super manifold, super Grassmann manifold.

本節では、Rogers [2], Boyer-Gitler [3] などに従って super manifold に関する事項を述べる。まず L は正整数とし、 $B_L \in \mathbb{R}^L$ 上の Grassmann 代数とする。

$$B_L = \Lambda(\mathbb{R}^L) = B_{L,0} \oplus B_{L,1},$$

そこで $B_{L,0}$ (resp. $B_{L,1}$) は偶数個 (resp. 奇数個) の元の外積で書かれてゐる元の全体を表し、 B_L の even part (resp. odd part) と呼ばれる。 B_L の位相は $\mathbb{R}^L$ から自然に導入されるものとする。 $L = \infty$ の場合も同様に定義して置く。

$$l_1 = \{ (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty; \sum_{i=0}^\infty |\alpha_i| < \infty \}$$

とおく。 $B_\infty = \Lambda(l_1) = B_{\infty,0} \oplus B_{\infty,1}$ とする。次に、

$$B_L^{m/n} = (B_{L,0})^m \oplus (B_{L,1})^n$$

とおく。この空間が我々の舞台である。

微分可能関数は次のように定義される。 $U \subset B_L^{m/n}$ は open set とする。連続関数 $f: U \rightarrow B_L$ の " G^1 -級" とあるとは、 $m+n$ 個の連続関数 $G_k f: U \rightarrow B_L$ ($0 \leq k \leq m+n$) と、 $\eta: B_L^{m/n} \rightarrow B_L$ が存在して、

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=0}^{m+n-1} h^k (G_k f)(x) + \eta(h) \|h\|$$

$$\|\eta(h)\| \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$\text{すなわち、} \quad \begin{aligned} x &= (x^0, \dots, x^{m+n-1}) \in U, & \begin{cases} (x^0, \dots, x^{m-1}) \in (B_{L,0})^m \\ (x^m, \dots, x^{m+n-1}) \in (B_{L,1})^n \end{cases} \\ h &= (h^0, \dots, h^{m+n-1}) \in B_L^{m/n} \end{aligned}$$

を満たすことと定義する。また f の G^r -級とは、 $G_k f$ ($0 \leq k \leq m+n$) が G^{r-1} -級と定義する。もちろん、 G^0 -級というの当たり前前に定義される。ここで L が有限のとす。 $m \leq k < m+n$ なる k については $G_k f$ のとり方は一意的ではないことに注意せねばならない。この部分をきちんと定式化するには、Boyer-Gitler [3] の

ように最高次数の部分による module class で考えなければいけなかった。我々にとりて今必要なのは、 $L = \infty$ としてよいので、とりあえず微分可能性の定義は上のままにしておく。なお上記 [3] では、 G^∞ -級函数と実数値としての偏微分で特徴付ける。一度 Cauchy-Riemann 方程式にあたるものも考慮している。もう一つだけ言葉の準備をしておく。自然な射影 $\epsilon: B_L \rightarrow \mathbb{R}$, $\epsilon: B_L^{m|n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ を“肉体写像 (body map)”といい、 $\delta = 1 - \epsilon$ を“精神写像 (soul map)”と呼ぶ。これは DeWitt による用語である。

さて $(m|n)$ -次元 G^∞ -supermanifold over B_L とは通常の C^∞ -多様体のときと同様に、Hausdorff 空間、局所射に $B_L^{m|n}$ の open set と同相で、それと G^∞ -級写像で patching 17-6 のように定義される。Rogers は [2] で“(1|1)-次元 G^∞ -supermanifold over B_1 の例として 2次元 torus T^2 を挙げている。ここで別の例を挙げよう。

$$\text{Mat}(m|n; B_L) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array} \right] ; \begin{array}{l} A_{00}: m \times m, B_{L,0} \text{ 値}, A_{01}: m \times n, B_{L,1} \text{ 値} \\ A_{10}: n \times m, B_{L,1} \text{ 値}, A_{11}: n \times n, B_{L,0} \text{ 値} \end{array} \right\}$$

と置く。 $\text{Mat}(m|n; B_L)$ は Lie superalgebra の例になっているが、この中の可逆元の全体を $GL(m|n; B_L)$ と置く。 $\left[\begin{array}{c|c} A_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array} \right]$ が可逆であることは、 $\epsilon(A_{00}) \in GL(m; \mathbb{R})$, $\epsilon(A_{11}) \in GL(n; \mathbb{R})$ ということと同値である。 $GL(m|n; B_L)$ は G^∞ -supermanifold の4分3す

Lie supergroup の例にもなっている。

次に Grassmann 多様体の super 版を考える。通常の Grassmann 多様体をもう一度思い出そう。 N 次元, m -frame の全体を $FR(N, m; \mathbb{C})$ で表わす。 $FR(N, m; \mathbb{C}) \in GL(m; \mathbb{C})$ による右からの作用で割ったもの。

$$GM(m, n) = FR(N, m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{C}) \quad (m+n=N)$$

が Grassmann 多様体であった。これは mn 次元の $\mathbb{C}^\infty$ -多様体 (over $\mathbb{C}$) である。この方法をそのまゝ, super 化する。

$$\begin{aligned} & SFR(M|N, m|n; B_L) \\ &= \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \xi_{00} & \xi_{01} \\ \hline \xi_{10} & \xi_{11} \end{array} \right] ; \begin{array}{l} \xi_{00}: M \times m, B_{L,0} \text{ 値}, \quad \xi_{01}: M \times n, B_{L,1} \text{ 値} \\ \xi_{10}: N \times m, B_{L,1} \text{ 値}, \quad \xi_{11}: N \times n, B_{L,0} \text{ 値} \\ \text{rank} \in (\xi_{00}) = m, \quad \text{rank} \in (\xi_{11}) = n \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とある。この元を $M|N$ -次元, $m|n$ -superframe と呼ぶ。

$SFR(M|N, m|n; B_L)$ には右から $GL(m|n; B_L)$ が作用する。

そこで

$$GM(m|n, m'|n'; B_L) = SFR(M|N, m|n; B_L) / GL(m|n; B_L) \\ (m+m' = M, \quad n+n' = N)$$

とある。これは, $(mm' + nn' | mn' + m'n) - \text{次元}, G^\infty\text{-supermanifold over } B_L$ になっていることを確かめられる。

3. Super Grassmann hierarchy と Super KP hierarchy

本節では第1節で述べた Grassmann hierarchy と KP hierarchy の super 化についてその定式化といくつかの解の表示を述べる。まず記号を準備しよう。 x は通常 (可換) 変数, θ は (反可換) Grassmann 変数とする。すなわち, (反) 交換関係 $[\theta, \theta]_+ = 0$, $[x, \theta] = 0$ が成り立っているものとする。定数の役割を果たす Grassmann 代数を $A = B_\infty$ とおく。函数体 K は第1節と同じものとして $\mathcal{F} = (K \otimes \mathbb{C}[\theta]) \otimes A = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1$ という superalgebra を考える。 $\mathcal{F}$ の元を superfield と呼ぶ。 Superfield f は

$$f = f(x, \theta) = f_{00} + \theta f_{01} + f_{10} + \theta f_{11}$$

と表示される。ここで $f_{00}, f_{11} \in K \otimes A_0$, $f_{01}, f_{10} \in K \otimes A_1$ である。 $\mathcal{F}$ 上の微分作用素, ∂_θ は

$$\partial_\theta(f) = f_{01} + f_{11}$$

により定義し, さらに $\mathbb{H}$ は $\mathbb{H} = \partial_\theta + \theta \partial_x$ により定義する。

この $\mathbb{H}$ は ∂_x の“平方根”である。すなわち, 容易にわかるように $\mathbb{H}^2 = \partial_x$ が成立する。(Supersymmetry とは物理的に言えば時空の translation の平方根をとることである。ここではまず, 空間の方について, この操作を行ったことにする。) $\mathbb{H}$ は odd

な微分で super Leibniz rule

$$\mathbb{H}f = \mathbb{H}f + f^* \mathbb{H}$$

とある。これより

$$f^* = f_{00} + \epsilon f_{01} - f_{10} - \epsilon f_{11}$$

であり、 $\dot{\mathbb{H}}f$ は " f に $\dot{\mathbb{H}}$ を作用させた superfield", すなわち,

$$\dot{\mathbb{H}}f = f_{01} + \epsilon \frac{\partial f_{00}}{\partial x} + f_{11} + \epsilon \frac{\partial f_{10}}{\partial x}$$

とあらわす。微分作用素環の役割を果たすのは、当然 $\mathcal{S}[\dot{\mathbb{H}}]$

である。これは super Leibniz rule により, superalgebra になっている。

「 $P \in \mathcal{S}[\dot{\mathbb{H}}](N)^{\text{monic}}$ と $P = ZW$, $W \in \mathcal{S}[\dot{\mathbb{H}}](m)^{\text{monic}}$

と分解せよ」という問題を考える。簡単のため, N, m は偶数,

$P = \dot{\mathbb{H}}^N$ と見ておく。 $P\phi = 0$ の解は $\phi_{2j} =$

$x^j/j!$ ($0 \leq j \leq N/2$), $\phi_{2j+1} = \epsilon x^j/j!$ ($0 \leq j < N/2$) とする。 $\phi_j \in \mathcal{S}_{|j|}$

($|j| = j \bmod 2$) である。 Super Wronski 行列は $\Phi = (\dot{\mathbb{H}}^i \phi_j)_{0 \leq i, j < N}$

により定義する。明らかに $\dot{\mathbb{H}}\Phi = \Lambda_N \Phi$ が成立する。 $P = ZW$

という分解を求めるには, 第1節と同様に次の "super Grassmann 方程式" を解けばよい。

$$(w_m, \dots, w_1, 1, 0, \dots, 0) \Phi \xi = 0 \quad (6)$$

これより, $\xi = (\xi_{ij}) \in \text{Mat}(N, m; A)$, $\text{rank } \xi = m$ であり,

$\xi_{ij} \in A_{|i+j|}$ である。行列を適当に並べかえて, $\xi \in$

$\text{SFR}(N/2|N/2, m/2|m/2; A)$ とする。このとき ξ は

superframe と呼んでもよいだろう。行列を適当に入れかえて,

(6) は次のように書くことができる。

$$(w_m, w_{m-2}, \dots, w_2; w_{m-1}, w_{m-3}, \dots, w_1) \overset{\vee}{\Psi} = -(\alpha_m, \alpha_{m-2}, \dots, \alpha_2; \alpha_{m-1}, \alpha_{m-3}, \dots, \alpha_1)$$

— (7)

ここで $\check{\Psi}$ は $\Psi = \Phi \check{\Sigma}$ の行列 $\check{\Sigma}$ を入れたもので

$$\check{\Psi} = \left[\begin{array}{c|c} \check{\Psi}_{00} & \check{\Psi}_{01} \\ \hline \check{\Psi}_{10} & \check{\Psi}_{11} \end{array} \right], \quad \check{\Psi}_{ij} \text{ の成分} \in \mathcal{S}_{|i+j|}$$

という形をしている。また $\alpha_j \in \mathcal{S}_{|j|}$ である。(6) (or (7)) はすべての superframe $\check{\Sigma}$ に対して一意可解であり $w_j \in \mathcal{S}_{|j|}$ となる。つまり super Grassmann 方程式 (6) の解全体は super Grassmann 多様体となる。

次に時間発展を導入する。Even な時間変数 $t_2, t_4, t_6, \dots$ とし, odd な時間変数 $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \dots$ とする。変数 x, λ はこれらの間に は次の (反) 交換関係が成立しているものとする。

$$\begin{cases} [x, t_{2l}] = [x, \lambda_{2l+1}] = [\lambda, t_{2l}] = [\lambda, \lambda_{2l+1}]_+ = 0, \\ [t_{2l}, t_{2k}] = [t_{2l}, \lambda_{2k+1}] = [\lambda_{2l+1}, \lambda_{2k+1}]_+ = 0. \end{cases}$$

微分作用素 $\mathbb{H}_l$ を

$$\begin{cases} \mathbb{H}_{2l} = \partial_{t_{2l}}, \\ \mathbb{H}_{2l+1} = \partial_{\lambda_{2l+1}} + \sum_{k \geq 0} \lambda_{2k+1} \partial_{t_{2l+2k+2}} \end{cases}$$

と定義する。これは次の (反) 交換関係を満たす。

$$\begin{cases} [\mathbb{H}, \mathbb{H}_{2l}] = [\mathbb{H}, \mathbb{H}_{2l+1}]_+ = 0 \\ [\mathbb{H}_{2l}, \mathbb{H}_{2k}] = [\mathbb{H}_{2l}, \mathbb{H}_{2k+1}] = 0 \\ [\mathbb{H}_{2l+1}, \mathbb{H}_{2k+1}]_+ = 2 \mathbb{H}_{2l+2k+2}. \end{cases}$$

Wronski 行列 Φ の時間発展を今回は、次で入れる。

$$\dot{\mathbb{H}}_l \Phi = \Gamma_N^l \Phi \quad \text{ただし} \quad \Gamma_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

ここで $P_N^2 = -\Lambda_N^2$, $[P_N, \Lambda_N]_+ = 0$ に注意せよ。このように Φ に対して立てた super Grassmann 方程式 (6) から得られる $w_1, \dots, w_m$ の非線型微分方程式系を "super Grassmann hierarchy" と呼ぶ。第1節と同様に微分作用素の割り算を用いて (今度は符号に充分に気を付けなうといけなう) 次を示される。

Proposition Super Grassmann 方程式 (6) の解 $w_1, \dots, w_m$ から擬微分作用素 $W = \sum_{j=0}^m w_j \Theta^j$ ($w_0 = 1$) を作ると W の時間発展は次で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Theta}_{2l} W = (-)^l \{ B_{2l} W - W \Theta^{2l} \} \\ \dot{\Theta}_{2l+1} W = (-)^{l+m+1} \{ B_{2l+1} W - W \Theta^{2l+1} \} \\ B_l = (W \Theta^l W)_+ \quad // \end{array} \right. \quad (8)$$

(8) は super Grassmann hierarchy における佐藤方程式と呼ばれるものである。これらの積分可能条件は次の Zakharov - Shabat 方程式である。

$$\left\{ \begin{array}{l} (-)^l \dot{\Theta}_{2l} B_{2k} - (-)^k \dot{\Theta}_{2k} B_{2l} + [B_{2k}, B_{2l}] = 0 \\ (-)^l \dot{\Theta}_{2l} B_{2k+1} + (-)^{k+m} \dot{\Theta}_{2k+1} B_{2l} + [B_{2k+1}, B_{2l}] = 0 \\ -(-)^{l+m} \dot{\Theta}_{2l+1} B_{2k+1} + (-)^{k+m} \dot{\Theta}_{2l+1} B_{2k+1} - [B_{2k+1}, B_{2l+1}]_+ + 2 B_{2k+2l+2} = 0 \end{array} \right. \quad \dots (9)$$

無限系 (もちろん意味を明確にしないといけない) の
super Grassmann 方程式 から生ずる w_j 連に対する非線型微分方
程式系を "Super KP hierarchy" と呼ぶわけだ。上の proposition
からわかるように これは, m の偶奇によって方程式系が異
なる。これは ρ と $-\rho$ のちがひから来ている。従って, odd は時
間変数について ∂_{2l+1} と $-\partial_{2l+1}$, ∂_{2l+1} と $-\partial_{2l+1}$ のちがひに
相当する。 m が偶数のときは $\pm$ type 0, 奇数のときは $\pm$ type I の
SKP hierarchy と呼ぶことにする。 SKP hierarchy の佐藤方程式,
Zakharov-Shabat 方程式は, それぞれ (8), (9) と同じ形である。

例を少し挙げる。 Type 0 の SKP hierarchy を考えよう。

$W = \sum_{j \geq 0} w_j \partial^j$ ($w_0 = 1$) において $w_j \in \mathcal{S}_{1|1}$ とする。このとき
主計算により

$$B_1 = \partial + 2w_1, \quad B_2 = \partial^2 = \partial_x,$$

$$B_3 = \partial^3 + 2w_1 \partial^2 - \dot{w}_1 \partial + (2w_3 - \dot{w}_1 w_1 - 2w_1 w_2 + w_{1,x} - \dot{w}_2),$$

$$B_4 = \partial^4 - 2w_{1,x} \partial - (2w_{1,x} w_1 + 2w_{2,x})$$

がわかる。ここで $\dot{w}_1 = \partial w_1$ である。(8) において $l=0$
の方程式を書くと,

$$\begin{aligned} \partial W &= -(B_1 W - W \partial) \\ &= -\left\{ (\dot{w}_1 + w_2 - w_2) \partial^{-1} + (\dot{w}_2 - 2w_3 + 2w_1 w_2) \partial^{-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\}. \end{aligned}$$

これらの ∂^{-1} , ∂^{-2} の係数を比べて,

$$\dot{\mathbb{H}}_1 w_1 = -\dot{w}_1, \quad \dot{\mathbb{H}}_1 w_2 = -(\dot{w}_2 + 2w_1 w_2 - 2w_3),$$

等2の方程式が得られる。2 l =2の(8)は ∂_x と $-\partial_{t_2}$ が同等
 ということを示している。これは $\Gamma^2 = -\Lambda^2$ から当然のことと
 あり、7= (8)において 2 l =4の方程式の $\mathbb{H}^{-1}$, $\mathbb{H}^{-2}$ の係数
 を比えると

$$\dot{\mathbb{H}}_4 w_1 = w_{1,xx} + 2w_{3,x} - 2w_{1,x}\dot{w}_1 - 2w_{1,x}w_2 - 2w_{2,x}w_1,$$

$$\dot{\mathbb{H}}_4 w_2 = w_{2,xx} + 4w_{4,x} - 2w_{1,x}\dot{w}_2 + 2w_{1,x}w_3 - 2w_{1,x}w_1w_2 - 2w_{2,x}w_2$$

となる。第2式の肉体部分をとって、 $w_4 = 0$ とする (2-nd order
 行う) と $f \in (w_2)$ とあり、 $f_{t_4} = f_{xx} - 2ff_x$ と Burgers-
 Hopf 方程式が出る。第1式は全体が odd 故、肉体部分をとると
 自明に分ってしまう。

次に最も簡単な場合に解の表示を与えよう。 $N=3$,
 $m=2$ の super Grassmann 方程式を考える。

$$\Phi = \exp \left[s \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^2 + s_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \right]$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ & \bar{p}_0 & \bar{p}_1 \\ & & p_0 \end{bmatrix}$$

とある。ここで $p_0 = \bar{p}_0 = 1$, $p_1 = s + s_1$, $\bar{p}_1 = s - s_1$, $p_2 =$
 $x - t_2 + ss_1$ である。Superframe $\Sigma = (\xi_{ij})_{\substack{0 \leq i < 3 \\ 0 \leq j < 2}}$, $\xi_{ij} \in$
 $A_{1|2|1}$ として方程式を書くと、

$$(w_2, w_1) A = -(\alpha, \beta) \quad (10)$$

とある。 $\Gamma = \Gamma^\vee$,

$$\left\{ \begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_0 \xi_{00} + p_1 \xi_{10} + p_2 \xi_{20} & p_0 \xi_{01} + p_1 \xi_{11} + p_2 \xi_{21} \\ \bar{p}_0 \xi_{10} + \bar{p}_1 \xi_{20} & \bar{p}_0 \xi_{11} + \bar{p}_1 \xi_{21} \end{bmatrix}, \\ (d, \beta) &= (p_0 \xi_{20}, p_0 \xi_{21}) \end{aligned} \right.$$

である。ここで $\varepsilon(A)$ は可逆であるから、(10) は一意解に解ける。つまり $\varepsilon(A)$ が可逆であることから A が可逆であることが従い、 $(w_2, w_1) = -(\alpha, \beta) A^{-1}$ として解が求まるわけであるがこれをもう少し詳しく説明しよう。

まず $\varepsilon(a), \varepsilon(d)$ がゼロでないから、 a, d は可逆である

ことに注意する。ここで

$$(w_2, w_1) A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d^{-1}c & 1 \end{bmatrix} = -(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d^{-1}c & 1 \end{bmatrix}$$

として、これより

$$w_2 = -\frac{\alpha - \beta d^{-1}c}{a - b d^{-1}c} \quad (\varepsilon(a - b d^{-1}c) = \varepsilon(a) \neq 0)$$

同様に右から $\begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ をかけて

$$w_1 = -\frac{\beta - \alpha a^{-1}b}{d - c a^{-1}b} \quad (\varepsilon(d - c a^{-1}b) = \varepsilon(d) \neq 0)$$

が求まる。このままでもよいのだが、

$$w_2 = -\frac{\frac{\alpha d - \beta c}{d^2}}{\frac{ad - bc}{d^2}}, \quad w_1 = -\frac{\frac{\beta a - \alpha b}{a^2}}{\frac{da - cb}{a^2}}$$

と書いておく。これらの分母は A の "superdeterminant" と呼ばれるものである。(Manin, Leites など) 連名の人は "Berezinian" といひ $\text{Ber } A$ と書いて讀むやつ。)

$$s \det A = \frac{ad-bc}{d^2}, \quad s^{-1} \det A = \frac{da-cb}{a^2}.$$

$s \det A \cdot s^{-1} \det A = 1$ であることは、今の場合、簡単にチェックできる。さてここで Φ の形より、

$$\begin{cases} \dot{H}_1 a = -c \\ \dot{H}_1 b = -d \\ \dot{H}_1 c = \alpha \\ \dot{H}_1 d = \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{H}_2 a = -\alpha \\ \dot{H}_2 b = -\beta \\ \dot{H}_2 c = 0 \\ \dot{H}_2 d = 0 \end{cases}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \dot{H}_1(s^{-1} \det A) &= \frac{\beta a - \alpha b}{a^2}, \\ \dot{H}_2(s \det A) &= \frac{-\alpha d + \beta c}{d^2} \end{aligned}$$

であるから結局、

$$w_2 = \frac{\dot{H}_2(s \det A)}{s \det A}, \quad w_1 = -\frac{\dot{H}_1(s^{-1} \det A)}{s^{-1} \det A}$$

というきれいな表示が得られた。ここに現れる $s \det A$, $s^{-1} \det A$ は super Grassmann hierarchy, SKP hierarchy における“ τ -函数”にあたるものである。これに関して、現在、計算(実験)が進行中のことでもあり結果をまとめるのは、時期尚早と思われるのでここでは割愛する。

なお KP hierarchy の超対称化は我々とは別の定式化
が Manin と Radul により試みられていることを注意してお
く ([4])。

文 献

- 0) M. Sato : 数研講究録 439 (1981), 30-46.
- 1) M. Sato and Y. Sato : Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 5 (1982), 259-271.
- 2) A. Rogers : J. Math. Phys. 21 (1980), 1352-1365.
- 3) S. Boyer and C. P. Gitter : Trans. AMS. 285 (1984), 241-267.
- 4) Yu. I. Manin and A. O. Radul : Commun. Math. Phys. 98 (1985), 65-77.
- 5) 数研, あゆみ 28号 (1985).

1986年5月5日 記.