

要因実験における因子の種類と推測の方式

47 内 啓

実験計画法における基礎概念の一つに、因子効果の種別がある。これは主として日本の統計家によって発展されたものであるといえる。外国の文献にも勿論見られるが、奥野忠一氏や田口玄一氏によってなされた議論によって、精密化されたもので、まだ外国にはあまり知られていないが、わが国の応用統計学の重要な成果であるということができよう。しかしその種別は主として計画の段階で用いられ、データ解析、推測の段階には十分反映されていないように思われる。けれども、それは適切な推測方式を定めるに際しても重要な意味を持つのである。以下その主要な点について述べよう。

因子についてふつうに用いられる区別は、次のようなものである。

- a) 制御因子。その水準を制御することによって、望ましい結果を得るために用いられる因子。
- b) 標示因子。実験条件に影響を与える因子であって、その水準が再現性を持つもの。
- c) ブロック因子。実験条件に影響を与える因子で、その水準は定義可能であるが、再現性を持たないもの。
- d) 補助因子。実験条件に影響を与える因子で、その水準は

再現性を持つが、事前には認知できないもの

e) 潜在因子 実験条件に傾向を持った影響を与えるが、認知不能なもの、あるいは見落としているもの、これは本来はあつてはならないものである、

f) 誤差、その変動が偶発的に思われるすべての因子の影響をまとめたもの、

ここでは制御因子、標示因子、ブロック因子の3種類について主として言及する、ただし最初に断っておくべきことは、この3つの区別は絶対的なものではなく、問題意識、状況に応じて変わるものであるという点である、例えばある種の農作物の収量と比較する実験において、最適な品種と肥料の組み合わせを求めるときに考えられるれば、品種も肥料もともに制御因子となるが、いろいろの理由から、たとえばある品種に対して最適な肥料を求めるときにすれば、品種は標示因子となる、またこのように実験が何か所かで行われる場合、ふつう場所が標示因子に考えられるが、もし最適地を探すべきことが実験の目的であるならば、それは制御因子となる、もう一つ注意すべきことは、上記の因子の区別は実験の場合においてではなく、現実の適用の場合と前提にして行われるべきである、すなわち標示因子には、一般に適用の場合において再現性があり、かつ制御不能なもの、ブロ

この因子と応用の場において両現性を持つたものを意味するのである。

すべての実験においては、かくとも一つの制御因子がふくまなければならない。そうでなければ実験を行う意味がない。しかしその他の因子の組み合わせについてはいろいろな可能性がある。その組み合わせの如何によって、モデルにも解析法にも差が出るはずである。

まずモデルについて考えよう。ここで因子水準はすべて離散的、反応は連続量に仮定しておく。

この場合因子効果について母数模型 (fixed-effect model) と変量模型 (random effect model) の二種類があることはよく知られている。しかし本来制御因子や標示因子についての効果を確率的な変量と仮定することは妥当でない。制御因子の効果を変量とすることは、概念上矛盾であるし、また標示因子においては、その効果が両現性のない確率変量であるわけではなく、それは本来ブロツク因子と考えなければならない。しかしこのように考えると、ブロツク因子の概念を、ふつうに理解されているより、やや拡大して解釈しなければならないことになる。というのは応用の場においては両現性がなく、制御もできていないが、実験の場においては両現性を持つている、

或いは制御可能であるような因子もあるが、このような場合
においては、実験の場では与えられた因子水準に、応用の場
における因子水準の集団からランダムに与えられたものである
と見なし得る限り、その効果を確率変数と見ることができ、
そうするとこのような因子は本来ブロック因子と見なすべき
ではあるが、実験の場のみに注目する限り標本因子と見るこ
とも可能であり、また実際にブロックと見なさんないこと
が多い。そうしてこの因子効果のばらつきの大きさを知ること
が重要な意味を持つ場合も少なくない。薬の効果の実験にお
ける動物や人間の個体差、測定における測定者による差などが
その例である。

そこで、実験の場においてもブロックと考えられ、その影
響は制御因子や標本因子の効果の推定に偏りをもたらすとい
う点でのみ関心の対象となる因子を、本来のブロック因子と
呼び、これに対して応用の場においては再現性を持たないが
実験の場においては再現性があり、かつそのばらつきの大き
さ自体が推定すべきものとなっているようなものは(かりに)
変動因子と呼ぶことにしよう。そうすると本来のブロック因
子の効果については母数模型と変量模型ともにも考慮するこ
とができるが、変動因子については本来変量模型を規定しな
ければならない。

また本来のブロッツク因子については、交互作用を規定することは無意味である。もしブロッツク因子に制御因子や標示因子との間に一定の交互作用があるとするれば、実験結果を応用の場に適用することができなくなる。因子効果の推定が無意味になってしまう。またブロッツク効果について変量模型を考えれば、交互作用を考えることも可能である。思われるかもしれないが、この場合にはブロッツク効果と主効果と交互作用に分解して考えることが無意味であって、これはおとめて、いわば「一応誤差」として理解するのが適当である。現実にはブロッツク因子と他因子との間に交互作用に当るものが存在する可能性もあるが、このような場合には割り付けのランダム化によって、これを誤差の中にふくめてしまうようにすることが必要である。

また2つ以上のブロッツク因子が存在する場合、すなわち2方以上の制約がある配置において、異なる因子相互間に交互作用があるれば、これは本来方向性を考えること自体が無意味であったことを意味する。

しかし上記のことはブロッツク因子と他因子との交互作用を検定すること、つねに無意味であるということの意味するものではない。ブロッツク設定の妥当性のチェックのため、このような検定が必要になる場合もある。

2 因子実験において、制御因子 $\times$ 制御因子の場合と、制御因子 $\times$ 標示因子の場合との最も大きな差は、前者は最適な水準の組み合わせを求めることが目標となるのに対して、後者では標示因子の各水準に対応して、制御因子の最適水準を求めることが問題となる点にある。そのことから、交互作用の意味の違いが生ずる。すなわち前者においては、交互作用が存在しないということは、制御因子のそれぞれの最適水準の組み合わせが、全体としての最適を与えるのに対して、後者では、制御因子の最適水準が標示因子の水準によって変化するということを意味する。従って前者においては、実際には2つの因子の最適な水準の組み合わせの周囲についての交互作用のみが重要な意味を持つものに対して、後者については標示因子の各水準に対して、最適な制御因子の水準の近くで交互作用が存在するかの否が重要である。

このようにことを考慮すれば、具体的な応用問題において単に交互作用の全体としての存在を検定するだけでは、実験結果の利用の目的に不十分であるといわなければならない、とくに両因子の水準数が多い場合には、交互作用の自由度が大きくなるから、統計的な、例之はF検定の検出力は、一般にはあまり大きくない、逆にまたF検定の結果が有意になっても、

交互作用が、最適水準と無関係な方向にのみ存在しているの
であれば、それは実質あまり意味がないかもしれない。交互
作用の全体としての有意性だけでなく、その方向を知ること
ことが大切である。

従って直観的な方法としては、まず交互作用項の推定値を、
水準の組み合わせに対応する観測値の平均から、2つの因子
の主効果の推定値に対応する項を引いた“残差”と見て、そ
れをプロットしてみる必要がある。くり返しのある
配置の場合には、更にこれと独立にその誤差標準偏差の推定
量が得られるから、それを基準にして各項の有意性を見る必
要がある。

いま X_{ijk} ($i=1, \dots, p$, $j=1, \dots, q$, $k=1, \dots, n$) を、因子の
(i, j) 水準に対応する k 番目の観測値としよう。これについ
てここでは最も簡単な加法モデル：

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

を仮定しておく。そうすると

$$\hat{\alpha}_i = \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...} \quad \hat{\beta}_j = \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...} \quad \hat{\gamma}_{ij} = \bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum \sum \sum (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2 / p q (n-1)$$

となることはいうまでもない。そうすると交互作用について
単に平方和 $\sum \sum \hat{\gamma}_{ij}^2$ だけでなく、その個々の項の大きさを見
る必要があり、その中で有意な大きさを示すのはどれとどれ

であることを知る必要がある。そのためには各 γ_j に対して、 γ_j の信頼区間の幅を示す必要がある。そのための簡単な方法は、各項毎に独立に求めらる信頼区間、すなわち t 分布を用いる、幅 $t_{\alpha} \hat{\sigma} / \sqrt{n(1-1/p)(1-1/g)}$ の区間と、すべての母数についての同時信頼区間、更にその最も簡単な方法として Scheffé の方式による幅 $\hat{\sigma} \sqrt{F_{\alpha} / \sqrt{n(1-1/p)(1-1/g)}}$ の区間、或いは $\sqrt{F_{\alpha}}$ をより精密な値でおきかえたものを、それぞれ与えることである。

具体的に、もし 2 つの因子がともに制御因子であれば、横軸に $\alpha_i + \beta_j$ を、縦軸に $\hat{\gamma}_{ij}$ を上記の幅をつけてプロットすることが必要である。一方が標示因子であれば各 j ごとに α_i の値に対応して $\hat{\gamma}_{ij}$ をプロットすればよい。

このような問題をより形式的に定義すれば、結局 γ_{ij} に関する多重決定問題と考えられるが、しかしここで $\sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0$ という条件があるから、それぞれを別個の母数として考えることはできない。さかのぼって考えれば

$$\mu_{ij} = E(X_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

とおくとき、母数

$$\delta(i_1, i_2, j_1, j_2) = \mu_{i_1 j_1} + \mu_{i_2 j_2} - \mu_{i_1 j_2} - \mu_{i_2 j_1}$$

を問題にすることになる。そしてこれらの $pC_2 \times gC_2$ 個の互いに独立でない母数の中で、どれとどれが有意に 0 と異な

るかを知らなければならない。そのためには、 $\delta(i_1, i_2, j_1, j_2)$ に対して、Schefféの方法による同時信頼区間を求め

$$\bar{X}_{i_1 j_1} + \bar{X}_{i_2 j_2} - \bar{X}_{i_1 j_2} - \bar{X}_{i_2 j_1} \pm \delta \sqrt{4 F_{\alpha} / n}$$

を求めて、 δ が0より小さい場合に、母平均が0と異なるものとする。このように解析の結果は、甚だこま入ったものになるから、 δ を簡単に表示することは難しいが、2因子がともに制御因子ならば、すべての (i_1, j_1) と (i_2, j_2) の組み合わせに対して上記の δ をプロットすることが必要である。これに対して一方が標示因子の場合には、むしろ j ごとに

$$\delta^*(i_1, i_2, j) = \frac{1}{g-1} \sum_{j_2 \neq j} \delta(i_1, i_2, j_1, j_2)$$

を定義し

$\delta^*(i_1, i_2, j)$ に対する同時信頼域を求めて、各 j ごとにすべての (i_1, i_2) の組み合わせに対して δ をプロットすればよい。

またもし問題をより形式的に考えて、母平均の最大と与える因子水準を定めることを定義すれば、問題は、2制御因子の場合には

$$\mu_{i^* j^*} = \max_{i, j} \mu_{ij}$$

となる (i^*, j^*) を求めること。1制御因子+1標示因子の場合

合には、各 j に対して

$$\mu_{i^*(j)}, j = \max_i \mu_{ij}$$

とたゞ $i^*(j)$ を求めることである。

この場合、交互作用の有無を考慮することは、結局前着について、

$$\bar{X}_{i^0 j^0} = \max_{i,j} \bar{X}_{ij}$$

とたゞ (i^0, j^0) と、

$$\bar{X}_{i^0 \cdot} = \max_i \bar{X}_{i \cdot} \quad \bar{X}_{\cdot j^0} = \max_j \bar{X}_{\cdot j}$$

とたゞ (i^0, j^0) のいずれをえらぶかという問題に 後着について、各 j ごとく一様に i^0 をえらぶか、

$$\bar{X}_{i^0 j^0} = \max_j \bar{X}_{i^0 j}$$

とたゞ $i^0(j)$ をえらぶかという問題にたゞ、やうしてこのようにしてえらばれた水準を $(\hat{i}^0, \hat{j}^0)$ 或いは $\hat{i}^0(j)$ と表すとき損失関数として、前着については $\mu_{i^0 j^0} - \mu_{\hat{i}^0 \hat{j}^0}$ を、後着については $\sum_j (\mu_{i^0(j) j} - \mu_{\hat{i}^0(j) j})$ をとれば決定問題として定式化することができる。この場合交互作用項についての F 検定にもとづいて、2つの可能な候補をえらぶという式は、明らかにあまりよい決定ルールではなさそうである、

いま 2 制御因子の場合について考えよう。このときは

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{X} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \phi(F) \hat{\gamma}_{ij}$$

$$\text{ただし } \phi(F) = 1 \quad F = \sum \hat{\gamma}_{ij}^2 / \hat{\sigma}^2 (p-1)(q-1) > F_\alpha$$

$$= 0 \quad F < F_{\alpha}$$

とおき、 $\hat{\mu}(i, j) = \max_{i, j} \hat{\mu}_{ij}$ とする (i^*, j^*) を選ぶことに帰着する。ここで多母数推定に関する Stein 推定量を思い起こせば、上記の $\hat{\mu}_{ij}$ の代りに、例えば $\nu = (p-1)(q-1)$ とし、

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{X}_{...} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \max\left(0, 1 - \frac{\nu-2}{F}\right) \hat{\gamma}_{ij}$$

とすることが考えられる。

1 標示因子をふくむ場合には $p \geq 4$ のとき

$$\hat{\alpha}(i, j) = \hat{\alpha}_i + \max\left(0, 1 - \frac{p-3}{F}\right) \hat{\gamma}_{ij}$$

として $\hat{\alpha}(i, j) = \max_{i, j} \hat{\alpha}(i, j)$ によって $\hat{i}^*(j)$ を選ぶべきなのである。

しかしこのような方法は、なお検定統計量としての F 値にもとづいたものであるという点で、疑問が残る。もっと別のルールも考えられるが、ここでは単にどのようなルールにおいても制御因子と標示因子の区別が重要であることを強調しておきたい。

上記のような問題は、もっと複雑な構造を持つ実験に関して、いろいろと考えられるであろう。そうして多くの場合、単に特定の要因効果を検定して、それが有意であればその効

果を推定するといふだけでは、データの解析として不十分であう、またその結論は必ずしも relevant でないであろう。実験の具体的な目的を明確にすると同時に、各因子の性質のいし種類を正しく認識し、それを推測の方式に結びつけることが必要である。