

CARISTI の不動点定理の拡張定理の別証明

九州工業大学・工学部 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. CARISTI の不動点定理

以下の定理は2つの名前を持つ。「Caristi の不動点定理」と呼ばれることが多いが、「Caristi & Kirk の不動点定理」と呼ばれることもある。

定理 1 (Caristi [4], Caristi & Kirk [5]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とし, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

この定理において, 不動点は唯一とは限らない. 実際, $f = 0$ とし, T を恒等写像とすれば, すべての点が T の不動点となる.

また, 定理 1 は Banach の縮小原理 [3] の一般化である. 実際, 以下のように, 定理 1 から Banach の縮小原理を簡単に導くことができる.

定理 2 (Banach [3]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像する. $r \in [0, 1)$ が存在して, すべての $x, y \in X$ について

$$d(Tx, Ty) \leq r d(x, y)$$

を満たすとする. このとき, T は不動点を唯一持つ.

証明. X から $[0, \infty)$ への連続関数 f を

$$f(x) = \frac{1}{1-r} d(x, Tx)$$

と定義する. このとき, すべての $x \in X$ について

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &= \frac{1}{1-r} d(x, Tx) - \frac{r}{1-r} d(x, Tx) \\ &\leq \frac{1}{1-r} d(x, Tx) - \frac{1}{1-r} d(Tx, T^2x) \\ &= f(x) - f(Tx). \end{aligned}$$

が成立する. よって, Caristi の不動点定理 (定理 1) より, T は不動点を持つ. 次に, $x, y \in X$ を T の不動点とすると,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq r d(x, y)$$

住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1 - 1 九州工業大学工学部数学教室

電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp

キーワード. Caristi の不動点定理, Banach の縮小原理, 距離完備性.

となる. もし $x \neq y$ とすると, $1 \leq r$ となり, $r \in [0, 1)$ に矛盾する. よって, 不動点は唯一である. $\square$

定理 1 の結論と距離完備性は同値であることが知られている.

定理 3 (Weston [12]). (X, d) を距離空間とする. このとき, 以下は同値である.

- (1) X は完備である;
- (2) 「すべての $x \in X$ について,

$$d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$$

を満たす X から $[0, \infty)$ への下半連続関数 f が存在する」という条件を満たすすべての X 上の写像 T が不動点を持つ.

筆者は, 定理 1 は完備距離空間上の不動点定理の中で最も重要な定理の 1 つであると考え. というのも, この定理は応用上重要な Ekeland の ε 変分原理 [7, 8] の変形である. また, 定理 3 のように, この定理の結論と距離完備性は同値である. つまり, 理論上も重要な定理となっている. そのため, 定理 1 は種々の拡張定理を持っている.

本稿では, 4 つの拡張定理に関して非常に簡潔な証明を与える. しかも, その証明では, 定理 1 のみを用いている. 定理 1 のみを用いて, 定理 1 の拡張定理を証明するのであるから, これらの拡張定理は「証明」という観点から見ると非常につまらない定理となるかもしれない. しかし, 筆者はそのようには考えていない. 数学の定理の価値は様々な観点から評価されるべきであり, これら 4 つの拡張定理は Caristi の不動点定理の興味深いヴァリエーションとして, 非常に価値があると考えている.

本稿は参考文献 [10, 11] の結果の簡略版であるが, 通常の論文とは異なり, 筆者の感覚的なコメントも記述している.

2. DOWNING & KIRK の定理

Downing と Kirk は以下の拡張定理を証明した.

定理 4 (Downing & Kirk [6]). (X, d_X) と (Y, d_Y) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. すべての $x \in X$ に対して,

$$\max \{d_X(x, Tx), c d_Y(\varphi x, \varphi \circ Tx)\} \leq f(\varphi x) - f(\varphi \circ Tx)$$

を満たす X から Y への閉写像 φ (グラフが $X \times Y$ の閉集合), $\varphi(X)$ から $[0, \infty)$ への下半連続関数 f および定数 $c > 0$ が存在すると仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

$X = Y$, $d_X = d_Y$, $c = 1$ とし, そして φ を恒等写像とすると, 定理 4 は定理 1 となる.

Downing と Kirk はこの定理を直接証明している. そのため, 筆者は, この定理における「 φ の閉性」の役割がよく分からなかった. 強すぎる条件なのか, それとも適度な条件なのか.

証明 ([10]). 距離関数の正数倍は距離関数であり, 完備の性質も変わらないので, $c = 1$ としても一般性を失わない. φ グラフを

$$Z = \text{Gr}(\varphi) = \{(x, \varphi x) : x \in X\} \subset X \times Y$$

と置く. φ は閉写像であるから, Z は閉集合, すなわち完備である. Z 上の距離を

$$d_Z((x, \varphi x), (y, \varphi y)) = \max \{d_X(x, y), d_Y(\varphi x, \varphi y)\}$$

で定義する. Z 上の写像 U および Z から $[0, \infty)$ への下半連続関数 g を

$$U(x, \varphi x) = (Tx, \varphi \circ Tx), \quad g(x, \varphi x) = f(\varphi x)$$

と定義する. このとき, 定理の仮定は「すべての $x \in X$ について

$$d_Z((x, \varphi x), U(x, \varphi x)) \leq g(x, \varphi x) - g(U(x, \varphi x))$$

が成立する」と表現できる. これは Caristi の不動点定理の仮定と同じ形であるから, U は不動点 $(x_0, \varphi x_0) \in Z$ を持つ. U の定義より $x_0 \in X$ は $Tx_0 = x_0$ を満たす. すなわち, T は不動点を持つ. $\square$

さて, 「 φ の閉性」に関する考察であるが,

- 「 φ の閉性」は Z の完備性に直結している;
- Caristi の不動点定理は距離完備性と関係がある (定理 3);
- f, T から自然に g, U を定義している.

の 3 点をふまえ, 「 φ の閉性」という条件は適度な条件であると筆者は判断している.

3. BAE らによる拡張定理

この節では, Bae [1] と Bae, Cho, Yeom [2] で証明されている拡張定理の別証明を与える. そのための準備として, 以下の定理を証明する.

定理 5 (Suzuki [11]). (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数, α を X から $[0, \infty)$ への関数, そして $\eta > 0$ とする.

$$(1) \quad d(x, Tx) \leq \alpha(x) (f(x) - f(Tx))$$

がすべての $x \in X$ について成立すること, および

$$(2) \quad \sup \{ \alpha(x) : f(x) \leq \inf f(X) + \eta \} < \infty$$

を仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

α を恒等的に 1 となる関数とすると, 条件 (2) は自動的に成立するので, この定理は Caristi の定理になる. したがって, この定理は Caristi の定理の拡張定理である.

証明. $\alpha(x) > 0$ の場合, 条件 (1) より $f(Tx) \leq f(x)$ が言える. また, $\alpha(x) = 0$ の場合, 再び条件 (1) より $Tx = x$ が言える. つまり, $f(Tx) = f(x)$ である. したがって, $f(Tx) \leq f(x)$ がすべての $x \in X$ で成立する.

$$Y = \{x \in X : f(x) \leq \inf f(X) + \eta\},$$

$$\gamma = \sup \alpha(Y) < \infty$$

と置くと, 明らかに Y は空集合ではなく, そして f の下半連続性から完備である. また, 上記の考察から $TY \subset Y$ であることも分かる. すべての Y の元 x について,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq \alpha(x) (f(x) - f(Tx)) \\ &\leq \gamma (f(x) - f(Tx)) \\ &= \gamma f(x) - \gamma f(Tx) \end{aligned}$$

が言えるが, $x \mapsto \gamma f(x)$ が下半連続であることに注意すると, $(Y, T, \gamma f)$ は Caristi の不動点定理の仮定を満たしている. 従って, T は不動点 $x_0 \in Y \subset X$ を持つ. $\square$

「この定理は Caristi の定理の拡張定理である」と先ほど述べたが, 上の非常に簡潔な証明から分かる通り, 「この定理は Caristi の定理の 1 つの形態である」という方が正確であろう.

さて, この定理 — 実質的に Caristi の不動点定理 — を用いて [1, 2] の結果に対する別証明を与えよう.

定理 6 (Bae, Cho & Yeom [2]). (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数, c を $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数で右から上半連続な関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$d(x, Tx) \leq \max \{c(f(x)), c(f(Tx))\} (f(x) - f(Tx))$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

c を恒等的に 1 となる関数とすると, この定理は Caristi の定理になる. したがって, この定理は Caristi の定理の拡張定理である.

証明 ([11]). X から $[0, \infty)$ への関数 α を

$$\alpha(x) = \max \{c(f(x)), c(f(Tx))\}$$

と定義する. $t_0 = \inf f(X)$ と置き, $\gamma > c(t_0)$ を固定する. このとき, c の右からの上半連続性より, すべての $t \in [t_0, t_0 + \eta]$ に対して $c(t) \leq \gamma$ を満たす $\eta > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} Y &= \{x \in X : f(x) \leq t_0 + \eta\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in [t_0, t_0 + \eta]\} \end{aligned}$$

と置くと, 定理 5 での考察により, $TY \subset Y$ である. よって, $\alpha(x) \leq \gamma$ がすべての $x \in Y$ で成立する. 従って,

$$\sup \alpha(Y) \leq \gamma < \infty$$

である. 定理 5 から, T は不動点を持つ. $\square$

次の定理も c を恒等的に 1 となる関数とすると, Caristi の定理になる.

定理 7 (Bae [1]). (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数, c を $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への非減少関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$d(x, Tx) \leq c(f(x)) (f(x) - f(Tx))$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

証明 ([11]). X から $[0, \infty)$ への関数 α を

$$\alpha(x) = c(f(x))$$

と定義する. このとき,

$$\begin{aligned} & \sup \{ \alpha(x) : f(x) \leq \inf f(X) + 1 \} \\ & \leq c(\inf f(X) + 1) \\ & < \infty \end{aligned}$$

が成立する. よって, 定理 5 から, T は不動点を持つ. $\square$

次の拡張定理も, c を恒等的に 1 となる関数とすると, Caristi の定理になる. なぜなら, このとき (3) の 2 番目の条件から最初の条件が成立する.

定理 8 (Bae [1]). (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数, c を $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への上半連続関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$(3) \quad d(x, Tx) \leq f(x) \quad \text{と} \quad d(x, Tx) \leq c(d(x, Tx)) (f(x) - f(Tx))$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

証明 ([11]). X から $[0, \infty)$ への関数 α を

$$\alpha(x) = c(d(x, Tx))$$

と定義する.

$$Y = \{ x \in X : f(x) \leq \inf f(X) + 1 \}$$

と置く. このとき, すべての Y の元 x に対して,

$$\begin{aligned} \alpha(x) & \leq \max \{ c(t) : 0 \leq t \leq d(x, Tx) \} \\ & \leq \max \{ c(t) : 0 \leq t \leq f(x) \} \\ & \leq \max \{ c(t) : 0 \leq t \leq \inf f(X) + 1 \} \end{aligned}$$

が成立する. c の上半連続性から, $\sup$ が $\max$ となることに注意する. 右辺が x と無関係なことから,

$$\sup \alpha(Y) \leq \max \{ c(t) : 0 \leq t \leq \inf f(X) + 1 \} < \infty$$

が言える. よって, 定理 5 から, T は不動点を持つ. $\square$

4. 最後に

文献 [10, 11] では別証明だけでなく, τ -distance という概念を用いて, 定理 4–8 をさらに一般化している. この一般化定理は Caristi の定理から直接証明することはできないが, τ -distance 版の Caristi の定理から簡単に証明できる.

最後に, τ -distance 版の Caristi の定理 — これも 1 つの拡張定理である — を記述して, この稿を終えたい.

定理 9 ([9]). X を完備距離空間, p を X 上の τ -distance, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$p(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

参考文献

- [1] J. S. Bae, “Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps”, J. Math. Anal. Appl., **284** (2003), 690–697.
- [2] J. S. Bae, E. W. Cho and S. H. Yeom, “A generalization of the Caristi-Kirk fixed point theorem and its applications to mapping theorems”, J. Korean Math. Soc., **31** (1994), 29–48.
- [3] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.
- [4] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, Trans. Amer. Math. Soc., **215** (1976), 241–251.
- [5] J. Caristi and W. A. Kirk, “Geometric fixed point theory and inwardness conditions”, Lecture Notes in Math., Vol. 490, pp. 74–83, Springer, Berlin, 1975.
- [6] D. Downing and W. A. Kirk, “A generalization of Caristi’s theorem with applications to nonlinear mapping theory”, Pacific J. Math., **69** (1977), 339–346.
- [7] I. Ekeland, “On the variational principle”, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353.
- [8] I. Ekeland, “Nonconvex minimization problems”, Bull. Amer. Math. Soc., **1** (1979), 443–474.
- [9] T. Suzuki, “Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces”, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458.
- [10] T. Suzuki, “On Downing-Kirk’s theorem”, J. Math. Anal. Appl., **286** (2003), 453–458.
- [11] T. Suzuki, “Generalized Caristi’s fixed point theorems by Bae and others”, to appear in J. Math. Anal. Appl.
- [12] J. D. Weston, “A characterization of metric completeness”, Proc. Amer. Math. Soc., **64** (1977), 186–188.