

微分方程式系におけるカオス変調による間欠性

九州工大工 山田知司、鹿児島大理 藤坂博一

カオスへの転移の機構として"Intermittency"（間欠性）が重要な役割をしていることは良く知られている。いわゆる"Pomeau-Manneville Intermittency"は周期状態からカオス状態への転移に伴って出現する。この間欠状態は、周期状態を反映した長い"laminar"状態と、それらの状態の間に入り込んだ短い"burst"状態との繰り返しからなっている。この間欠状態への転移に於ては、最大リヤプノフ数が負から正に変わる。一方、我々は間欠状態が、カオスーカオス転移に於ても出現していることを見つけた。この間欠状態への転移の場合、第二最大リヤプノフ数がその符号を変える。これらの間欠性は、いずれにせよ、適切な力学変数を選ぶことによって観測される。

ここでは、カオスーカオス転移に伴う間欠性を考察する。写像を用いた議論は既に報告しているので、ここでは、微分方程式系を考察する。典型的なカオスーカオス転移を示す系として、次の二つの系が考えられる：

(1) Modulation Type

$$\begin{aligned} dr/dt &= F(r, x; t), & F(0, x; t) &= 0 \\ dx/dt &= G(x, t) & : \text{chaotic} \end{aligned} \quad (1)$$

(2) Coupled Chaos Type

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= F(x_1; t) + (D/2)(x_2 - x_1) \\ dx_2/dt &= F(x_2; t) + (D/2)(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$dx/dt = F(x; t) : \text{chaotic}$$

以下では、(2)の Coupled Chaos Type について述べる。(2)において次の変数変換を行う：

$$x_0 = (x_1 + x_2)/2, \quad v = (x_1 - x_2)/2 \quad (3)$$

すると、(2)は次のようになる：

$$dx_0/dt = F(x_0; t) + O(v^2) \quad (4)$$

$$dv/dt = \{G(t) - D\} \cdot v + O(v^3)$$

$$G(t) = (\partial F / \partial x)_{x_0}$$

(4)において、 $v(t)$ について線形の範囲で形式的に解くと、

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp\left[\int_0^t \{G(s) - D\} ds\right] \cdot v(0) \\ &= R(t) \cdot \exp(-Dt) \cdot v(0) \end{aligned} \quad (5)$$

$$R(t) = \exp\left[\int_0^t G(s) ds\right]$$

行列 $(1/t) \log R(t)$, $(t \rightarrow \infty)$, の固有値が非結合系のカオス状態のリヤブノフ数スペクトラムになっている。従って、 $t \gg 1$ の場合にはカオス状態の最大リヤブノフ数を λ_L と置くと

$$R(t) \sim \exp(\lambda_L - D)t$$

となる。従って、 $v(t)$ の絶対値を $r(t) = |v(t)|$ とすると、 $D > \lambda_L$ に対しては、 $t \rightarrow \infty$ とすると、 $r(t) \rightarrow 0$ となる。即ち、このときは、 $x_1 = x_2$ (synchronized state) が実現していることになる。一方、 $D < \lambda_L$ に対しては、大きな t において、 $r(t) \neq 0$ の状態が出現する。このカオスーカオスの転移は、結合係数 D を変えていくと $D = \lambda_L$ で生ずる。(5)より、大きな t に対しては

$$(dr/dt)/r \cong \Delta \equiv \lambda_{L-D} \quad (6)$$

としてよいが、 $\Delta > 0$ に対しては、非線形項が重要になる。また、時間尺度 ~ 1 程度の揺らぎ $f(t)$ を考慮して、(6) は次ぎのようになる：

$$(dr/dt)/r = \Delta - \beta r^2 + f(t) \quad (7)$$

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2\gamma \delta(t-t')$$

(7) は、Multiplicative Noise Model の方程式になっている。

我々は、具体的なモデルとして、Coupled Brusselator Modelを採用して simulation を実行した。このモデルでは、実際に、結合係数 D のある値で間欠的状态が、力学変数 r に現れる。また、Multiplicative Noise Model から予想されることであるが、転移点の近傍で力学変数 r の分布 $P(r)$ は次のようなべき則を持つことが確かめられる：

$$P(r) \sim r^{-1+\alpha} \quad (8)$$

カオス—カオス転移点近傍では、その他、種々のスケーリング則の成立することも示唆されているので、これらについても微分方程式系において確かめる必要がある。

参考文献

- (1) T. Yamada and H. Fujisaka, Progr. Theor. Phys. 76 (1986), 582.
- (2) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Rev. A25 (1982), 1731.
- (3) T. Yamane, T. Yamada and H. Fujisaka, Progr. Theor. Phys. 80 (1988), 588