

氏 名	内 山 淳 うち やま じゅん
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 374 号
学位授与の日付	昭 和 47 年 1 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	Finiteness of the number of discrete eigenvalues of the Schrödinger operator for a three particle system (3 粒子系に対するシュレーディンガー作用素の離散固有値の個数の有限性)

(主 査)
論文調査委員 教授 溝 畑 茂 教授 吉 沢 尚 明 教授 松 浦 重 成

論 文 内 容 の 要 旨

非相対論的量子力学における多体問題は種々の解法が試みられており、とくに実的なとり扱いには種々の近似解法が用いられている。しかしこの場合の数学的構造、すなわち Schrödinger 作用素のスペクトル構造の研究は困難であって、未だ満足すべき結果には達していないといえる。

数学的には Schrödinger 作用素は、ある Hilbert 空間の自己共役作用素であることが必要であり、この事実に関する基礎的に考察は Kato, Ikebe, Jörgens らによって行なわれた。

多粒子系の離散スペクトルに関しては、Kato (1951), Žislin (1960) 等の研究がある。Kato はヘリウム原子の離散固有値が無数であることを数学的に証明した。ついで Žislin はこの結果が一般な多粒子系にまでなりたつたことを示した。申請者はこの結果を参考論文 [3] でさらに拡張した。

Schrödinger 作用素を

$$H = - \sum_{i=1}^N \Delta_i + \sum_{k=1}^N q_k(r_k) + \sum_{h < k} P_{hk}(r_h, r_k)$$

としよう。ここで Δ_i は r_i 空間でのラプラシアンであり、 P_{hk} は粒子間に働く力の相互ポテンシャルである。 q_k, P_{hk} の間のある仮定のもとで、ある負の数 μ (臨界値) があって、 $[\mu, +\infty]$ は H の本質的スペクトル—粗くいって連続スペクトル—であり、 μ より小さい所ではすべて離散スペクトルしかないことが参考論文 [3] で示されている。

申請者の主論文は $N=2$ (3 粒子系) の場合に限って、離散スペクトルの状態がポテンシャル函数、 q_1, q_2, P のどのような定量的、定性的性質から決定されるかを精密に考察している。その応用例として、

$$q_i = -\frac{Z}{r_i} \quad (i=1, 2), \quad P = \frac{1}{r_{12}}$$

の場合がのべられている。とくに $0 < Z < 1$ の場合には、臨界値 $\mu(>0)$ 以下の固有値は高々有限個であることがしう。

申請者はさらに参考論文 [1], [2], [5] において主論文の結果を補充拡張している。

$$q_i = -\frac{Z_i}{r_i} \quad (i=1,2), \quad P = \frac{Z_3}{r_{12}}$$

において、電荷パラメータを導入し、固有値の有限性に関する種々の十分条件をえている。この結果として、水素負イオンの離散スペクトルの存在が厳密に証明されている。このことは主論文で開発された手法や考えが大層秀れたものであることを示している。

論文審査の結果の要旨

申請者の研究はその手法において $\check{Z}$ islin の上に立っているといえよう。 $\check{Z}$ islin の結果は、

$$H = -\sum_{i=1}^N A_i - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{r_k} + \sum_{\substack{kh \\ k < h}} \frac{c_{kh}}{|r_n - r_h|}$$

としたとき、条件

$$(*) \quad b_k > \sum_h c_{kh} \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

のもとでは、無限個の離散固有値が存在するというものである。しかし例えば水素負イオンの場合は、

$$H = -A_1 - A_2 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{|r_1 - r_2|}$$

となり、うえの仮定(*)はみたされない。

申請者は(*)がみたされない場合について考察し、離散スペクトルの存在ならびにその個数の有限性、無限性に関して興味ある結果をえている。

申請者の手法をみると、複雑なポテンシャル場の状態を深く分析し、一連のエネルギー不等式を巧みに組み合わせることによって、離散スペクトルの存在ならびに有限性を証明している。これに成功した1つの原因として、一応物理的な条件を離れてポテンシャル函数の性質に対し、定量的、定性的な仮定をおいて考察したことが挙げられるであろう。さらに、開発された手法や考えは一般な多粒子系に対する離散スペクトルの構造解明にも有効であると思われる。

以上を総合すれば、申請者の主論文は参考論文と合わせて、 $\check{Z}$ islin の考えや手法を飛躍的に発展させたものであり、申請者の解析能力が秀れているものであることを示している。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。