

Confidence intervals for the difference of means based on two independent samples

筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1. はじめに

2 標本問題において, 想定された 2 つの分布の平均の差の信頼区間を求めることは重要であるが, 有名な Behrens-Fisher 型の問題のようにその解決は必ずしも容易ではない場合もある (Lehmann [Le86], Linnik [Li68], Shibata [S81], Weerahandi [W95]). 本論では, 指数分布の場合, ガンマ分布の場合, そして Behrens-Fisher 型の問題において, 2 つの分布の平均の差の信頼区間を 2 標本に基づいて構成する方法について提案する.

2. 指数分布, ガンマ分布の場合

確率変数 X_1, X_2 がたがいに独立で, 各 $i = 1, 2$ について X_i は密度

$$f_{X_i}(x, \theta_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i} e^{-x/\theta_i} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布 $Exp(\theta_i)$ に従うとする. ただし $\theta_i > 0$ ($i = 1, 2$) とする. このとき X_i の平均, 分散はそれぞれ $E_{\theta_i}(X_i) = \theta_i$, $V_{\theta_i}(X_i) = \theta_i^2$ ($i = 1, 2$) になる. そこで, 2 つの指数分布 $Exp(\theta_i)$ ($i = 1, 2$) の平均の差 $\theta_1 - \theta_2$ の信頼区間を求めよう. まず, 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して

$$P_{\theta_1, \theta_2} \{b(X_1, X_2) \leq \theta_1 - \theta_2 \leq a(X_1, X_2)\} \geq 1 - \alpha$$

とする. このとき $b(x_1, x_2) = -a(x_2, x_1)$ a.e. とすると

$$P_{\theta_1, \theta_2} \{a(X_1, X_2) < \theta_1 - \theta_2\} + P_{\theta_1, \theta_2} \{a(X_2, X_1) < \theta_2 - \theta_1\} \leq \alpha \quad (2.1)$$

になる. 各 i について $Y_i = X_i / \theta_i$ とおくと, Y_1, Y_2 はたがいに独立にいずれも密度

$$f_{Y_i}(y, \theta) = \begin{cases} e^{-y} & (y \geq 0), \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布 $Exp(1)$ に従う. このとき (2.1) から

$$P_{\theta_1, \theta_2} \{a(\theta_1 Y_1, \theta_2 Y_2) < \theta_1 - \theta_2\} + P_{\theta_1, \theta_2} \{a(\theta_2 Y_2, \theta_1 Y_1) < \theta_2 - \theta_1\} \leq \alpha \quad (2.2)$$

になる. いま, 任意の x_1, x_2 に対して

$$a(x_1, x_2) = x_1 \tilde{a} \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2} \right)$$

とする. そのとき

$$P_{\theta_1, \theta_2} \{a(\theta_1 Y_1, \theta_2 Y_2) < \theta_1 - \theta_2\} = P_{\theta_1, \theta_2} \left\{ \theta_1 Y_1 \tilde{a} \left(\frac{\frac{\theta_1 Y_1}{Y_1 + Y_2}}{\frac{\theta_1 Y_1}{Y_1 + Y_2} + \frac{\theta_2 Y_2}{Y_1 + Y_2}} \right) < \theta_1 - \theta_2 \right\} \quad (2.3)$$

となる. ここで $U := Y_1 / (Y_1 + Y_2)$, $Z := Y_1 + Y_2$ とおくと, U と Z はたがいに独立で, U は一様分布 $U(0, 1)$ に従い, Z は密度

$$f_Z(z) = \begin{cases} ze^{-z} & (z \geq 0), \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

をもつガンマ分布 $\Gamma(1, 1)$ に従う. (2.3) から

$$\begin{aligned} P_{\theta_1, \theta_2} \{a(\theta_1 Y_1, \theta_2 Y_2) < \theta_1 - \theta_2\} &= P_{\theta_1, \theta_2} \left\{ \theta_1 U Z \tilde{a} \left(\frac{\theta_1 U}{\theta_1 U + \theta_2 (1 - U)} \right) < \theta_1 - \theta_2 \right\} \\ &= P_\delta \left\{ U Z \tilde{a} \left(\frac{U}{U + \delta(1 - U)} \right) < 1 - \delta \right\} \\ &= E_\delta \left[F_Z \left(\frac{1 - \delta}{U \tilde{a} \left(\frac{U}{U + \delta(1 - U)} \right)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

になる. ただし $\delta := \theta_2 / \theta_1$ で $F_Z(\cdot)$ は Z の分布関数, すなわち

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - (1 + z)e^{-z} & (z \geq 0), \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

とする. また同様にして

$$P_{\theta_1, \theta_2} \{a(\theta_2 Y_2, \theta_1 Y_1) < \theta_2 - \theta_1\} = E_\delta \left[F_Z \left(\frac{1 - \frac{1}{\delta}}{U \tilde{a} \left(\frac{U}{U + \frac{1}{\delta}(1 - U)} \right)} \right) \right] \quad (2.5)$$

となる. よって (2.2), (2.4), (2.5) から

$$p(\delta) := E_\delta \left[F_Z \left(\frac{1 - \delta}{U \tilde{a} \left(\frac{U}{U + \delta(1 - U)} \right)} \right) \right] + E_\delta \left[F_Z \left(\frac{1 - \frac{1}{\delta}}{U \tilde{a} \left(\frac{U}{U + \frac{1}{\delta}(1 - U)} \right)} \right) \right] \leq \alpha \quad (2.6)$$

になる。そこで、 δ について一様に (2.6) を満たす $\tilde{a}(\cdot)$ を用いれば

$$P_{\theta_1, \theta_2} \{-a(X_2, X_1) \leq \theta_1 - \theta_2 \leq a(X_1, X_2)\} \geq 1 - \alpha$$

より、 $\theta_1 - \theta_2$ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間 $[-a(X_2, X_1), a(X_1, X_2)]$ が得られる。ただし $a(x_1, x_2) = x_1 \tilde{a}(x_1 / (x_1 + x_2))$ とする。

一方、 $\theta_2 = 0$ のとき (2.2) の等号が成り立つためには、 $\tilde{a}(1) = -1 / \log(1 - \alpha)$ になる。いま

$$\tilde{a}(z) = \frac{cz}{1 + d(1 - z)} \quad (0 \leq z \leq 1)$$

の型の関数 $\tilde{a}(\cdot)$ をとると、 $\tilde{a}(1) = c = -1 / \log(1 - \alpha)$ になる。ここで $\alpha = 0.05$ として、 δ について一様に (2.6) を満たす d を求めると $d = -0.9$ になる。このとき

$$a(x_1, x_2) = \frac{c_0 x_1^2}{x_1 + 0.1 x_2}$$

になる。ただし $c_0 = -1 / \log 0.95$ とする。

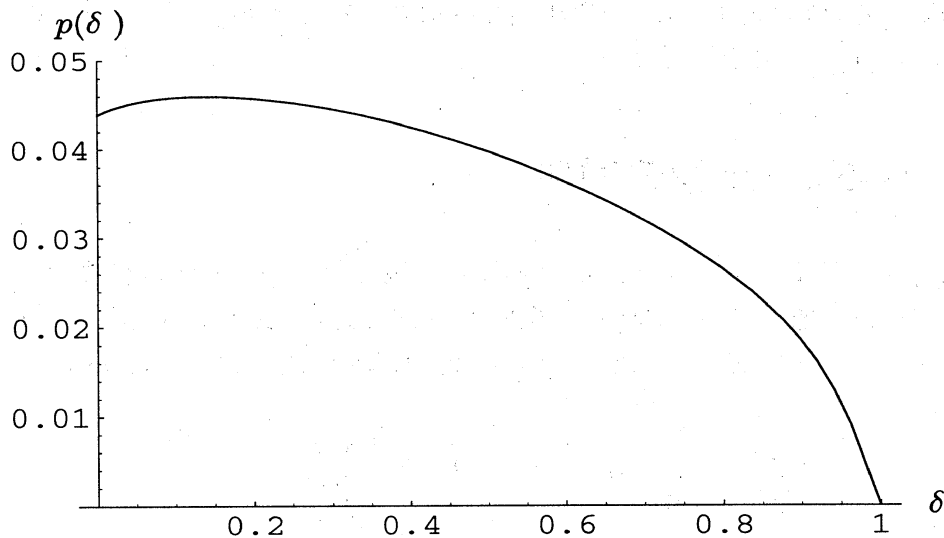


図 1: $\alpha = 0.05$, $d = -0.9$ のときの $a(x_1, x_2) = c_0 x_1^2 / (x_1 + 0.1 x_2)$ の場合に、(2.6) の左辺を δ の関数 $p(\delta)$ と見たときのグラフ

次に、確率変数 X_1, X_2 がたがいに独立で、各 $i = 1, 2$ について X_i は密度

$$f_{X_i}(x, \theta_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x/\theta_i} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつガンマ分布 $\Gamma(n, \theta_i)$ に従うとする. ただし $\theta_i > 0$ ($i = 1, 2$) で $n > 0$ とする. このとき, X_i の平均, 分散はそれぞれ $E_{\theta_i}(X_i) = n\theta_i$, $V_{\theta_i}(X_i) = n\theta_i^2$ ($i = 1, 2$) になる. そこで, 2つのガンマ分布 $\Gamma(n, \theta_i)$ ($i = 1, 2$) の平均の差 $n(\theta_1 - \theta_2)$ の信頼区間を求める. 指数分布の場合と同様にして, 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して

$$E_{\delta} \left[F_Z \left(\frac{n(1-\delta)}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\delta(1-U)}\right)} \right) \right] + E_{\delta} \left[F_Z \left(\frac{n\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\frac{1}{\delta}(1-U)}\right)} \right) \right] \leq \alpha$$

を, δ について一様に満たす $\tilde{a}(\cdot)$ を求めればよい. ただし任意の x_1, x_2 について $a(x_1, x_2) = x_1\tilde{a}(x_1/(x_1+x_2))$ とし, $\delta = \theta_2/\theta_1$ とし, また U は密度

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{B(n,n)} u^{n-1} (1-u)^{n-1} & (0 < u < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつベータ分布 $Be(n, n)$ に従う確率変数で, $F_Z(\cdot)$ はガンマ分布 $\Gamma(2n, 1)$ に従う確率変数 Z の分布関数とする. そのような $\tilde{a}(\cdot)$ を用いれば

$$P_{\theta_1, \theta_2} \{ -a(X_2, X_1) \leq n(\theta_1 - \theta_2) \leq a(X_1, X_2) \} \geq 1 - \alpha$$

より, $n(\theta_1 - \theta_2)$ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間 $[-a(X_2, X_1), a(X_1, X_2)]$ が得られる. ただし $a(x_1, x_2) = x_1\tilde{a}(x_1/(x_1+x_2))$ とする.

3. Behrens-Fisher 型の問題

確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は互いに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ に従うとし, 確率変数 $Y_1, \dots, Y_n$ も互いに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ に従うとする. ただし $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ は未知とする. また $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ も互いに独立とする. いま

$$\begin{aligned} \bar{X} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, & \bar{Y} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \\ S_x^2 &:= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, & S_y^2 &:= \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \end{aligned}$$

とおくと, $(\bar{X}, \bar{Y}, S_x^2, S_y^2)$ は $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2)$ に対して十分統計量になる. そして $S_x^2/\sigma_x^2, S_y^2/\sigma_y^2$ はいずれも自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従うことは知られている. このとき 2つの正規分布の平均の差 $\mu_x - \mu_y$ の信頼区間を求める. これは Behrens-Fisher 型の問題として見なせる.

任意の $\alpha (0 < \alpha < 1)$ に対して

$$P \{ h(S_x^2, S_y^2) \leq \bar{Y} - \mu_y - (\bar{X} - \mu_x) \leq g(S_x^2, S_y^2) \} \geq 1 - \alpha \quad (3.1)$$

とする. ここで $h(x, y) = -g(y, x)$ a.e. であると仮定する. また任意の定数 c に対して $g(c^2x, c^2y) = cg(x, y)$ であるとし,

$$W_x := \frac{S_x^2}{\sigma_x^2}, \quad W_y := \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

とおく. このとき, (3.1) より

$$P \{ -g(\sigma_y^2 W_y, \sigma_x^2 W_x) \leq \bar{Y} - \mu_y - (\bar{X} - \mu_x) \leq g(\sigma_x^2 W_x, \sigma_y^2 W_y) \} \geq 1 - \alpha$$

となるから

$$\begin{aligned} & E \left[\Phi \left(\sqrt{W_x + W_y} g \left(\frac{n\delta W_x}{W_x + W_y}, \frac{n(1-\delta)W_y}{W_x + W_y} \right) \right) \right] \\ & + E \left[\Phi \left(\sqrt{W_x + W_y} g \left(\frac{n(1-\delta)W_y}{W_x + W_y}, \frac{n\delta W_x}{W_x + W_y} \right) \right) \right] \geq 2 - \alpha \end{aligned} \quad (3.2)$$

になる. ただし $\Phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の分布関数とし, $\delta = \sigma_x^2 / (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ とする. ここで $F_T(\cdot)$ を自由度 $2n - 2$ の t 分布の分布関数とすれば, (3.2) より

$$\begin{aligned} q(\delta) &= E [F_T(\sqrt{2n-2} g(n\delta B, n(1-\delta)(1-B)))] \\ &+ E [F_T(\sqrt{2n-2} g(n(1-\delta)(1-B), n\delta B))] \geq 2 - \alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

になる. ただし, B はベータ分布 $Be((n-1)/2, (n-1)/2)$ に従う確率変数とする. このとき, 任意の $x > 0, y > 0$ に対して

$$g(x, y) = \sqrt{x+y} \tilde{g} \left(\frac{x}{x+y} \right)$$

とする. いま $\tilde{g}(\cdot)$ として, 次の型の関数

$$\tilde{g}(z) = a(z-b)^2 + c \quad (0 \leq z \leq 1)$$

を考える. ただし $a \geq 0, 0 < b < 1$ とする. そこで, δ について一様に (3.3) を満たすように a, b, c を求めれば, (3.1) より

$$P \{ -g(S_y^2, S_x^2) + \bar{X} - \bar{Y} \leq \mu_x - \mu_y \leq g(S_x^2, S_y^2) + \bar{X} - \bar{Y} \} \geq 1 - \alpha$$

となるから, $\mu_x - \mu_y$ の信頼区間 $[-g(S_y^2, S_x^2) + \bar{X} - \bar{Y}, g(S_x^2, S_y^2) + \bar{X} - \bar{Y}]$ が得られる. ただし $g(x, y) = \sqrt{x+y} \tilde{g}(x/(x+y))$ とする.

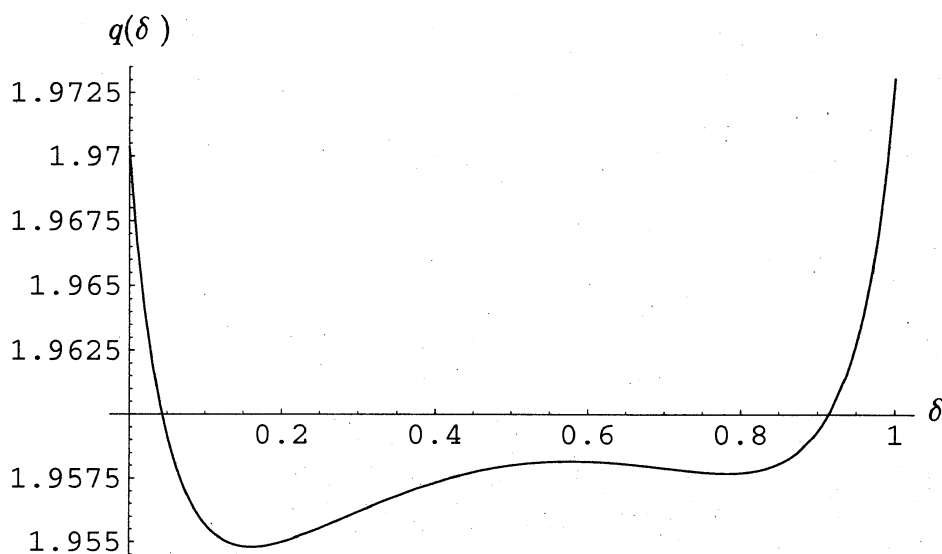


図 2: $\alpha = 0.05$, $n = 5$ のとき, $a = 1$, $b = c = 1/2$ の場合に (3.3) の左辺を δ の関数 $q(\delta)$ としたときのグラフ

参考文献

- [Le86] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses* (2nd ed.), Wiley, New York.
- [Li68] Linnik, Y. (1968). *Statistical Problems with Nuisance Parameters*. Translation of Mathematical Monograph **20**, American Mathematical Society, New York.
- [S81] Shibata, Y. (1981). *Normal Distributions*. (In Japanese). Tokyo Univ. Press, Tokyo.
- [W95] Weerahandi, S. (1995). *Exact Statistical Methods for Data Analysis*. Springer, New York.