

Linear Extremal Problems

茨城大 理 林 実樹広

次のように記号を定めておく:

D : ある Riemann 面上の subdomain

u : D 上の実調和函数

$d\alpha$: D 上にコンパクトな台を持つ複素測度

$\mathcal{G} := \{g: D \text{ 上正則で } |ge^{-u}| \leq 1 \text{ on } D\}$

本講では

$$(1) \quad \left| \int G d\alpha \right| = \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \int g d\alpha \right|$$

を満たす函数 $G \in \mathcal{G}$ (extremal 函数という) の一意性について考察する. G が extremal 函数なら $e^{i\theta} G$ もそうであるから, $\int G d\alpha \geq 0$ となる extremal 函数が一意に定まるかどうかを論ずればよい. 更に (1) の値がゼロのときは, $\mathcal{G}$ に属する函数はすべて extremal となるから, この場合は除外して考えるこ

とに可る。すなわち

$$(2) \quad \int G \, d\alpha > 0$$

を満す可る。

N は Riemann 面 R 上の集合として、各点 $p \in N$ のまわりに局所座標 $U = \{|z| < 1\}$ がとれて、 $U \setminus N$ 上の有界正則函数 (resp., 有界調和函数) が U で正則 (resp., 調和) に延長されるとき $N \in N_{AB}$ (resp., $N \in N_{HB}$) と書くことに可る。これは N が局所的に analytic capacity (resp., logarithmic capacity) が 0 の集合であるとい、てもいいでしょう。

D が平面領域のときは次の事実が知られている。

定理 (Hejhal [5], Gamelin [3]) D が有界平面領域とする。測度 μ の台を含むコンパクト集合 K があって、 $D \setminus K$ の連結成分を $V_1, \dots, V_t$ と可るとき、各成分について

$$\partial V_j \cap \partial D \not\subset N_{AB} \setminus N_{HB}$$

が成り立つならば、(1), (2) を満す extremal 函数は一意である。

Hejhal の例によりこの定理は些条件には一般の Riemann 面に拡張されないことが知られている。以下では上の定理が成立するような Riemann 面について考察する。

なお D の種数が有限のとこは吹田先生等 ([6]) にあて、て別な手法にあて、ても研究されておる。

§1 Gamelin にあての証明法にあて ここでは Gamelin [2, 3] にあて、て extremal 函数の一意性にあての十分条件を補題とてあてあてる。

まず D 上の有界連続函数から線型空間を

$$B = \{ g e^{-\psi} : g \text{ は } D \text{ で正則, } g e^{-\psi} \text{ は } D \text{ 上有界} \}$$

で定義する。更に

$$\Lambda(h) = \int h e^{-\psi} d\alpha \quad (h \in B)$$

とあてれば、 Λ は B 上の線型汎函数を定義する。明らかに、

$G \in \mathcal{G}$ が (1) と (2) を満すというこは $H = G e^{-\psi} \in B$ が

$$(3) \quad |H| \leq 1 \text{ on } D, \quad \Lambda(H) = \|\Lambda\| > 0$$

を満すことと同値にあて、ていする。よて (3) を満す函数 $H \in B$ の一意性を見ればよい。

そこで D の Stone-Čech コンパクト化 $\beta(D)$ をあて、 $\beta(D)$ の閉集合で

$$(4) \quad \|h\|_{\beta(D)} = \|h\|_{\Gamma} \quad (\forall h \in B)$$

を満すものをあてる。ここでノルム $\|\cdot\|_E$ は集合 E 上の sup-norm をあてわすものとしする。(例えは $\Gamma = \beta(D) \setminus D$ とあてると $|h|$ ($h \in B$) は D 上有界な subharmonic 函数であ

るから、最大値の原理により (4) が成立する。しかし実際にはこれよりも少し小さく Γ を取る必要があるため、正確な Γ の形は後で決める)。このとき Γ 上に台をもつ測度 $d\mu$ で

$$(5) \quad \|d\mu\| = \|\Lambda\|$$

$$\Lambda(h) = \int h d\mu \quad (h \in B)$$

を満すものが存在する。今 $H \in B$ が (3) を満せば、不等式

$$\|\Lambda\| = \int H d\mu \leq \int |H| d\mu \leq \|\mu\|$$

は等式になる。よって

$$H = |d\mu|/d\mu \quad \text{a.e. on } \text{supp}(d\mu)$$

が成り立つ。 $S = \text{supp}(d\mu)$ とおくと、これは H が S 上一意に定まることを意味する。よって $H' \in B$ も (3) を満せば、

$H - H' = 0$ on S となる。これより集合 S が次の性質をもてば extremal 函数 g の一意性が云えることになる:

$$(*) \quad h \in B \text{ が } h = 0 \text{ on } S \text{ ならば } h = 0 \text{ on } D.$$

さてはじめに述べた十分条件とは次のように述べられる。

補題 1 記号は上の如くとして下記 3 つの性質 a), b), c) を満すような集合 $L \subset \beta(D)$ と $A \subset D$ があれば集合 S は (*) を満す。

を満す。a) 各点 $a \in A$ に対し、 $|f(a)| > \|f\|_L$ となるような D 上の有界正則函数 f がある;

- b) 各点 $a \in A$ に対し B 上の線型汎関数 $h \mapsto h(a)$ はノルム $\|\cdot\|_{SUL}$ に関して有界である。すなわち定数 C_a があって $|h(a)| \leq C_a \|h\|_{SUL} \ (h \in B)$.
- c) A の閉包 $\bar{A}$ は D で discrete でない。

証明 $h \in B$ が D 上でゼロとある。 $a \in A$ ならば $a)$ により D 上の有界正則関数 f で、 $f(a) = 1 > \|f\|_L$ となるものがある。よって

$$\begin{aligned} |h(a)| &= |(f^n h)(a)| \leq C_a \|f^n h\|_{SUL} = C_a \|f^n h\|_L \\ &\leq C_a (\|f\|_L)^n \|h\|_L. \end{aligned}$$

$\|f\|_L < 1$ であるから $n \rightarrow \infty$ とすれば $h(a) = 0$ とななくてはならないことがわかる。よって、 $g = h e^u$ は A 上ゼロとなり、
 ていて、 g は D 上正則であるから $c)$ により g は D 上恒等的にゼロ。よって $h = 0$ on D . (証終)

ここで前述 Hejhal - Ganelin の定理の証明を述べておく。

Hejhal - Ganelin の定理の証明 定理の記号に従ってコンパクト集合 K と $D \setminus K$ の連結成分 $V_1, \dots, V_t$ を考える。更に、
 $N_j = \partial V_j \cap \partial D$ とおく。条件より $N_j \in N_{AB}$ ならば $N_j \in N_{HB}$ である。よって必要ならば番号を付け改めて、 $N_j \in N_{HB} \ (1 \leq j \leq k)$, $N_j \notin N_{AB} \ (k < j \leq t)$ としてよい。ここで自然な連続写像 $f: \rho(D) \rightarrow \bar{D}$ を考える。subharmonic 関数 $|h|$ (但

$h \in B$) は定数でない限り $\bigcup_{j=1}^k N_j$ 上で最大値をとらないので

$$\Gamma = f^{-1}\left(\bigcup_{j \geq k} N_j\right)$$

とかくと, Γ は (4) を満たす閉集合である. 前述 (5) のように Γ 上の測度 $d\mu$ をとり, $\delta = \text{supp}(d\mu)$ とかく. 補題 1 にあ

いて, $L = K$ とすれば恒値 α , ω を満たす点 a の集合 A が D に集積点をもつことを示せばよい. そこで, $|\mu|(f^{-1}(N_{j_0}))$

> 0 と仮定し $j_0, k < j_0 < t$, ε を一つ固定して考える. $E = K \cup \delta$

とかくと, 仮に点 $a \in V_{j_0}$ に対して汎函数 $h \mapsto h(a)$ ($h \in B$)

がノルム $\|\cdot\|_E$ に関して非有界で, ε とする. 然らば, ε の

核 $\{h \in B: h(a) = 0\}$ は $\overline{B|E}$ で dense である. ここで,

$B|E$ は B の元を集合 E に制限して得られる函数の全体を表わ

し, $\overline{}$ は ε の E 上での uniform closure を表わす. 従って,

任意の元 $h \in \overline{B|E}$ に対して, 列 $h_n \in B$ があつて, $h_n(a) = 0$,

$\|h_n - h\|_E \rightarrow 0$ と出来る. このとき, $h_n/(z-a) \in B$ かつ

$$\left\| \frac{h_n}{z-a} - \frac{h}{z-a} \right\|_E \rightarrow 0$$

と仮定するから, $h/(z-a) \in B$. 従ってこれを繰り返せば,

$$h/(z-a)^n \in \overline{B|E} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

と仮定することがわかる. Runge の定理により, a 以外の点 α に対して

有理函数列 g_n があつて,

$$g_n \rightarrow 0 \text{ on } N_{j_0}, \quad g_n \rightarrow 1 \text{ on } K \cup \left(\bigcup_{j \neq j_0} N_j\right)$$

とできる. $\rightarrow$ は一様収束を表わす. よって任意の元 $h \in B$

に対して,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus f^{-1}(N_{j_0})} h \, d\mu &= \lim_n \int_{\Gamma} f_n h \, d\mu = \lim_n \int_{\Gamma} f_n h e^u \, d\alpha \\ &= \int_{\Gamma} h e^u \, d\alpha = \int_{\Gamma} h \, d\mu \end{aligned}$$

が成り立つことになる。よって, $|\mu|(\Gamma \setminus f^{-1}(N_{j_0})) \geq \|\lambda\|$ であ
ることは示さないが, $|\mu|(f^{-1}(N_{j_0})) > 0$, $\|\mu\| = \|\lambda\|$ であ
るからこれは矛盾である。従って, $a \in V_{j_0}$ 。よって補題 1 の
(2) が成り立っていないことは示さない。また $N_{j_0} \neq N_{AB}$ であ
るから, V_{j_0} の中には性質 (2) を満たす点もありそれは開集合と
なる。よって V_{j_0} の中の点 z (2) (2) を満たす点 z は D の中に集積
点をもつ。 (証明)

§2 Riemann 面への拡張 R を Riemann 面として, R 上の有理
型関数で無限遠で有界なもの全体を $M^\infty(R)$ と書くことにする
(R が closed な Riemann 面のことでは $M^\infty(R)$ は R 上の有理関数
の全体)。 $f \in M^\infty(R)$ は極があつて f と $1/f$ も高々有限個であ
る。ここで, 次の 3 つの性質を考へます。

(6) $M^\infty(R)$ は R 上 weakly に分離する (i.e., $a, b \in R$ が異な
る点ならば $(g/f)(a) \neq (g/f)(b)$ となる函数 $f, g \in M^\infty(R)$
がある。)

(7) R は $M^\infty(R)$ -maximal である (i.e., R は subdomain

として含むような Riemann 面 R' があ、たといても、 $R' \not\supset R$ ならば $M^\infty(R)$ の元で R' まで有理型に拡張出来ないものがある.)

(8) 任意の点 $a \in R$ に対して a に極をもつような元 $f \in M^\infty(R)$ がある.

主定理 Riemann 面 R が性質 (6), (7), (8) を満たす.

$D \in \mathcal{O}_{AB}$ が R の subdomain で、 D に含まれるコンパクト集合 K に測度 da が与えられ、 $D \setminus K$ の連結成分を $V_1, \dots, V_t$ とすると $\partial V_j \cap \partial D \in N_{AB} \setminus N_{HB}$ ($j=1, \dots, t$) が成立するならば (1), (2) を満たす extremal 函数 $G \in \mathcal{G}$ は唯一つしかない.

この定理で、 $\partial V_j, \partial D$ は R の中での境界を表わす. 従って、 D の ideal boundary にある部分についての仮定は表面と含まれていないことに注意する. 定理の証明にはやはり補題 1 を使うのであるが、平面領域の場合のようにすぐには証明が出来ない. 次の節でそのための準備をする.

§3 maximal ideal space $M(D)$ ここではとくにことわ

らない限り D は一般の Riemann 面とする. D 上の有界な正則函数の全体を $H^\infty(D)$ で表わす. sup-norm $\| \cdot \|_D$ により $H^\infty(D)$

は可換 Banach 環となる。その maximal ideal space を $m(D)$ で表わすことにする。集合的には、 $m(D)$ は $H^\infty(D)$ 上の線型汎関数 φ で、

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) \quad (f, g \in H^\infty(D))$$

を満たすものの全体と同一視される。また、 φ は必然的に有界な線型汎関数となり、そのノルムは 1 である。更に weak* 位相により $m(D)$ はコンパクト Hausdorff 空間となっている。各点 $z \in D$ に対して線型汎関数 φ_z を

$$\varphi_z(f) = f(z) \quad (f \in H^\infty(D))$$

により定義すると、 $z: z \mapsto \varphi_z$ は D から $m(D)$ への連続な写像となっている。

補題 2 $D \neq \emptyset$ とする。各 $f \in M^\infty(D)$ は $m(D)$ から Riemann 球面 $\mathbb{C}^*$ への連続関数 $\hat{f}$ を定義し、次の性質をもつように出来る。

$$i) \quad f(z) = \hat{f}(\varphi_z) \quad (z \in D)$$

$$ii) \quad g \in M^\infty(R) \text{ の元とすると、 } \widehat{fg}(\varphi) = \hat{f}(\varphi)\hat{g}(\varphi).$$

(但し、右辺は $0 \cdot \infty$ や $\infty \cdot 0$ という形の積でないとき)

補題 3 $D \in \text{Riemann 面 } R \text{ の subdomain で、 } M^\infty(R) \text{ が } R \text{ 上 weakly に分離可能ならば、 } M^\infty(D) \text{ も } D \text{ を weakly に分離可能。}$

補題4 R が性質 (6) と (8) を満たす Riemann 面で, $D \subset R$ の subdomain とする. このとき $M^\infty(D)$ は D の点を分離する (i.e., $a, b \in D$ ($a \neq b$) ならば $f(a) \neq f(b)$ となる $f \in M^\infty(D)$ がある). しかも, D も性質 (8) を満たす.

更に, $D \neq O_{AB}$ ならば各点 $a \in D$ に対して a における n -位の極をもつ函数 $f \in M^\infty(D)$ が存在し, $\iota: D \rightarrow M(D)$ は中への位相写像で, 像 $\iota(D)$ は $M(D)$ の閉集合となる.

以上3つの補題の証明はここでは省略させておくが, いずれも初等的な方法で証明出来る. 次の定理は, Runge の定理にあたるものである.

補題5 $D \neq O_{AB}$ を Riemann 面とする. $\mathcal{F} \subset M^\infty(D)$ の subalgebra で $H^\infty(D)$ を含むものとし, $P \subset D$ の点の集合で $a \in P$ である函数 $f \in \mathcal{F}$ が極をもつような点 a の全体とする. $M(D)$ の閉集合 E で, $E \cap P = \emptyset$ となるものとする.

$\hat{\mathcal{F}}: \{f \in \mathcal{F}\}$ の E 上での uniform closure を $\mathcal{F}_E$ で表わすことにすると, 次のことがいえる:

a) Banach 環 $\mathcal{F}_E$ の maximal ideal space $M(\mathcal{F}_E)$ は

$$\{\varphi \in M(D) : |\hat{f}(\varphi)| \leq \|\hat{f}\|_E \text{ for } \forall f \in \mathcal{F}\}$$

と同一視される.

Ⓒ) 更に, $\iota: D \rightarrow M(D)$ が中への位相写像で, $\iota(D)$ が $M(D)$ の閉集合にな, ていると仮定すると, V が $\iota(D) \setminus E$ の連結成分ならば, $V \subseteq M(\mathcal{G}_E)$ または $V \cap M(\mathcal{G}_E) = \emptyset$ が成立つ.

上の補題で $\mathcal{G}$ は $\mathcal{G} = H^\infty(D)$ のとき Gamelin によ, て証明されている. この一般化された形で証明は同様に出来る.
Ⓐ) の証明は容易である.

補題 6 $R \in (6)$ と (8) を満たす Riemann 面とし, $D \neq O_{AB}$ は R の subdomain とする. E が D の閉部分集合のとき, $H^\infty(D \setminus E)$ の元がすべて D まで正則に延長出来るための必要十分条件は $E \in N_{AB}$ とあることである.

証明 十分性は明らかである. 必要性を示めるために, $E \notin N_{AB}$ と仮定する. E のある点 a のまわりの局所座標があり, $U \cap E$ は analytic capacity ゼロでない. 補題 4 により, 点 a にのみ 1 位の極をもつ函数 $f \in M^\infty(D)$ がある. 必要ならば, はじめから U を十分小さく取, ておいて, f は U 上で 1:1 でありかつ $f(U) \cap f(D \setminus U) = \emptyset$ となっているものとしてよい. 今 $\mathcal{G} = f(E \cap U)$ と除いたところを有界正則な Riemann 球

面 $\mathbb{C}^*$ 上の函数とある (非定数). このとき, $h \circ f \in H^\infty(D \setminus E)$ となるが, $h \circ f$ は E 上で正則には延長出来ない (証明).

補題 7 R は (6), (7), (8) を満たすのとある. $D \neq O_{AB}$ を R の subdomain で, $K \subset D$ のコンパクト集合, $V \subset D \setminus K$ の連結成分の一つとある. このとき, V が R 内で相対コンパクトでかつ $\partial V \cap \partial D \in N_{AB}$ となるための必要十分条件は

$$(9) \quad |f(a)| \leq \|f\|_K \quad (\forall f \in H^\infty(D))$$

が成立つことである.

証明 必要であることは明らか. (9) が成り立つとある. Riemann 面 D の $H^\infty(D)$ に関する Royden の resolution $\tilde{D}$ を考える (cf. [6]). このとき自然な解析写像 $\tau: D \rightarrow \tilde{D}$ は補題 4 によ, τ 1:1 になる. 各 $f \in H^\infty(D)$ に対し τ は, $gf \in H^\infty(D)$ とあるような函数 $g \in H^\infty(D)$ ($g \neq 0$) があるので, $f = (gf)/g$ は $\tilde{D}$ 上の有理型函数に拡張される. また, 各 $f \in H^\infty(R)$ は, 複素数 α を適当に選べば $1/(f-\alpha) \in H^\infty(D)$ となるように出るので, f 自身が $\tilde{D}$ 上の有理型函数 $\tilde{f}$ として表現出来る. [7; Proposition 1] により, 解析写像 $\sigma: \tilde{D} \rightarrow R$ があり, 今の作りかた, $\tilde{f} = f \circ \sigma$ ($f \in H^\infty(R)$) となる. $H^\infty(\tilde{D})$ は $\tilde{D}$ を weakly に分離するので, σ は

$\mathcal{D}$ 上でも 1:1 である. ここで, [7; Theorem 1] によれば,
 $\tau(V)$ は $\mathcal{D}$ で相対コンパクトになる. よ, $\tau = \tau \circ \tau(V)$
 は R で相対コンパクトである. しかも, $H^\infty(\tau(\mathcal{D}))$ の元は q
 べて $\mathcal{D}$ へ正則に延長されるので, $H^\infty(\mathcal{D})$ の元は q べて $\partial V \cap \mathcal{D}$
 上へ正則に延長される. よ, 前補題により $\partial V \cap \mathcal{D} \in N_{AB}$
 と取る. (証終)

§4 主定理の証明 以上の準備のもとに, 主定理は平面領
 域の場合とほとんど同様に証明される. まず, $\beta(\mathcal{D}) \in \mathcal{D}$ の
 Stone-Čech のコンパクト化と取る. R の 1 点コンパクト化を
 R^* で表わすと, 自然な連続写像 $f: \beta(\mathcal{D}) \rightarrow R^*$ が定義され
 る. $\mathcal{D} \setminus K$ の連結成分 V_j のうち, V_j が R で相対コンパクトで,
 $\partial V_j \cap \mathcal{D} \in N_{HB}$ と取るものを $V_1, \dots, V_k$ とし, 残りを
 $V_{k+1}, \dots, V_t$ と取るように番号をつける. ここで,

$$\Gamma = \beta(\mathcal{D}) \setminus \left(\mathcal{D} \cup f^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^k \partial V_j \cap \mathcal{D} \right) \right)$$

とみると, Γ は (4) を満たす閉集合である. よ, Γ 上の測度
 $d\mu$ で (5) を満たすものがある. $S = \text{supp}(d\mu)$, $L = K$ とし補
 題 1 を成り立たせる集合 $A (\subset \mathcal{D})$ があることを示せばよい.
 まず, 各 V_j ($k < j \leq t$) より 1 点ずつ a_j を取れば, 少なく
 1 点 a_j に対しては, 線型汎関数 $h \mapsto h(a_j)$ がノルム $\|\cdot\|_{S \cup K}$
 に関して有界である. 仮りに, このどれれもが非有界な汎関数

であるとしてみよう。 $f \in M^\infty(D)$ の元で $P = \{a_{k+1}, \dots, a_t\}$ を除いては極をもたないもの全体とする。点 a_j においてのみ 1 位の極をもつ元 $f_j \in M^\infty(D)$ を取り、前と同様にして、 $\overline{B(K \cup S)}$ は f_j を乗じて $\overline{B(K \cup S)}$ に含まれることが示される。よ、2 つの元を乗じて $\overline{B(K \cup S)}$ の元は $\overline{B(K \cup S)}$ に含まれる。補題 5 により、 $M(\mathcal{F}_{K \cup S})$ の中で K と S は交わらない閉集合で分離される。よ、2 Shilov の idempotent Theorem により、 $\mathcal{F}$ の元での列 g_n で $g_n \rightarrow 0$ on K , $g_n \rightarrow 1$ on S と取るものがあつた。このとき、任意の $h \in B$ に対して、

$$\int h d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S g_n h d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K g_n h e^x da = 0$$

となり、(2) に反する。よって、どれかの線型汎関数 $h \mapsto h(a_j)$ ($k < j \leq t$) はいつもノルム $\|\cdot\|_{S \cup K}$ に対して有界である。一方 $k < j \leq t$ ならば、補題 7 により

$$|f(a_j)| > \|f\|_K \quad \text{for some } f \in H^\infty(D)$$

と出来るように点 $a_j \in V_j$ がある。よって補題 1 の a), b) を満足するよう点 a は $\bigcup_{j>t} V_j$ の中から取れて、それは D 内に集積点をもつ。(証終)

§5 その他の結果と今後の問題

Gamelin [2, 3] に述べ

多変数関数論の発展

されている "Pick-Nevalinna" 型の extremal problem についての extremal 函数の一存在定理は、平面領域の場合と同様に一般化される (cf. [3; Theorem 4.1]). また、 $R \notin O_{AB}$ で、 R が (6), (7), (8) を満たしている、コンパクト集合 $K \in D \setminus K$ が連結となるようにとれば、extremal 函数 G に対して、 $G e^{-u-i\tau u}$ は D の analytic な境界への正則に延長されることも示される。この場合条件 $R \notin O_{AB}$ が不用かどうか不明である。また、主定理においても、条件 $D \notin O_{AB}$ は不用であるかも知れない。これには次の予想が正しいければよい:

「Riemann 面 R が (6), (7), (8) を満たせば、 R は closed であるか、または $R \notin O_{AB}$ となる」

最後に本稿は筆者 [4] に含まれている結果の一部によって、結果は更に改良されていることを付け加えておきます。

References

1. T.W. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
2. _____, Extremal problems in arbitrary domains, Michigan Math. J. 20 (1973), 3-11.
3. _____, Extremal problems in arbitrary domains, II, Michigan Math. J. 21 (1974), 297-307.
4. M. Hayashi, Hardy classes on Riemann surfaces, thesis at

Univ. of California, Los Angeles, 1979.

5. D.A. Hejhal, Linear extremal problems for analytic functions, Acta Math. 128 (1972), 91-122.
6. J.A. Jenkins and N. Suita, On the Pick-Nevanlinna problem, Kodai Math. J. 2 (1979), 82-102.
7. H.L. Royden, Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces, Acta Math. 114 (1965), 113-142.