

Lie 群上の総和法

慶大 理工 河添 健

Kawazoe Takeshi

半単純 Lie 群上の K 両側不変関数についてのフランチレル
公式は $C_c^\infty(K \backslash G / K)$ あるいは シュバルツ空間 $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ 上
で成立する事が知られている。しかし、一般に $L^1(K \backslash G / K)$
では成立しない。(逆変換の積分が発散)。ここではその逆
変換公式が、総和法を用いる事により、 $L^1(K \backslash G / K)$ のある部
分空間(滑らかさを仮定する)において成立する事を示す。

1. $\mathbb{R}$ の場合. まず一次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ 上の総和法
について復習する。 $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対してそのフーリエ変換は
 $\hat{f}(\nu) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\nu x} dx \quad (\nu \in \mathbb{R})$ で定義され、さらにもし、
 f が $C_c^\infty(\mathbb{R})$ あるいは シュバルツ空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属するならば、逆
変換公式: $f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{-i\nu x} d\nu \quad (x \in \mathbb{R})$ が成立する。し
かし、一般の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対しては リーマン・ルベーグの定理 (cf.
[Ti, 定理 I]) により $\hat{f}$ は 連続、有界な関数にはなるが、逆変
換公式の積分を収束させるまでには至らない。そこで、収

束の意味を弱めて考えたらどうか? という事が問題になる。
これが総和法である。今, $K(x, y, \delta)$ を $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上の, 次の条件を満たす関数とする。ある正数 α が存在し,

$$(i) \quad K(x, y, \delta) = O(1/\delta) \quad (|x-y| \leq \delta)$$

$$(ii) \quad K(x, y, \delta) = O(\delta^\alpha / |x-y|^{\alpha+1}) \quad (|x-y| > \delta)$$

$$(iii) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_x^\infty K(x, y, \delta) dy = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x K(x, y, \delta) dy = \frac{1}{2}.$$

この時, 次の定理が知られている。

定理 1.1. ([Ti, 定理13]). もし, $f(x)/(1+|x|^{\alpha+1})$ が $L^1(\mathbb{R})$ に属し, かつ, $x \in \mathbb{R}$ で, $\int_0^h |f(x+t) - \phi(x)| dt = o(h)$, $\int_0^h |f(x-t) - \psi(x)| dt = o(h)$ ($h \rightarrow +0$) なる関数 ϕ, ψ が存在するならば,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, \delta) f(y) dy = \frac{1}{2} \{ \phi(x) + \psi(x) \}.$$

勿論, f が x で連続, あるいは第一種不連続, あるいは, $f(x \pm 0)$ が意味を持つならば, $\phi(x) = f(x+0)$, $\psi(x) = f(x-0)$ である。

さて, ν で $K(\nu)$ を

$$(i) \quad K_C(\nu) = \begin{cases} (1-|\nu|)^\alpha & (|\nu| < 1) \\ 0 & (|\nu| \geq 1), \end{cases} \quad (\text{Cesàro})$$

$$(ii) \quad K_A(\nu) = e^{-|\nu|}, \quad (\text{Abel})$$

$$(iii) \quad K_G(\nu) = e^{-\nu^2} \quad (\text{Gauss})$$

のいずれかとし, $K(x, y, \delta) = [e^{\nu x} K(\delta \nu)]^\wedge(y)$ (ν の関数としてフーリエ変換) として上の定理を用いれば, 次の定理が得られる。

定理 1.2. ([Ti, 1.16, 17, 18]). もし, f が $L^1(\mathbb{R})$ に属し, $x \in \mathbb{R}$ で連続, あるいは第一種不連続であるならば,

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) e^{-i\pi v x} K(\delta v) dv.$$

以下, この定理の類型と半単純 Lie 群上のフランチエレル公式に対して求める事を目的とする。

2. 記号と準備. G を中心有限の連結半単純 Lie 群とし, $G = KAN$ とその岩沢分解とする。以下, $\dim A = 1$ を仮定する。 G の部分群の Lie 環はすべてドイツ小文字を用いて表わし, 特にその複素化, 双対空間は $\mathbb{C}, *$ を添えて表わす事とする。 $\mathfrak{f} = \mathfrak{a}^*$ と略す。 Δ^+ により $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の正ルートの全体, α もその単純ルート, H_0 も $\alpha(H_0) = 1$ を満たす $\mathfrak{a}$ の元とする。 m_1, m_2 も $\alpha, 2\alpha$ の重複度とする。(cf. [He, p.532]). 以下, $a_t = \exp tH_0$ ($t \in \mathbb{R}$) により A の元を表わし, A 上の関数 F を $F(t) = F(a_t)$ と略す。 $A^+ = \{a_t; t \geq 0\}$ とすれば, カルタン分解: $G = KA^+K$ により, $x \in G$ に対して, $x \in K a_{t(x)} K$ なる $t(x) \in \mathbb{R}$ が唯一決まる。この事より, G 上の K 両側不変関数 f も $f(t(x)) = f(x)$ と略す。 $B(\cdot, \cdot)$ により $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上のキリング形式を表わし, $\mathfrak{f} \times \mathfrak{f}$ 上の内積も $\langle \lambda, \mu \rangle = B(H_\lambda, H_\mu)$ ($\lambda, \mu \in \mathfrak{f}$) で定義する。こゝで, H_ν ($\nu \in \mathfrak{f}$) は $B(H, H_\nu) = \nu(H)$ ($H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$) を満たす $\mathfrak{a}$ の元である。 $d\mathfrak{a}, d\mathfrak{f}, dA$ もそれぞれ, $\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, A$ のユークリッド測度とし, $dk,$

$dn \in K, N$ の 11 - $1V$ 測度とする。ただし, $\int_K dk = 1$, $\int_N e^{-2P(H(\theta u))} dn = 1$ と正規化する。 ($P = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)\alpha$, θ は K によって決まる G のカルヌン対合, $H: G \rightarrow \mathfrak{a}$ は岩沢分解による $G \rightarrow A$ なる射影とし, $\log: A \rightarrow \mathfrak{a}$ の合成)

次に以下の議論で必要な良く知られた事実を列挙する。

([He', chap. X], [War, chap. 9.2]). $\nu \in \mathcal{F}$ に対して $\phi_\nu(x) = \int_K e^{(\nu - \rho)H(xk)} dk$ ($x \in G$) と置けば, これは G 上の常球関数となり, G のカシミール作用素 ω の固有値 $-\langle \nu, \nu \rangle - \langle \rho, \rho \rangle$ をもつ固有関数である。今, $L^1(K \backslash G / K)$ により G 上の複素数値, 両側 K 不変, 可測関数で, $\int_G |f(x)| dx < \infty$ なるものの全体とする。この時 $f \in L^1(K \backslash G / K)$ に対して, そのフーリエ変換及びラドン (アベール) 変換は

$$\hat{f}(\nu) = \int_G f(x) \phi_\nu(x^{-1}) dx \quad (\nu \in \mathcal{F}), \quad (2.1)$$

$$F_f(a) = e^{P(\log a)} \int_N f(an) dn \quad (a \in A) \quad (2.2)$$

で定義され,

$$\hat{f}(\nu) = \int_A F_f(a) e^{\sqrt{-1}\nu(\log a)} da \quad (2.3)$$

なる関係式を満たす。 ($da = (2\pi)^{-1} dA$). さらに f が $C_c^\infty(K \backslash G / K)$ あるいはシュバルツ空間 $\mathcal{S}(K \backslash G / K)$ の元であれば, 逆変換公式:

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} \hat{f}(\nu) \phi_\nu(x) |\mathcal{C}(\nu)|^2 d\nu \quad (x \in G) \quad (2.4)$$

が成立する。ただし, $d\nu = (2\pi)^{-1} d\mathcal{F}$, $|\mathcal{C}(\nu)|^2 d\nu$ はフランシェレル測度 (cf. [War. chap. 9.2.]) である。

以下, $|\mathcal{C}(\nu)|^2$ の多項式部分を $P(\nu)$, その残りを $R(\nu)$ と書く

事になる。すなわち $|c(v)|^2 = p(v) R(v)$ であり, $R(v)$ は $1, th\pi v, th\pi v/2, cth\pi v/2$ のいくつかの形をしている。特に $R(v) = O(1)$ ($v \rightarrow \infty$) に注意する。さらにその具体的な形により, $\deg(P) = m_1 + m_2 = d-1$ ($d = \dim G/K$) である事がわかる。以下, 多項式 Q に対して, $D(Q)$ をそのシンボルが Q となる $\mathbb{R}$ 上の微分作用素とし, $\Omega = \omega^n$ ($n = [1, d]$, $[,]$ は Gauss 記号) と置く。さらに $R_k(v) = |c(v)|^{-2} (-\langle v, v \rangle - \langle p, p \rangle)^{-k}$ ($k \in \mathbb{N}$) とし, もし存在するならば, $R_k(\infty) = \lim_{v \rightarrow \infty} R_k(v)$ と置く。

3. G 上の総和法. $d = \dim G/K$ とし, $L^1_{d-1}(\mathbb{R})$ により, $\mathbb{R}$ 上の $d-1$ 回連続微分可能な偶関数で, その $d-1$ 階までの各導関数が $L^1(\mathbb{R})$ に属するもの全体とする。明らかに各導関数は無限遠点で零となり, また各奇数階の導関数は原点で零となる。以下, $\mathbb{R}$ 上の関数 g に対して, $\underline{g}(t) = \begin{cases} g(t) & t \geq 0 \\ g(-t) & t < 0 \end{cases}$ と置く。

命題 3.1. $m_1 \equiv_{(4)} 0$ あるいは $m_2 \equiv_{(2)} 0$ とする。もし, F が $L^1_{d-1}(\mathbb{R})$ に属するならば, $x \in G$ に対して,

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_F \hat{F}(v) \phi_v(x) |c(v)|^2 K(rv) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_K (\underline{DCP} F(t\alpha_K) + \underline{DCP} F * (\underline{R}-1)^{\wedge}(t\alpha_K)) e^{-P(H\alpha_K)} dK \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{3.1}$$

(証明) F が $L^1_{d-1}(\mathbb{R})$ に属する事に注意すれば, $\hat{F}(v) |c(v)|^2 =$

($\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) \underline{R}(\nu) (\nu \in \mathbb{T})$ とある事からわかる。よって

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \hat{F}(\nu) \phi_\nu(x) |c(\nu)|^2 K(r\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) \phi_\nu(x) \underline{R}(\nu) K(r\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) \phi_\nu(x) K(r\nu) d\nu \\ &+ \int_{\mathbb{T}} (\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) \phi_\nu(x) (\underline{R}(\nu)-1) K(r\nu) d\nu \\ &= \int_K \left[\int_{\mathbb{T}} (\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) e^{\sqrt{-1}\nu(H(x_k))} K(r\nu) d\nu \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{T}} (\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) (\underline{R}(\nu)-1) e^{\sqrt{-1}\nu(H(x_k))} K(r\nu) d\nu \right] e^{-P(H(x_k))} dk \\ &= \int_K [I_r^1 + I_r^2] e^{-P(H(x_k))} dk \end{aligned}$$

とある。ここで、 $\underline{D(P)F}$ は仮定より $L^1(\mathbb{R})$ に属し、連続である。よって、定理 1.2. より $\lim_{r \rightarrow 0} I_r^1 = \underline{D(P)F}(t(x_k)) < \infty$ とある。

一方、 $m_1 \equiv 0$ or $m_2 \equiv 0$ の時、 $\underline{R}(\nu)$ は $th\nu$, $th\nu/2$ の形をして
いる事に注意すれば、 $\underline{R}-1$ は $L^2(\mathbb{R})$ に属する事からわかる。特に
 $(\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) (\underline{R}(\nu)-1)$ も $L^2(\mathbb{R})$ に属する。($(\underline{D(P)F})^\wedge$ は有界)。よって
パーセバルの公式: [Ti, 定理 49] と 積の フーリエ変換に関する定理:
[Ti, 定理 65] を用いれば、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} (\underline{D(P)F})^\wedge(\nu) (\underline{R}(\nu)-1) e^{\sqrt{-1}\nu(H(x_k))} K(r\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\underline{D(P)F} * (\underline{R}-1)^\wedge)(t) [e^{\sqrt{-1}t(H(x_k))} K(r\nu)]^\wedge(t) dt \end{aligned}$$

とある。 $\underline{D(P)F}$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であり、 $\underline{D(P)F} * (\underline{R}-1)^\wedge$ が
 $L^1(\mathbb{R})$ に属する事に注意すれば、定理 1.1 を用いて、 $\lim_{r \rightarrow 0} I_r^2 =$
 $\underline{D(P)F} * (\underline{R}-1)^\wedge(t(x_k)) < \infty$ である事からわかる。

(証明終り)

$m_1 \equiv (4)2$, $m_2 \equiv (4)1$ の場合, $R(v) = \cosh \pi v/2$ となり, R^{-1} は $L^2(\mathbb{R})$ に属さない。この場合, P, R をそれぞれ, $P'(v) = P(v)(1+v)/v$, $R'(v) = R(v)v/(1+v)$ に置きかえてやる事により (P' は多項式に注意), 先の議論を適用する事ができる。よって,

命題 3.2 $m_1 \equiv (4)2$, $m_2 \equiv (4)1$ とある。もし F が $L^1_{d,1}(\mathbb{R})$ に属するならば, (3.1) の P, R を P', R' に置きかえた式が成立する。

注意 1. $K = K_G$ の時, $\mathbb{R}$ 上の総和法は多変数の場合に拡張される。(see [BC, chap. 2.3]). この事から [BC, p62-63] の議論と [Ti, 定理 16] も用いられ, $K = K_G$ の時, 上の命題 3.1, 3.2 は任意のラングの群に対しても成立する事がわかる。

次に $L^1_r(K|G/K)$ ($r \in 2\mathbb{N}$) を G 上の r 回連続微分可能な K 両側不変関数で, $\omega^l f$ ($0 \leq l \leq r/2$) がすべて $L^1(K|G/K)$ に属するもの全体とする。明らかに $L^1_p(K|G/K) \subset L^1_0(K|G/K)$ ($p \geq 0$), $L^1_0(K|G/K) \subset L^1(K|G/K)$ である。 $f \in L^1(K|G/K)$ に対して, $L^0 p(f) = \int_K f(gkx) dk$ ($g, x \in G$) と置く。

補題 3.3. $f \in L^1_0(K|G/K)$, すなわち, $L^1(K|G/K)$ の連続関数ならば, Ff は A 上の連続関数である。

(証明) $n \in N \subseteq n = \exp(Y+Z)$ $Y \in \mathfrak{g}_d, Z \in \mathfrak{g}_{2d}$ ($\mathfrak{g}_d, \mathfrak{g}_{2d}$ は $\mathfrak{a}, 2\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{u}$ - $\mathfrak{t}$ 空間) と書ける。

$$Ff(t) = \iint_{\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}} f[(cht + |Y|^2/2) + |Z|^2] dY dZ$$

と書く事ができる。ただし, $\mathbb{R}$ 上の関数 g に対して, $g(t) = g[cht]$ である。(この公式は講演後, 橋介氏より教えていただいた。) よ, z 適当な変数変換を h にせよ, 定数倍を除いて,

$$\int_t^\infty f(u) (chu)^{2m_2-2} (\operatorname{sh}(2u) \int_t^u (ch2u - ch2v)^{-\frac{m_2}{2}} \\ \times (chv - cht)^{m_1-2/2} \operatorname{sh} v dv) du$$

と書ける事がわかる。 $z = z$ [K₀, (2.18), (2.20)] の $A_{\alpha, \beta}$ なる関数を用いれば, $\alpha = m_1 - m_2 + 1/2$, $\beta = -m_2 + 1/2$ とする事にし

$$Ff(t) = C_{m_1, m_2} \int_t^\infty f(u) (chu)^{2m_2-2} A_{\alpha, \beta}(t, u) du$$

となる。よ, z , f が $L^1(G)$ の元である条件: $\int_{\mathbb{R}^+} |f(u)| \operatorname{sh} u^{m_1+m_2} \\ chu^{m_2} du < \infty$, f の連続性の仮定及び $A_{\alpha, \beta}$ の不等式 (cf. [K₀, p.155]) を用いれば, 容易に求める結果を得る。(証明終り)

定理 3.4 $t \in \mathbb{R}, f$ が $L^1_{2n}(K|G/K)$ ($n = [\frac{d}{2}]$, $d = \dim G/K$) に属するならば

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) \phi_r(x) |c(v)|^2 K(rv) dv \\ = \frac{1}{2} R_n(\infty) F_{\Omega L^1_x} f(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} F_{\Omega L^1_x} f(t) (R_n - R_n(\infty))^{\wedge}(t) dt \\ < \infty. \quad (3.2)$$

(証明) f が $L^1_{2n}(K|G/K)$ に属する事から $\hat{f}(v) \phi_r(x) |c(v)|^2 = (F_{\Omega f})^{\wedge}(v) |c(v)|^{-2}$

$= (F_{\Omega \times f})^\wedge(v) R_n(v) \quad (v \in F)$ である事がわかる。また補題 3.3 を用い
れば, $F_{\Omega \times f}$ は A 上連続である事も容易にわかる。よって,
定理の命題 3.1 と同様の方法にて証明される。(証明終り)

(3.2) 式を簡単のため $f_0(x)$ と書く事にする。以下 $f_0(x)$ の評価
式を求めろ。次のように $f_0(x) = f(x)$ を示す。

$\alpha \equiv_{(2)} 1$ の時, $R_n(\infty) \neq 0$ であり, $R_n - R_n(\infty)$ は $L^1(\mathbb{R})$ に属する
事がわかる。特に $(R_n - R_n(\infty))^\wedge$ は有界である。しかし, $\alpha \equiv_{(2)} 0$
の時, $R_n(\infty) = 0$ であり, $R_n^\wedge$ は有界とは限らない。

補題 3.5. 各 $0 \leq \alpha < 1$ に対して定数 C_α が存在し,

$$|R_n^\wedge(t)| \leq C_\alpha |t|^{\alpha-1} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(証明) R_n の具体的な形を用いれば, $v \frac{d}{dv} R_n(v)$ が $L^1(\mathbb{R})$ に属す
事がわかる。よって, $R_n^\wedge(t) = 2 \int_0^\infty R_n(v) \cos vt \, dv = -\frac{2}{t} \int_0^\infty v \frac{d}{dv} R_n(v) \sin vt \, dv$
 $= -2t^{\alpha-1} \int_0^\infty (v \frac{d}{dv} R_n(v)) (\sin vt/vt)^\alpha (\sin vt)^{1-\alpha} dv$ より求
める結果を得る。(証明終り)

命題 3.6. もし f が $L^1_{2n}(K \backslash G/K)$ に属するならば, 任意の $\varepsilon > 0$
に対して, 定数 C_1, C_2 が存在し,

$$|f_0(x)| \leq C_1 \sup_{|t| \leq \varepsilon} |F_{\Omega \times f}^\wedge(t)| + C_2 \|F_{\Omega \times f}\|_1 \quad (3.3)$$

$$\leq C_1 \sup_{|t| \leq \varepsilon} |F_{\Omega} f(t)| + C_2 \|\Omega f\|_1$$

(証明) (3.2)式, 補題 3.5 及び (2.2) より明らか. (証明終り).

注意 2. 帯球関数 $\phi(x)$ が, ν の関数として, $\mathbb{R}$ 上の $|t| \leq t(x)$ に台をもつ L^1 関数 $\Xi_x(t)$ のフーリエ変換として書ける事に注意すれば $F_{\Omega} f(0) = F_{\Omega} f * \Xi_x(0)$ となり, (cf. [FR])

$$(3.2) = \frac{1}{2} R_n(\infty) F_{\Omega} f * \Xi_x(0) + \frac{1}{2} F_{\Omega} f * \Xi_x * (R_n - R_n(\infty))^{\wedge}(0)$$

と表わされる。

4. 逆変換公式. Ξ まで前の (3.3) を用いて, $f \in L^1_{2n}(K|G/K)$ ならば, $f_0(x) = f(x)$ ($x \in G$) を示す。この前に次の 2 つの補題に注意する。

補題 4.1. もし, f が $L^1(K|G/K)$ に属し, そのフーリエ変換 $\hat{f}$ が $L^1(\mathcal{T}, |c(\omega)|^2 d\nu)$ に属するならば, (2.4) が成立する。

(証明) 任意の $g \in C_c^\infty(K|G/K)$ に対して, $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) = \int_{\mathcal{T}} \hat{f}(\omega) \cdot \overline{\hat{g}(\omega)} |c(\omega)|^2 d\nu = (\int_{\mathcal{T}} \hat{f}(\omega) \phi_\nu(x) |c(\omega)|^2 d\nu, g)$. よって, f は (2.4) を満たす. (証明終り)

補題 4.2. もし, f が $L^1_{2n+1}(K|G/K)$ ($n = [\frac{d}{2}]$, $d = \dim G/K$) に属する

存らば, (2.4) が成立する。

(証明) 仮定より $\omega^{n+1}f$ は $L^1(K|G/K)$ に属し, よ, z , $(\omega^{n+1}f)^\wedge$ は有界である。一方 $(\omega^{n+1}f)^\wedge(v) = (-\langle v, v \rangle - \langle p, p \rangle)^{n+1} \hat{f}(v)$ であり, $|c(v)|^2 = O(v^{d-1})$ ($v \rightarrow \infty$) に注意すれば, $\hat{f}$ は $L^1(F, |c(v)|^2 dv)$ に属する事がわかる。故に前の補題より求める結果を得る。

(証明終り)

さて, $(V_m^K)_{m \in \mathbb{N}}$ と $V_{m+1}^K \subset V_m^K$ を満たす K の原点のコンパクトな基本近傍系とする。同様に, A, N に対しても $(V_m^A)_{m \in \mathbb{N}}$, $(V_m^N)_{m \in \mathbb{N}}$ を定める。明らかに $V_m = V_m^K V_m^A V_m^N$ ($m \in \mathbb{N}$) は G の原点のコンパクトな基本近傍系となる。 $h_m \in C^\infty(K|G/K)$ を $h_m \geq 0$, $\text{supp}(h_m) \subset V_m$, $\int_G h_m(x) dx = 1$ なる条件を満たす様に選ぶ。この時, 次の補題が成立する。

補題 4.3. $f \in L^1(K|G/K)$ の元とする。

(i) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|h_m * f - f\|_1 = 0$

(ii) もし, f が $x \in G$ で連続であれば,

(a) $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m * f(x) = f(x)$

(b) x のあるコンパクト近傍 U_x に対し,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{y \in U_x} |h_m * f(y) - f(y)| = 0.$$

(証明) (i) $\|h_m * f - f\|_1 \leq \int_G \int_G h_m(y) |f(y^{-1}x) - f(x)| dy dx \leq \sup_{y \in V_m} \sigma(y, f)$, ところで, $\sigma(y, f) = \int_G |f(y^{-1}x) - f(x)| dx$ である。よ, ち, $f \in g_k \in C^\infty(K \backslash G / K)$, $k \in \mathbb{N}$ なる元により, L^1 -norm で近似する事により, $\lim_{y \rightarrow e} \sigma(y, f) = 0$ となり, 求める結果を得る。

(ii) (a) は良く知られてゐる。(ii) (b) f の連続性から, f は $V_1^{-1}U_x$ で一様連続と仮定できる。よ, ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在し, $u, v \in V_1^{-1}U_x$ に対し, $uv^{-1} \in V_m$ ($m \geq M$) ならば $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ である。故に, $|h_m * f(y) - f(y)| \leq \int_G h_m(x) |f(y^{-1}x) - f(y)| dx \leq \varepsilon$ ($m \geq M, y \in U_x$) が得られる。(証明終り)。

この補題における (G, V_m, h_m) の満たす条件は $(A, V_m^A, e^{\int} F_{h_m})$ によ, ちも満たされる事がわかる。よ, ち $F_f * g = e^{\int} (e^{\int} F_f * e^{\int} F_g)$ ($f, g \in L^1(K \backslash G / K)$) に注意すれば, 次の補題は前の補題と同様に得られる。

補題 4.4. $f \in L^1(K \backslash G / K)$ の元とする。

(i) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|F_{h_m} * f - F_f\|_1 = 0$

(ii) もし, F_f が $t \in \mathbb{R}$ で連続であれば,

(a) $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{h_m} * f(t) = F_f(t)$

(b) t のあるコンパクト近傍 U_t に対し,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{s \in U_t} |F_{h_m} * f(s) - F_f(s)| = 0.$$

定理 4.5. もし, f が $L^1_{2n}(K|G/K)$ に属するならば, $f_0(x) = f(x)$ ($x \in G$) である。あるいは,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_T \hat{f}(v) \phi_v(x) |c(v)|^{-2} K(rv) dv \quad (4.1) \\ &= \frac{1}{2} R_n(\infty) F_{\Omega L^2_x} f(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} F_{\Omega L^2_x} f(t) (R_n - R_n(\infty))^{\wedge}(t) dt \end{aligned}$$

(証明). 補題 3.3 により, $F_{\Omega L^2_x} f, F_{\Omega L^2_x}(h_m * f) = F_{h_m * \Omega L^2_x} f$ は $\mathbb{R}$ 上連続な関数である。よって $f - h_m * f$ に対し ($h_m * f$ は $L^1_{\infty}(K|G/K)$ に属する事に注意) 命題 3.6 を適用し, $\Omega L^2_x f$ に対し, 補題 4.4 を適用すれば, $\lim_{m \rightarrow \infty} |f_0(x) - (h_m * f)_0(x)| = 0$ がわかる。ここで, $h_m * f$ は $L^1_{\infty}(K|G/K)$ に属する事より, 補題 4.2 により, $(h_m * f)_0(x) = h_m * f(x)$ である。よって補題 4.3 (ii)(a) から, $\lim_{m \rightarrow \infty} (h_m * f)_0(x) = f(x)$ がわかる。故に $f_0(x) = f(x)$ でなくともならない。(証明終り)

注意 3. 明らかに $C_c^{\infty}(K|G/K), \mathcal{C}^1(K|G/K)$ (see [TV], [War, p363]) は $L^1_{2n}(K|G/K)$ に含まれる。特に $f \in C_c^{\infty}(K|G/K)$ の時, (4.1) は [He³, 定理 3.1] と一致する。また近似列を用いる事により, (4.1) は $\mathcal{C}(K|G/K)$ においても成立する事がわかる。

注意 4. 以上の議論は $\omega, R_n \in (-a + \omega) \ (a > -\langle p, p \rangle)$, $R_{n,a}(v) = |c(v)|^{-2} / (-a - \langle v, v \rangle - \langle p, p \rangle)^{\omega}$ にそれぞれ置き換えても,

成立する事がわかる。

5. 応用. Γ を $\Gamma \backslash G/K$ がコンパクトとなる G の離散部分群とし, G/K に固定点を持たないとする。こゝでは総和法の公式をセルバーグの跡公式に適用する事により, [GW], [Wal] によって得られた X のスペクトルに関する式を求める。記号はすべて [DKV] と同じものを用いるが, [DKV] の τ_R, τ は τ, τ_c と表わし, G 上の主系列は実軸 τ を用いて表わす事にする。

$h \in C_c^\infty(A)^W$ に対してホアソンの和公式:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda) \hat{h}(\lambda) = \text{vol}(X) \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(v) |c(v)|^2 dv + \sum_{c \neq [e]_{\Gamma}} l_0(c) \Delta^+(c) h(c_R) \quad (5.1)$$

が成立する。ただし, Λ は X のスペクトルであり, $\lambda \in \Lambda$ に対し, $m(\lambda)$ はその重複度である。また右辺の Σ は Γ の P -共役類で, 原点に等しくないもの全体を動く。その他の記号, 詳しい定義に関しては [DKV] の (3.14), (3.25), (5.42c), (4.5a), (3.59) を参照されたい。こゝで $h \in C_c^\infty(A)^W$ に対し, 唯一に $H \in C_c^\infty(K \backslash G/K)$ であって $F_H = h$ なるものが存在する事に注意する。特に右辺の第一項は $\text{vol}(X) H(e)$ と書ける。さらに [GW, 系 6.3] により, (5.1) は F_H ($H \in C^1(K \backslash G/K)$ (see [TV])) に対しても成立する事が知られている。

よって, 任意の $\varepsilon > 0, a > 0, r > 0$ に対して,

$$k(t) = k(\varepsilon, a; t)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+\varepsilon)} \left| \frac{t}{2(\alpha+\langle p, p \rangle)} \right|^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon} K_{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}((\alpha+\langle p, p \rangle)^{\frac{1}{2}}|t|),$$

$$g_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}r} e^{-\frac{t^2}{4r^2}}$$

と置く。 $\equiv \equiv$ $K_\nu(z)$ は第3種変形ベッセル関数 (cf. [E, 7.2.2 (13)]) である。 $k(t) = O(t^{\frac{d}{2}-1+\varepsilon} e^{-(\alpha+\langle p, p \rangle)^{\frac{1}{2}}t})$ ($t \rightarrow \infty$) (cf. [E, 7.4.1 (4)]). に注意して, [TV] の結果を用いれば, $k * g_r$ に対して (5.1) が適用できる事がわかる。特に [E, 7.12 (27)] より,

$$(k * g_r)^\wedge(\nu) = (\alpha + \langle \nu, \nu \rangle + \langle p, p \rangle)^{-\frac{d}{2}+\varepsilon} e^{-r^2 \nu^2} \quad (\nu \in \mathbb{F}) \text{ である。}$$

$\rightarrow 0$, $k(t)$ は命題 3.1 or 3.2 の仮定を満たし, δ, τ , (3.1) で $x=e$, $K=K_G$ である事に於て, $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{F}} (\alpha + \langle \nu, \nu \rangle + \langle p, p \rangle)^{-\frac{d}{2}+\varepsilon} |c(\nu)|^{-2} e^{-r^2 \nu^2} d\nu < \infty$ となる。 $\rightarrow$ $H \in C^1(K(G/K))$ の元 $v \in \mathfrak{t}$ に対し, $k * g_r \leq F_H$ ($r \geq 0$) なるものがとれるので, (例として, $F_H(t) = \operatorname{sech}((\alpha' + \langle p, p \rangle)^{\frac{1}{2}} t)$ ($0 < \alpha' < \alpha$)), (5.1) の右辺の2項は $\sum_{c \in \mathbb{C}^*} \log(c) \Delta^+(c)$ $k(h_r) < \infty$ に収束する事がわかる。

以上の事と, 左辺の各項が正值である事に注意して, 次の定理を得る。

定理 ([GW, 定理 5.3], [Wal, 定理 1.2]). 任意の $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda) / (\alpha + \langle \lambda, \lambda \rangle + \langle p, p \rangle)^{\frac{d}{2}+\varepsilon} < \infty. \quad (d = \dim G/K).$$

注意 5. この定理は任意のラングで成立する。(注意 1 を参照)。

References

- [BC] S. Bochner and K. Chandrasekharen, Fourier Transform, Annals of Mathematics Studies, 19, Princeton (1949).
- [E] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions II, McGraw-Hill, New York (1953).
- [DKV] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk and V. S. Varadarajan, Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curveture, Inv. Math., 52 (1979), 27-93.
- [GW] R. Gangolli and G. Warner, On Selberg's trace formula, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 328-343.
- [Hé¹] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic press, New York (1962).
- [Hé²] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, New York (1978).
- [Hé³] S. Helgason, The Radon Transform, Birkhäuser, Boston (1980)
- [FR] M. Flensted-Jensen and D. L. Ragozin, Spherical functions are Fourier transforms of L_1 -functions, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 6 (1973), 457-458.
- [Ko] T. Koornwinder, A new proof of Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform, Arkiv för Mat., 13 (1975), 145-159.
- [Ti] E. C. Titchmarsh, Introduction to The Theory of Fourier Integrals, Oxford (1948).
- [TV] P. C. Trombi and V. S. Varadarajan, Spherical transdorms on semisimple Lie groups, Ann. of Math., 74 (1971), 243-303.

- [War] G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II , Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [Wal] N. R. Wallach, An asymptotic formula of Gelfand and Gangolli for the spectrum of $\Gamma \backslash G$, J. Differential Geometry, 11 (1976), 91-101.