

波動現象の指数漸近解析

神戸大学 (Kobe University) 片岡 武 (Kataoka, T.)
マサチューセッツ工科大学(MIT) Akylas, T. R.

要旨

The radiation of steady surface gravity waves by a uniform flow over locally confined smooth topography is examined using potential flow theory. These waves, known as ship waves, exhibit strong nonlinearity according to recent research. This study aims to derive a nonlinear theoretical solution for ship waves using a novel approach called 'exponential asymptotics'. The theoretical results agree quite well with the strict numerical solutions, even for waves of almost finite amplitude that display strong nonlinearity, despite the fact that the theory is formally targeted at exponentially small solutions. The discussion includes the background, history, and possible future developments of exponential asymptotics.

1. 緒言

物体(船)や底面地形を過ぎる流れにより放射される水波のことを、航跡波(ship wave)と呼ぶ。ケルビン波パターンと呼ばれる美しい波形が形成されることから、過去に線形解や数値解を駆使した波形パターンについての研究は多い。しかし、その振幅に着目した研究は意外と少ないのが現状である。一方で、船の造波抵抗や海洋構造物への影響などの工学的観点、および巨大波発生メカニズムなどの海洋学的観点からは、その‘振幅’が重要である。最近の研究で、航跡波は非常に強い非線形性を示すことが分かってきた⁽¹⁻³⁾。そこで本研究では、強非線形メカニズムを知るための第1歩として、航跡波の非線形理論解を求めることを目的とする。

ここで使用する解析法は‘exponential asymptotics’ (指数漸近解析) と呼ばれ、あまり知られていない手法であるが最近の研究により、航跡波の強い非線形現象を理論的に記述できることが分かってきた⁽¹⁻⁴⁾。水波だけでなく大気・海洋中の重力波にも適用でき⁽⁵⁾、様々な強非線形現象を解き明かす上での有力な解析法の1つに将来発展していくのではないかと考えている。そこで本報告では、解析法自体の背景や歴史およびその将来性についても言及する(4節)。

航跡波に関連して、ここで具体的にイメージする流れは、山脈のような底面地形の上を過ぎる流れである。海洋中では地形幅が十分に長く、励起される航跡波の波長が地形幅より小さくなることが多い。このような場合、励起される航跡波の振幅は、地形の長さスケールと波長の比を負の指数とする指数関数的に小さくなることが知られている^(1,6) (3. 3節参照)。このとき、通常の漸近解析では航跡波は現れず、上記した「指数漸近解析」により取り扱う必要がある。本報告でも5節において実際に指数漸近解析を駆使した解析を行った。その結果、航跡波の振幅がほぼ有限であっても厳

密な数値解とよく一致し、航跡波の強い非線形性を再現できることが分かった。

2節で問題と基礎方程式を具体的に示し、3節において通常の漸近解析では航跡波解が得られないことを示す。4節で指数漸近解析についての背景や特徴を概説した後、5節で航跡波の問題に対して実際に本解析を適用し、理論解を導出する。6節は結言である。

2. 問題と基礎方程式

一様な重力加速度 g の働く系における自由表面（水面）を伴う空間2次元の定常流れを考える(図1)。一様流の速さは U 、流体深さ（水深）は D とし、粘性、表面張力は考慮しないポテンシャル流とする。基礎方程式は、速度ポテンシャルの一樣流からのずれ $\phi(x, y)$ および自由表面の鉛直変位 $\eta(x)$ に対して、

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 & (-D + B(x) < y < \eta(x)), \\ (U + \phi_x)\eta_x = \phi_y & (y = \eta(x)), \\ g\eta + U\phi_x + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 & (y = \eta(x)), \\ (U + \phi_x)B_x = \phi_y & (y = -D + B(x)), \end{cases} \quad (1a)$$

と表される。ここでは、地形形状として

$$B(x) = B_0 \operatorname{sech}\left(\frac{x}{L}\right) \quad (1b)$$

をとりあげる（他の地形形状も滑らかであれば取り扱えるが、ここでは議論の簡便のため(1b)に限定する）。ただし、 L 、 B_0 はそれぞれ地形幅、地形の最大高さを表す正定数である。また、下流側のみに航跡波が形成される、という放射条件

$$\phi_x(x, y) \rightarrow 0, \quad \eta(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (1c)$$

を課す。

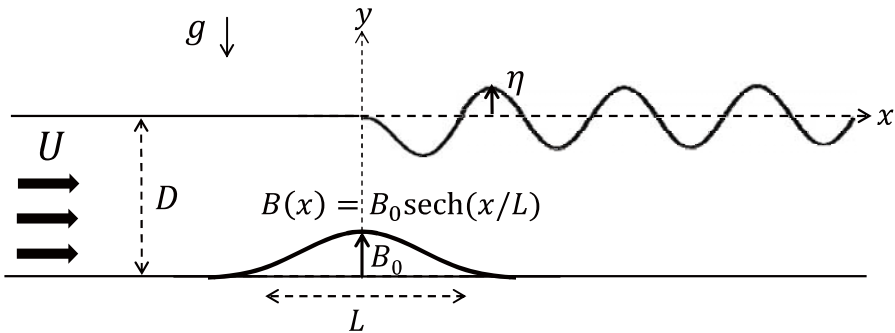


Fig. 1 Sketch of free-surface flow due to a stream U over the bottom topography $B(x) = B_0 \operatorname{sech}(x/L)$.

(1a-c)により記述される本流れは、3つの無次元パラメータ：

$$F \equiv \frac{U}{\sqrt{gD}} = O(1) \quad (\text{フルード数は有限}) \quad (2a)$$

$$\frac{B_0}{D} = O(1) \quad (\text{地形高さは深さと同程度}) \quad (2b)$$

$$\frac{L}{D} \gg 1 \quad (\text{地形幅が深さに比べて十分長い}) \quad (2c)$$

により特徴づけられる．ここで対象とするパラメータ範囲は上記したとおりである．(2a,b)は、流れの速さおよび地形高さが、重力加速度と深さをを用いた代表値と比べて同程度、つまり‘有限振幅’であることを意味する．また(2c)を満たすとき、地形との長さスケールのミスマッチにより、励起される航跡波は指数関数的に小さくなる（詳しくは3. 3節）．海洋中では多くの場合、 $L/D \gg 1$ を満たす．

$0 < F < 1$ のとき、図1に示すような定常な航跡波が地形の下流側に形成される．下流遠方 $x \rightarrow \infty$ においては、方程式は一樣流中の水波に対するものであるから、波高が波長よりも十分小さければ、 $\eta(x)$ の形状は、線形解と同様の三角関数型で表される：

$$\frac{\eta(x)}{D} \sim R \sin(\kappa_0 x + \theta) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (3a)$$

ここで κ_0 は航跡波の波数であり、次の線形分散関係式を満たす与えられた量である．

$$\frac{\tanh \kappa_0 D}{\kappa_0 D} = F^2 (< 1). \quad (3b)$$

一方、(3a)に含まれる航跡波解の振幅(波の高さ) R および位相のずれ θ は、波源となる地形周辺の流れの影響を受けることから、線形解とは必ずしも一致しない（実際、大きくずれる）．つまり、航跡波の形状は線形解と同じ三角関数型となるが、その振幅と位相のずれは線形解から大きく逸脱する．本研究の目的は、この航跡波の振幅 R と位相のずれ θ を、非線形解析により理論的に求めることである．

これ以降、まず3節で通常の漸近解析を行う．そこでは、たとえ $D/L (\ll 1)$ の高次まで進んでも航跡波解が現れない、というパラドックスに陥る．それを受けて4節では、指数関数的に小さい解を抽出するための「指数漸近解析」と呼ばれる解析法を紹介し、5節で本手法を用いた解析を行う．この理論による結果は、航跡波を正しく記述し、航跡波の振幅 R および位相のずれ θ に関して非線形数値解とよく一致することが示される．

3. 静水圧近似解(0次解)と高次解のパラドックス

基礎方程式(1)系の $L/D \gg 1$ の漸近解を、通常どおりのやり方で、 $D/L (\ll 1)$ の級数解の形で探す．

$$\phi(x, y) = \phi_0(x) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \phi_2(x, y) + \dots, \quad \eta(x) = \eta_0(x) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \eta_2(x) + \dots. \quad (4)$$

(4)を(1)に代入して、 D/L に関して同一次数の項を整理し、0次から高次にかけて順に解を求めていく．

3. 1 静水圧近似解 (0 次解)

0 次解は, 深さ y に依らず x のみの関数となり, $u_0(x) = \phi_{0x}$ に対する次の 3 次方程式に帰着する.

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{U}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{u_0}{U}\right)^2 + \left[F^{-2}\left(1 - \frac{B(x)}{D}\right) - 1\right]\frac{u_0}{U} - F^{-2}\frac{B(x)}{D} = 0. \quad (5a)$$

このとき, 鉛直変位の 0 次解 $\eta_0(x)$ は, $u_0(x)$ を用いて

$$\frac{\eta_0(x)}{D} = -F^2 \left[\frac{u_0}{U} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_0}{U} \right)^2 \right], \quad (5b)$$

により与えられる.

(5a) の 3 つの解 $u_0(x)$ のうち, 無限遠方 $|x| \rightarrow \infty$ において 0 となる解はただ 1 つ存在し,

$$\frac{u_0(x)}{U} = -1 + 2F^{-2/3} \sqrt{\tilde{B}_\Delta(x) + 1} \cos\left(\tilde{\varphi}(x) + \frac{\pi}{3}\right) \quad (6a)$$

を静水圧近似解と呼ぶ. ただし, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{B}_\Delta(x)$ は x の既知関数:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\sqrt{\tilde{B}_\Delta(x) (\tilde{B}_\Delta(x)^2 + 3\tilde{B}_\Delta(x) + 3)} \right), \quad (6b)$$

$$\tilde{B}_\Delta(x) = \frac{2}{3F^{2/3}} \frac{B_{\text{cri}} - B(x)}{D}, \quad (6c)$$

であり, (6c) に含まれる B_{cri} は次式で定義される定数:

$$\frac{B_{\text{cri}}}{D} = 1 - \frac{3}{2} F^{2/3} + \frac{F^2}{2} \quad (7)$$

である (図 2). B_{cri} は物理的に重要な意味をもつ, というのも (6b) に現れる $\sqrt{\tilde{B}_\Delta(x)}$ が

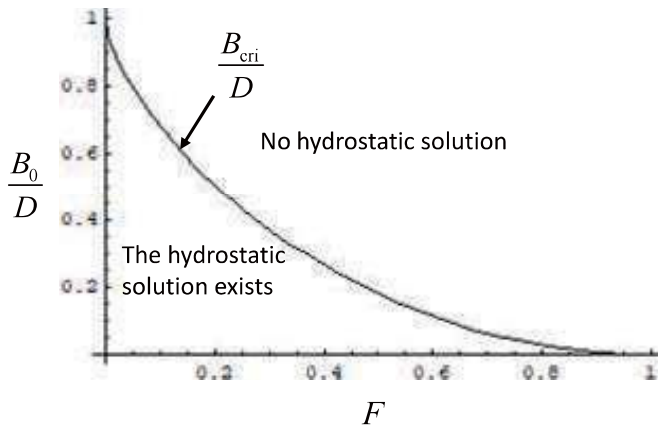


Fig. 2 Critical topography amplitude B_{cri}/D given by (7) as a function of F , when $L/D \gg 1$. The (No) hydrostatic solution exists for the maximum topography height B_0 smaller (greater) than B_{cri} .

実数となるための条件, ひいては静水圧近似解(6a)が実数解となるための条件が,

$$B_0 < B_{\text{cri}} \quad (8)$$

と表されるからである. 図2に示したように, B_{cri} は常に深さ D 以下の値をとることから, 静水圧近似解が存在するためには, 地形の最大高さ $B(x)$ は(7)で定義された臨界高さ $B_{\text{cri}}(<D)$ よりも常に低くなければならない.

3. 2 高次解のパラドックス

続いて, $D/L(\ll 1)$ の高次にすすむと, $\phi_n(x, y)$ および $\eta_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) に対する線形非同次方程式系が得られる. しかし, いくら高次まで進んでも解には航跡波に相当する波の情報が含まれない (高次解のパラドックスと呼ぶ). これは以下の物理的考察および5節の解析で明らかとなるように, 航跡波解が L/D に関して指数関数的に小さく ($\sim O(\exp(-L/D))$) になっており, (4)の級数展開の無限次数よりも小さいところに埋もれているためである. 航跡波解を理論的に求めるためには, 通常とは別の解析法を用いる必要がある (以下の4節および5節参照).

3. 3 指数関数的に小さい航跡波

航跡波は, 位相速度が U と一致するような波であり, したがって波長は地形に関係なく $O(U^2/g) = O(F^2 D)$ の大きさと決まる. この波が指数関数的に小さくなる理由について以下のように説明できる. $L/D \gg 1$ のとき ((2c)より), 航跡波の波長 $O(F^2 D)$ は, 地形幅 L に比して十分小さくなるから, 長さスケールのミスマッチが起きる. このとき, 励起される航跡波の波数における地形のスペクトルは指数関数的に小さい. したがって励起される航跡波の振幅も指数関数的に小さくなるのである.

4. 指数漸近解析とは

このような指数関数的に小さい解を求める際に有効な手段が, ‘exponential asymptotics’ と呼ばれる解析法である. 元々Stokesが1847年に, Airy積分の級数展開が収束しない問題を指摘したことに端を発す⁽⁷⁾. Stokesはこの級数の発散が, 指数関数的に小さい項の存在によることを示唆していたが, その系統的な評価法が確立されたのは, 1世紀後の1958年にDingleによってである^(8,9). 彼は発散級数を有限の指数関数として評価する方法 (ボレル総和法に基づく) を確立し, その後の1980年代からようやく本級数評価法を基とした ‘exponential asymptotics’ の研究が始動した. それ以来, 約40年の研究の歴史をもつ. これまで, 水波⁽¹⁾, 内部波⁽⁵⁾, 界面を伴う狭い隙間流れ (気泡形状やヴィスコスフィンガリング)⁽¹⁰⁾, 樹枝(デンドライト)状結晶成長⁽¹¹⁾などの物理現象の解析に適用されてきたが, 現段階ではまだ一般に広く利用されるほどには普及しておらず, とくに国内学会における具体的な物理現象への適用例を我々は知らない. したがって ‘exponential asymptotics’ の日本語訳がなく, これまでの国内学会や研究集会においては単に「指数漸近解析」という ‘直訳’ 表現を用いてきた.

普及を妨げる原因の1つが, 解析の複雑さにある. 現在一般に認知されている ‘exponential asymptotics’ の手法は, 指数関数的に小さい項をあぶり出すために, WKB

法を用いる。WKB 近似解は未定定数を含み、WKB 近似解の破綻する臨界点周りの‘内部解’との接続（マッチング）によって決まる。ただし、指数関数的に小さい解の臨界点は x の虚軸上に現れるため、物理空間を複素空間へ拡張する必要がある。つまり解析の次元が単純に 2 倍となる。また、内部解は上述のように発散級数となるため、Dingle が考案した発散級数項を有限関数として評価するための独特な数学的手法も要する。

一方で、本解析法はその適用範囲が水波等にとどまらない汎用性をもち、大気・海洋中の未解明波動現象を説明できる可能性を秘める。例えば大気・海洋中の近慣性重力波は、地形を過ぎる地衡流や自発的放射などの大規模なバランス流により励起され、地形長さやバランス流のスケールに比して励起される波の波長は十分小さく、指数漸近解析による解析を必要とする⁽⁶⁾。いずれも波の振幅は強い非線形性を示すことが観測され、数値シミュレーションにおいても確かめられている^(13, 15-16)。大気中の重力波は線形理論による見積りよりも大きく、大気大循環との運動量交換を通して気候変動に深く関わっている^(12, 13)。海洋中の慣性重力波は、バランス流との長さスケールのミスマッチによってほとんど励起されないはずであるが、実際には砕波に至るほどの強い重力波が観測され、深層循環に多大な影響を及ぼしている⁽¹⁴⁻¹⁶⁾。いずれも予測困難な強非線形の未解明現象であるが、指数漸近解析によって理論解を求めることができる（厳密には、航跡波が有限となる直前の地形振幅までの理論解を求めることができる）。問題は、解析法をより簡便なものとすることである。

ここ数年、我々は物理空間を複素拡張する従来のやり方とは別に、方程式をフーリエ変換し、波数空間上で解析する方法を提案してきた⁽¹⁻⁴⁾。この場合、解析は常に波数空間の実軸上にとどまるため、解析の次元数は変わらない。また、発散級数項を指数関数として評価するための特殊な数学的手法も必要なく、数学を専門としない我々にとって取り扱いやすい形の解析法となっている。以下、内部解と解の接続（マッチング）に本手法を用いる。

5. 高次解に対する指数漸近解析

(1)の解を、単純に、静水圧近似解 (ϕ_0, η_0) とそこからのずれ (ϕ_1, η_1) との和により

$$\phi(x, y) = \phi_0(x) + \phi_1(x, y), \quad \eta(x) = \eta_0(x) + \eta_1(x), \quad (9)$$

と表す。ずれの解に含まれる指数関数的に小さい解を求めることで、航跡波解(3a)の振幅 R および位相のずれ θ を得ることが本節の目的である。

5. 1 外部解

(9)を(1)に代入し、 (ϕ_1, η_1) に対する方程式系を WKB 法により解く。つまり、水平 x 方向に関して地形スケール L だけでなく、それよりも短い深さ D 程度のスケールも合わせて考慮する。その結果、外部解として

$$\frac{\eta_1(x)}{D} = \begin{cases} -iC \left(1 + \frac{u_0}{U} \right) \kappa(x) D \exp \left[i \int_0^x \kappa(x') dx' + \int_{\infty}^x \kappa^{(1)}(x') dx' \right] \cosh [\kappa(x) D_f(x)] + \text{c.c.} & (x > 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \quad (10)$$

が得られる (ϕ の結果は省略する). ここで, 上流側($x < 0$)の解が 0 となるのは放射条件(1c)による. また $C = C_r \exp(iC_i)$ は未定の複素定数であり, c.c.は複素共役項を表す. 指数に含まれる $\kappa(x)$ は波数を表し, 静水圧近似解の流れにおける線形分散関係式を満たす:

$$\frac{\tanh[\kappa(x)D_T(x)]}{\kappa(x)D} = F^2 \left[1 + \frac{u_0(x)}{U} \right]^2, \quad (11a)$$

$$D_T(x) \equiv D + \eta_0(x) - B(x). \quad (11b)$$

下流遠方 $x \rightarrow \infty$ においては, $u_0(x), \eta_0(x), B(x) \rightarrow 0$ であるから, (11a)は一様流れの分散関係式(3b)と一致し, したがって $\kappa(x)$ は κ_0 と一致する. また, $\kappa^{(1)}(x)$ はその次のオーダー($=O(L^{-1})$)の解であり, 陽的に,

$$\kappa^{(1)}(x) = \frac{D_T(x) \left(-\frac{\kappa_x}{\kappa(x)} + \frac{u_{0x}}{U + u_0} \right) \sinh^2[\kappa(x)D_T(x)]}{F^2 D(1 + u_0/U)^2 \cosh^2[\kappa(x)D_T(x)] - D_T(x)} \quad (12)$$

と得られる. 下流遠方 $x \rightarrow \infty$ において $\kappa^{(1)}(x)$ は 0 となる.

以上により, 外部解(10)は下流遠方 $x \rightarrow \infty$ において,

$$\frac{\eta_1(x)}{D} \sim R \sin(\kappa_0 x + \theta) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (13a)$$

$$R = 2C_r \kappa_0 D \cosh[\kappa_0 D], \quad \theta = J_i + C_i. \quad (13b)$$

ただし,

$$J_i = \int_0^\infty (\kappa(x) - \kappa_0) dx, \quad (13c)$$

となる. 2節で仮定した航跡波解(3)と形状が一致することが分かる. ただし振幅 R , 位相速度 θ に未定定数 C ($=C_r \exp(iC_i)$) を含むため, 次項で内部解を求め, 上記外部解(10)と接続することによって C を決定する必要がある.

5. 2 内部解

従来の方法では, 内部解を求める際の解析は x の虚軸上にある臨界点周りの解析となる. 実際, 0 次の静水圧近似解は虚軸上の

$$x = \pm i\gamma \quad \left(\gamma \equiv L \cos^{-1} \left(\frac{B_0}{B_{\text{cri}}} \right) \right), \quad (14a)$$

において, (6b)右辺の $\sqrt{\tilde{B}_\Delta(x)}$ が 0 となり分岐型の特異点をもつ. 静水圧近似解 $u_0(x)$ はこの点近傍において,

$$u_0(x) \sim -1 + F^{-2/3} - \tilde{A} \sqrt{\gamma \pm ix} \quad (x \rightarrow \pm i\gamma), \quad (14b)$$

$$\tilde{A} = \sqrt{\frac{2B_{\text{cri}}}{3DF^2}} \left[\left(\frac{B_{\text{cri}}}{B_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/4} \quad (14c)$$

と表されることから, $x = \pm i\gamma$ が臨界点となる.

ここでは, 虚軸上の臨界点周りの解析に必要なとされる物理空間の複素拡張や発散級

数の処理を避け、代わりに波数空間上において解析を実施する．つまり，フーリエ変換：

$$\hat{\eta}_l(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_l(x) e^{-ikx} dx \quad (15)$$

を導入し，波数 k の実軸上において解析を行う．

まず，外部解(10)の(c.c.を除いた)フーリエ変換 $\hat{\eta}_l^{(\text{out})}(k)$ は，(10)を(15)に代入することで得られ，指数に含まれる $\kappa(x)$ が $O(D^{-1})$ の量であることから，この外部解は $k = O(D^{-1})$ における解である．内部解との接続の際には，それよりも小さい $k \ll D^{-1}$ における振舞が必要となる．そこで $\kappa(x) \sim 3\sqrt{\tilde{A}} F^{-1/3} D^{-1} [(\gamma \pm ix)/L]^{1/4}$ ， $\kappa^{(1)}(x) \sim -3/[8(x \mp i\gamma)]$ ($x \rightarrow \pm i\gamma$) とラプラスの方法を用いて x に関する積分を実行すると，結局， $(L/D)^{4/5} \ll kL \ll L/D$ の範囲で有効な解として，

$$\frac{\hat{\eta}_l^{(\text{out})}(k)}{D} \sim C \sqrt{\frac{2D}{3\pi L}} F^{-\frac{9}{2}} \tilde{A}^{-1/4} \exp(\gamma\kappa_0 - J_r - J_r^{(1)}) k D \exp\left(-\gamma k + \frac{F^{4/3} L D^4}{405 \tilde{A}^2} k^5\right) \left(\left(\frac{L}{D}\right)^{4/5} \ll kL \ll \frac{L}{D}\right) \quad (16a)$$

が得られる．ここで，指数に含まれる γ は(14a)により定義され， J_r ， $J_r^{(1)}$ は次の実定数である：

$$J_r = \int_0^\gamma (\kappa_0 - \kappa(ix)) dx, \quad (16b)$$

$$J_r^{(1)} = \int_0^\gamma \left\{ \frac{3}{8(\gamma - x)} - i\kappa^{(1)}(ix) \right\} dx + \int_0^\infty \kappa^{(1)}(x) dx - \frac{3}{8} \ln\left(\frac{\gamma}{L}\right). \quad (16c)$$

一方，本題の内部解 $\hat{u}_l^{(\text{in})}(k)$ は，外部解(16a)の有効範囲の下限が $kL \gg (L/D)^{4/5}$ であることを踏まえ， $kL = O((L/D)^{4/5})$ における解を次の形で探す．

$$kL = \left(\frac{L}{D}\right)^{4/5} \times \tilde{k}, \quad (17a)$$

$$\frac{\hat{\eta}_l^{(\text{in})}(k)}{D} \sim \left(\frac{D}{L}\right)^{6/5} \exp(-\gamma k) \times H(\tilde{k}). \quad (17b)$$

つまり，内部解は指数関数 $\exp(-\gamma k)$ に比例して減衰し，その振幅関数 $H(\tilde{k})$ が新たな未知変数となる．

未知変数 $H(\tilde{k})$ に対する式は，(9)を(1)に代入したときに求めたずれ (ϕ, η_l) に対する式をフーリエ変換し，そこに(17a,b)を代入することによって得られる．結局， $D/L \ll 1$ に関する最低次で，

$$\frac{\tilde{k}^2}{3} H(\tilde{k}) - 3 \int_0^{\tilde{k}} \left(\frac{\tilde{A}}{F^{2/3} \sqrt{\pi \lambda}} \frac{dH(\tilde{k} - \lambda)}{d\tilde{k}} + \frac{F^2}{2} H(\lambda) H(\tilde{k} - \lambda) \right) d\lambda = \frac{\tilde{A}}{6\sqrt{\pi} F^{8/3}} \tilde{k}^{1/2}, \quad (18)$$

という非線形方程式が導かれる．

外部解との接続の際には， $\tilde{k} \gg 1$ ，つまり $kL \gg (L/D)^{4/5}$ における解の振舞が必要となる．そこで，(18)の $\tilde{k} \gg 1$ における解の振舞を調べると，係数を除いて $H(\tilde{k})$ を理論的に求めることができる．それを(17b)に代入して，結局，

$$\frac{\hat{\eta}_1^{(\text{in})}(k)}{D} \sim -C_0 F^{-2} \frac{D}{L} k D \exp\left(-\gamma k + \frac{F^{4/3} L D^4}{405 \tilde{A}^2} k^5\right) \quad \left(\left(\frac{L}{D}\right)^{4/5} \ll k L \ll \frac{L}{D}\right) \quad (19a)$$

が得られる．ここで，係数

$$C_0 = 0.0613 \dots \quad (19b)$$

は，地形の形状 $B(x)$ やその他パラメータに依存しない普遍的な定数である．

5. 3 解の接続（マッチング）

最後に，外部解(16)と内部解(19)が，共通の有効範囲である $(L/D)^{4/5} \ll k L \ll L/D$ において一致するための条件（マッチング）より，未定定数 C が

$$C = -C_0 \sqrt{\frac{3\pi D}{2L}} F^{5/2} \tilde{A}^{1/4} \exp(-\gamma \kappa_0 + J_r + J_r^{(1)}) \quad (20)$$

と決まる（実数である）．

以上により，下流遠方 $x \rightarrow \infty$ における航跡波解は(3a)のように表され，その振幅 R および位相のずれ θ は，(13b)より，

$$R = -C_0 \sqrt{\frac{6\pi D}{L}} \tilde{A}^{1/4} F^{5/2} \kappa_0 D \exp(-\gamma \kappa_0 + J_r + J_r^{(1)}) \cosh \kappa_0 D, \quad \theta = J_i, \quad (21)$$

となる．ここで， J_r ， $J_r^{(1)}$ ， J_i は，(16a,b)，(13c)により定義される実定数である．なお，線形解は次のようになる．

$$R_{\text{lin}} = -\frac{4\pi B_0 L}{D^2} \left(\frac{\cosh \kappa_0 D}{\kappa_0 D} - \frac{1}{\sinh \kappa_0 D} \right)^{-1} e^{\frac{-\pi \kappa_0}{2\mu}}, \quad \theta_{\text{lin}} = 0. \quad (22)$$

図3は，航跡波の波形 $\eta(x)$ について，(3a)と(21)で表される指数漸近解析の結果（赤線）と，(1)の厳密な数値解（黒線）とを比較したものである． $F=0.5$ ， $L/D=2.5$ に対する結果を，4種類の地形振幅 B_0/D に対して示してある．地形振幅 $B_0/D=0.13$ ， 0.15 ， 0.165 においては，航跡波の振幅，位相ともに非常によく一致している．臨界振幅 $B_{\text{cri}}/D=0.18$ に近い $B_0/D=0.17$ においてはややずれが見られるが，これは指数漸近解析が元々，指数関数的に小さい解を対象としているためであり，有限振幅の波まである程度再現できているところが，むしろ興味深いといえる．線形解も合わせて示した（ $B_0/D=0.17$ に対してのみ）が，こちらは図上で航跡波が確認できないほどに小さかった．

図4に，航跡波の振幅 $|R|/D$ を，地形振幅 B_0/D の関数として示した．臨界振幅 $B_{\text{cri}}/D=0.18$ の近くで航跡波の振幅が急に増加する様子が分かる．また， L/D が大きいほどこの変化はより急となり，臨界振幅のより近くで航跡波の振幅は増加する．このような強い非線形現象を，指数漸近解析は少なくとも最初の立ち上がりの部分に関しては再現できていることが分かる．とくに $L/D=5$ の場合，地形振幅／深さである B_0/D が 0.16 から 0.18 というわずかな 0.02 の間隔で，航跡波の振幅がほぼ 0 から最大振幅まで変化している．さらに大きな $L/D=10$ のときは， B_0/D が 0.174 から 0.18 というより狭い間隔で同様の現象が起きることを確認した（図なし）． L/D が大きいほ

ど、航跡波は臨界振幅近傍において‘極端に強い非線形性’を示し、指数漸近解析はそれを理論的に記述できるようである。

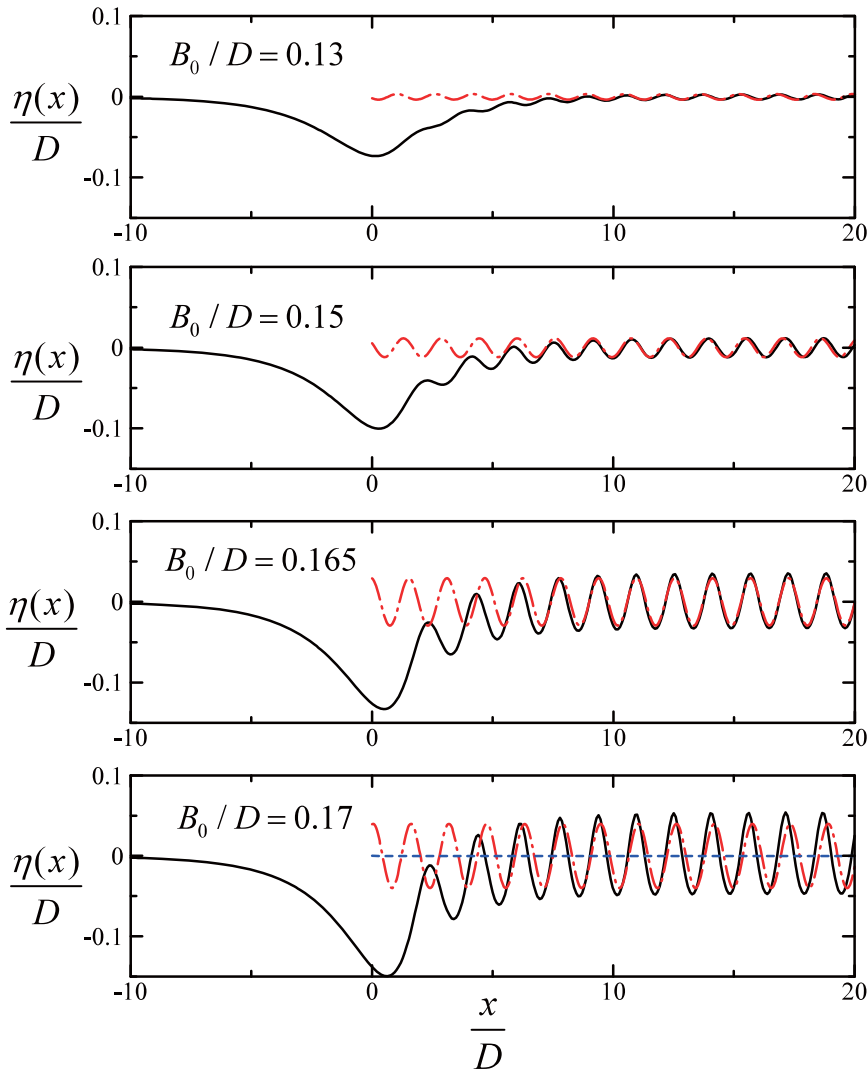


Fig. 3 Steady-state downstream wave profiles $\eta(x)/D$ as functions of x/D in free-surface flow over the topography $B(x) = B_0 \operatorname{sech}(x/L)$ for $F = 0.5$ and $L/D = 2.5$ with B_0 less than the critical value $B_{\text{cri}} (= 0.18D)$: $B_0/D = 0.13, 0.15, 0.165$ and 0.17 from top. (—): exact numerical solution of (1); (- - -): exponential asymptotic theory (3a) with (21); (- - - -): linear theory (3a) with (22) (shown only for $B_0/D = 0.17$).

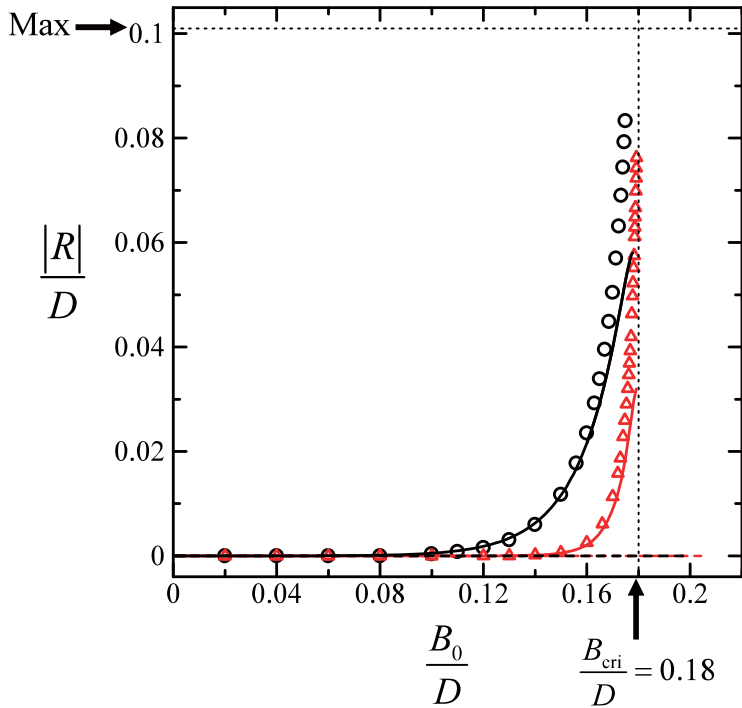


Fig. 4 Downstream wave amplitudes $|R|/D$ as functions of topography amplitude B_0/D in free-surface flow over the topography $B(x) = B_0 \operatorname{sech}(x/L)$ for $F = 0.5$ with $L/D = 2.5$ (black) and 5 (red). ($\circ$, $\triangle$): exact numerical solution; (—, —): exponential asymptotic theory (21); (---, ---): linear theory (22) (almost zero in the figure). The vertical and horizontal dotted lines denote the critical topography amplitude $B_{\text{cri}}/D = 0.18$ and the maximum wave amplitude, respectively.

6. 結言

海底山脈を想定した地形を過ぎる一様流を考え、地形幅が流体深さよりも十分に長い場合に、地形の背後に形成される航跡波は非常に強い非線形性を示すことが分かった。具体的には、地形の振幅がフルード数に依存した臨界振幅に近づくと、地形振幅のわずかな変化に対して、航跡波の振幅がほぼ 0 から最大振幅まで急に成長するのである。そしてこのような‘極端に強い非線形性’を、指数漸近解析は理論的に記述できることを示した。

4 節で述べたように、このような航跡波の強い非線形現象は、水波にとどまらず、大気・海洋中の近慣性重力波にもあてはまる。地形を過ぎる地衡流や自発的放射などの大規模なバランス流によって、従来の理論では到底説明できない強い重力波が励起

されることが、観測によっても数値シミュレーションによっても確かめられている⁽¹²⁻¹⁶⁾。ここで紹介した指数漸近解析を用いて理論解を求めれば、この未解明現象も説明できると思われる。

参考文献

- (1) Kataoka, T., Akylas, T. R., “Steady radiating gravity waves: An exponential asymptotics approach”, *Water Waves* **6** (2024), pp. 79–96.
- (2) Kataoka T., Akylas T. R., “Nonlinear effects in steady radiating waves: An exponential asymptotics approach”, *Physica D*, **435** (2022), 133272.
- (3) Akylas, T. R., Yang, T. -S., “On short-scale oscillatory tails of long-wave disturbances”, *Stud. Appl. Math.* **94** (1995), pp. 1–20.
- (4) Kataoka T., Akylas T. R., “Exponential-asymptotics treatment of steady radiating waves from sources of finite strength”, *Physica D*, **481** (2025), 134832.
- (5) Yang, T. -S., Akylas, T. R., “Finite-amplitude effects on steady lee-wave patterns in subcritical stratified flow over topography”, *J. Fluid Mech.*, **308** (1996), pp. 147–170.
- (6) Vanneste, J., “Balance and spontaneous wave generation in geophysical flows”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **45** (2013), pp. 147–172.
- (7) Stokes, G. G., “On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series,” *Trans. Camb. Phil. Soc.* **9** pp. 379-407 (1847).
- (8) Dingle, R. B., “Asymptotic expansions and converging factors I. General theory and basic converging factors”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **244** (1958), pp. 456–475.
- (9) Dingle, R. B., “*Asymptotic expansions: their derivation and interpretation*,” Academic Press (1973).
- (10) Lustri, C. J., Green C. C., McCue S. W., “Selection of a Hele-Shaw bubble via exponential asymptotics”, *SIAM J. Appl. Math.*, **80** (2020), pp. 289–311.
- (11) Kruskal, M. D., Segur, H., “Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth”, *Stud. Appl. Math.* **85** (1991), pp. 129–181.
- (12) 佐藤, “大気重力波と気象学の関わり”, 京都大学数理解析研究所講究録, 1483 (2006), pp. 90–99.
- (13) Sato, K., Tateno, S., Watanabe, S., Kawatani, Y., “Gravity wave characteristics in the southern hemisphere revealed by a high-resolution middle-atmosphere general circulation model,” *J. Atmos. Sci.*, **72** (2015), pp. 2109–2130.
- (14) 丹羽, “海洋深層の乱流混合過程に供給される内部波エネルギーのグローバル分布に関する研究の進展と課題”, 海の研究, 26 (2017), pp. 175–188.
- (15) Zemskova, V. E., Grisouard, N., “Near-inertial dissipation due to stratified flow over abyssal topography”, *J. Phys. Oceanogr.* **51** (2021), pp. 2483–2504.
- (16) Xie, X., Liu, X., Cheu, Z., Wang, Y., Chen, D., Li, W., Zhang, D., “Pure inertial waves radiating from low-frequency flows over large-scale topography”, *Geophys. Res. Lett.* **50** (2023), e2022GL099889.