

A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 佐伯 修
Osamu Saeki

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan

e-mail: saeki@imi.kyushu-u.ac.jp

home-page: <http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/>

概要

Based on the signature formula for stable maps of closed oriented 4-manifolds into 3-manifolds, the author defined a Vassiliev type invariant of order one for stable maps of closed oriented 3-manifolds into surfaces. In this article, we announce an explicit formula for computing the invariant in terms of a certain linking matrix for the framed link consisting of regular fibers of a given stable map. As a corollary, we get a signature formula for 4-manifolds with boundary in terms of their singular fibers of certain “stable” maps. An enlightening explicit example is also given.

1 概要

本稿の内容は、プレプリント [23] に基づいている。

著者は [21] において、**安定写像の特異ファイバー理論**を展開し、その最終節において、向き付けられた閉4次元多様体から3次元多様体への安定写像の特異ファイバーを用いて、4次元多様体の signature が記述できることをアナウンスした（そしてそれはその後、[24, 22] において証明された）。そしてその結果を用いると、向き付けられた閉3次元多様体から曲面への安定写像に対する、整数値を取る order 1 の Vassiliev 型不変量が構成できることにも言及した。その構成は、（境界に沿って貼り合わせることに對する加法性を持つ）不変量に對する公式が閉多様体に関してあれば、境界に對する不変量を定義できる、という4次元多様体論で頻繁に登場する principle に基づいている。たとえば、Rohlin の定理 [18] は、spin 構造を持

つ閉4次元多様体の signature に関する定理であるが、それを用いることで、spin 3次元多様体（あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -homology 3球面であれば spin 構造は一意的に定まるので、spin 構造は不要）に対する Rohlin 不変量が定義できる（たとえば [6, 7] 参照）。Hirzebruch signature theorem が、eta 不変量によって境界を持つ多様体の場合に拡張できる ([1]) ことも、その principle に基づいているとも言える。

ところが、その3次元多様体上の安定写像に対する不変量に関して、その後残念なことに特に何も研究が行われてこなかった。（こうした興味深い問題を、上記本の最終節に書いてしまったのが失敗だったのかも知れない。）そこで著者は（ある意味でその責任を取って）最近再度研究を開始し、何とかその不変量を計算するための公式を得たので、その概要を本稿で紹介したい。その計算公式は、面白いことに、与えられた安定写像の正則ファイバーを用いて記述される。それらの、ある意味での代表元をすべて使って絡み目を作る。各成分は写像を用いて framing が定まるので、こうして framed link が得られる。このうち、3次元多様体の中で homology 的に消える部分のみを取り出し、それに対する linking matrix を考える。上記不変量は、この行列の符号数に一致するのである。したがってこの公式を用いれば、上記不変量が4次元を使わず、純粋に3次元の情報から計算できることになる。

本稿の構成は以下の通りである。まず2節において、特異ファイバーの定式化の復習をし、閉4次元多様体に対する signature 公式を述べ、その証明の概略を解説する。3節では、向き付けられた閉3次元多様体上の安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対する不変量 $\sigma(f) \in \mathbb{Z}$ を定義し、その性質を述べる。4節で、 $\sigma(f)$ に対する計算公式を定式化して、その証明のアイデアを述べる。最後に5節において、具体的な S^3 上の（非自明な）安定写像に対する計算例を述べる。この最後の例に関しては、 S^3 上の標準的な写像（いわゆる special generic map）とその写像を結ぶ generic なホモトピーも具体的に与え、それが起こす codimension 1 transitions も明らかにする。こうして、不変量 σ が order 1 の Vassiliev 型不変量であることを、読者に見て取っていただければ幸いである。

2 安定写像と特異ファイバー

以下、多様体やその間の写像はすべて C^∞ 級であるものとする。また、多様体間の写像 $f: M^n \rightarrow N^p$ に対して、 $S(f) (\subset M^n)$ で、 f の特異点全体のなす集合を表すものとする。

定義 2.1 値域多様体 N^p の点 y に対して、 f の y 上のファイバーとは、写像芽

$$f: (M^n, f^{-1}(y)) \rightarrow (N^p, y)$$

を意味するものとする。また、 $y \in f(S(f))$ のとき、これを特異ファイバーと呼ぶ。

定義 2.2 2つの写像 $f_i: M_i^n \rightarrow N_i^p$ と, 点 $y_i \in N_i^p$ ($i = 0, 1$) を考える. f_0 の y_0 上のファイバーと, f_1 の y_1 上のファイバーが同値であるとは, 微分同相写像芽 Ψ, ψ で, 次の図式を可換にするものが存在するときをいう.

$$\begin{array}{ccc} (M_0^n, f_0^{-1}(y_0)) & \xrightarrow{\Psi} & (M_1^n, f_1^{-1}(y_1)) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ (N_0^p, y_0) & \xrightarrow{\psi} & (N_1^p, y_1) \end{array}$$

定義 2.3 写像 $f: M^n \rightarrow N^p$ が安定写像であるとは, Whitney C^∞ 位相に関して, 写像空間 $C^\infty(M^n, N^p)$ における f の開近傍 U_f が存在して, 次の (*1) を満たすときをいう (詳細はたとえば [5] を参照).

(*1) 勝手な $g \in U_f$ に対して, g は f と右左同値である. すなわち図式

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\Phi} & M^n \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ N^p & \xrightarrow{\varphi} & N^p \end{array}$$

を可換にする微分同相写像 Φ, φ が存在する.

例 2.4 以下の例では, 定義域多様体はコンパクトで境界がないものとする.

(1) 関数 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}$ が安定写像であるためには, Morse 関数であることが必要十分である.

(2) 写像 $f: M^3 \rightarrow N^2$ が安定写像であるためには, 次の (*2) が必要十分である.

(*2) f の特異点は fold と cusp のみであり, $f|_{S(f) \setminus \{\text{cusps}\}}$ は正規交差のはめ込みであって, 各 cusp の像の逆像に含まれる特異点はその cusp 自身しかない.

ここで, fold は, $(x, y, z) \mapsto (x, y^2 \pm z^2)$ を標準形として持つ特異点であり, cusp は, $(x, y, z) \mapsto (x, y^3 + xy - z^2)$ を標準形として持つ特異点である.

(3) 写像 $f: M^4 \rightarrow N^3$ が安定写像であるためには, 次の (*3) が必要十分である.

(*3) f の特異点は fold, cusp, swallow-tail のみであり, $f|_{S(f)}$ は cusp と swallow-tail の外で正規交差のはめ込みであって, $f(S(f))$ の各点の近くでの様子は図1のようになっている.

ここで, fold は, $(x, y, z, w) \mapsto (x, y, z^2 \pm w^2)$ を標準形として持つ特異点であり, cusp は, $(x, y, z, w) \mapsto (x, y, z^3 + yz - w^2)$ を標準形として持つ特異点であり, swallow-tail は, $(x, y, z, w) \mapsto (x, y, z^4 + xz^2 + yz \pm w^2)$ を標準形として持つ特異点である.

[21]において, n 次元閉多様体から $(n-1)$ 次元多様体 ($n = 2, 3, 4$) への安定写像の特異ファイバーが分類されている. 特に $n = 4$ の場合は以下の結果がある.

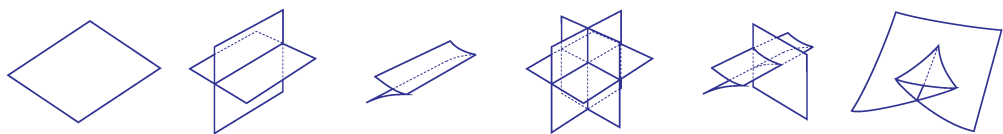


図 1: 安定写像 $f : M^4 \rightarrow N^3$ の特異値集合 $f(S(f))$ ($\subset N^3$) の各点の近傍での様子

定理 2.5 ([21]) 向き付け可能な閉 4 次元多様体から 3 次元多様体への安定写像の特異ファイバーは、非特異 S^1 ファイバー成分を除いて、図 2 のいずれかに同値である。

$\kappa = 1$	$\bullet$	∞				
$\kappa = 2$	$\bullet\bullet$	$\bullet \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$
$\kappa = 3$	$\bullet\bullet\bullet$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\bullet \infty$	$\bullet \infty$
	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$
	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$	$\infty \infty$
	$\blacksquare$					

図 2: 安定写像 $M^4 \rightarrow N^3$ の特異ファイバーリスト (M^4 は向き付け可能な閉 4 次元多様体)

なお、図 2 には 1 点の逆像の一部しか描かれていないが、それぞれはそれに沿った写像芽を表していることに注意して欲しい。たとえば、一番最初と一番最後の特異ファイバーは、1 点の逆像の連結成分としてはどちらも 1 点を表しているが、その点での写像芽は異なるので、異なるシンボルで表現している。

それから、 κ は、それぞれの特異ファイバーの余次元を表す。すなわち、値域多様体内で、該当の特異ファイバーに対応する点全体のなす集合は部分多様体をなすが、その値域多様体内での余次元のことである。

さて、定理 2.5 に登場する特異ファイバーのうち、もっとも本質的なものはどれか？これに対する一つの答えは以下で与えられる。

定理 2.6 ([24, 22]) 向き付けられた閉 4 次元多様体から 3 次元多様体への安定写像 $f: M^4 \rightarrow N^3$ に対して,

$$\text{sign}(M^4) = ||\text{III}^8(f)||$$

が成り立つ. ここで, $\text{sign}(M^4)$ は M^4 の交叉形式 $Q_{M^4}: H_2(M^4; \mathbf{Q}) \times H_2(M^4; \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$ の符号数であり (これを 4 次元多様体 M^4 の **signature** と呼ぶ), $||\text{III}^8(f)||$ は III^8 型特異ファイバー (図 3 参照) の符号付き個数を表す.

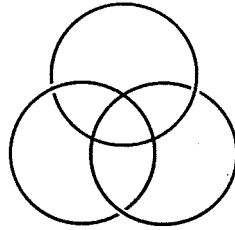


図 3: III^8 型特異ファイバー

III^8 型特異ファイバーの符号は, 定義域多様体 M^4 の向きを用いて定義される (値域多様体 N^3 の向きには関係しない). 詳細は [24] を参照のこと.

定理 2.6 の証明のアイデア. 簡単のため $N^3 = \mathbf{R}^3$ と仮定しよう. (以下の証明は [24] による.)

Step 1. $||\text{III}^8(f)||$ は (有向) 同境不変である. すなわち, 2 つの安定写像 $f_i: M_i^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ($i = 0, 1$) が有向同境であれば,

$$||\text{III}^8(f_0)|| = ||\text{III}^8(f_1)||$$

が成り立つ. ここで, 2 つの (向き付けられた閉 4 次元多様体上の) 安定写像 $f_i: M_i^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ($i = 0, 1$) が **有向同境** とは, コンパクトで向き付けられた 5 次元多様体 V^5 で, $\partial V^5 = (-M_0^4) \cup M_1^4$ なるものと, 写像 $F: V^5 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times [0, 1]$ で, 以下の条件を満たすものが存在するときをいう (図 4 参照).

- (1) $F^{-1}(\mathbf{R}^3 \times \{i\}) = M_i^4$ ($i = 0, 1$).
- (2) $f_i = F|_{M_i^4}: M_i^4 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times \{i\}$ ($i = 0, 1$).
- (3) $F|_{\text{Int } V^5}: \text{Int } V^5 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times (0, 1)$ は (proper な) 安定写像.

(なお, より正確には, F は V^5 の境界のカラー近傍では, 安定写像 f_i ($i = 0, 1$) の自明な 1-parameter 族になっていることも課す.)

有向同境不変であることは, 向き付けられた 5 次元多様体から 4 次元多様体への proper な安定写像の特異ファイバーの隣接関係に基づく **普遍複体** のコホモロジー群を計算することで示せる. 実際, F に対する III^8 -locus を値域多様体 $\mathbf{R}^3 \times [0, 1]$

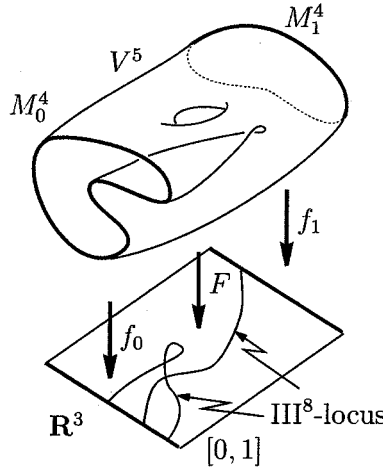


図 4: 有向同境な 2 つの安定写像 $f_i: M_i^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $i = 0, 1$.

で考えると, それは 1 次元有向チェーンをなすが, その境界点は $\mathbf{R}^3 \times \{0, 1\}$ にあり, (符号付き) 境界点の個数が $-||\text{III}^8(f_0)|| + ||\text{III}^8(f_1)||$ に一致することが示せる.

さて, 同境不変であれば, 次のように定義される写像 $\alpha: \Omega_4 \rightarrow \mathbf{Z}$ が well-defined な準同型写像となることがわかる. ここで, Ω_4 は通常の (多様体に対する) 4 次元有向同境群であり, 勝手な向き付けられた閉 4 次元多様体 M^4 に対して, 勝手な安定写像 $f: M^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を考えて, $\alpha([M^4]) = ||\text{III}^8(f)||$ と定義する. ($[M^4] \in \Omega_4$ は多様体 M^4 の有向同境類を表す.)

なお, $\text{signature}: \Omega_4 \rightarrow \mathbf{Z}$ ($\text{signature}([M^4]) := \text{sign}(M^4)$) が well-defined な同型写像を与えることが知られていることを注意しておく [18].

Step 2. 非自明な例を構成する.

具体的な安定写像 $f: \mathbf{CP}^2 \# 2\overline{\mathbf{CP}}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ で, ちょうど 1 つの (符号が負の) III^8 型特異ファイバーを持つものを構成できる (詳細は [21, 24] 参照). ここで, $\text{sign}(\mathbf{CP}^2 \# 2\overline{\mathbf{CP}}^2) = -1$ であることに注意すれば, 準同型写像 $\alpha: \Omega_4 \rightarrow \mathbf{Z}$ が同型写像となることがわかり, $\alpha = \text{signature}$ であることもわかって, 証明が終わる.

なお, より幾何的な証明が [22] で与えられている.

3 3次元多様体上の安定写像に対するある不変量

$f: M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を, 向き付けられた閉 3 次元多様体上の安定写像とする. このとき, コンパクトで向き付けられた 4 次元多様体 V^4 で $\partial V^4 = M^3$ なるものと, 写像 $F: V^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [0, \infty)$ で, 次を満たすものが存在することが知られている.

$$(1) F^{-1}(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) = \partial V^4 = M^3.$$

$$(2) F|_{\partial V^4} = f: M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \{0\}.$$

(3) $F|_{\text{Int } V^4} : \text{Int } V^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times (0, \infty)$ は (proper な) 安定写像.
(3次元有向同境界群が自明であること [17] による.)

このことを用いて, [21] の最終章において以下の定義が与えられている.

定義 3.1 (Suggested by Furuta (2004)) 安定写像 $f : M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対して,

$$\sigma(f) = \text{sign}(V^4) - ||\text{III}^8(F)|| \in \mathbf{Z}$$

と定義する. ここで $\text{sign}(V^4)$ はコンパクトで向き付けられた, 境界を持つ 4次元多様体 V^4 の signature であり, $||\text{III}^8(F)||$ は F の III^8 型特異ファイバーの符号付き個数を表す.

補題 3.2 $\sigma(f) \in \mathbf{Z}$ の値は, コンパクトで向き付けられた 4次元多様体 V^4 や (f を拡張する) 写像 F の選び方に依存しない.

証明. 別の拡張 $F' : V' \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [0, \infty)$ があったとする. すると, $-F' : -V' \rightarrow (-\infty, 0]$ と F を (定義域と値域でそれぞれ自然に) 境界で貼り合わせてできる写像

$$(-F') \cup F : (-V') \cup V^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times (-\infty, +\infty)$$

は, 向き付けられた閉 4次元多様体上の安定写像となる (図 5 参照).

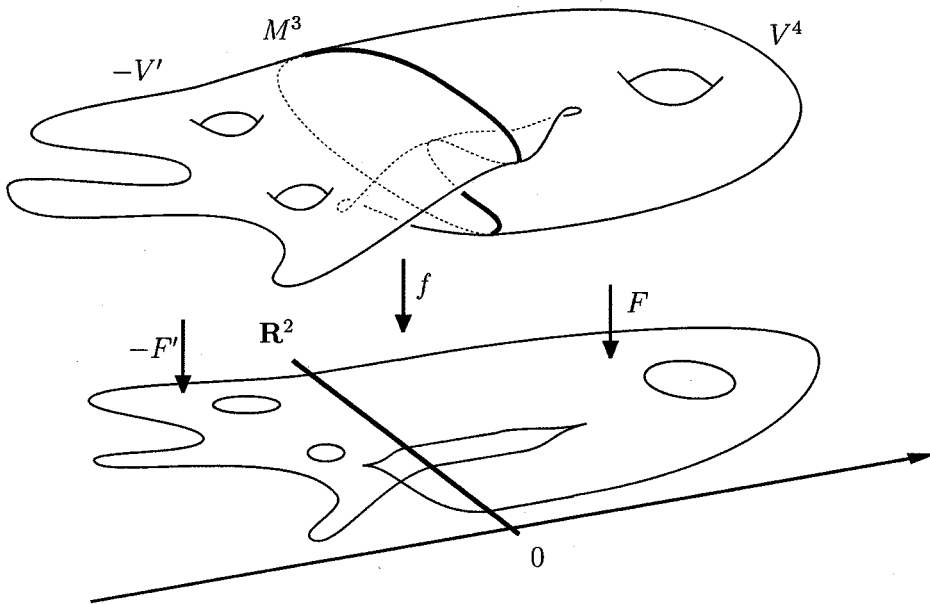


図 5: 安定写像 $(-F') \cup F : (-V') \cup V^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times (-\infty, +\infty)$

すると定理 2.6 より,

$$\text{sign}((-V') \cup V^4) = ||\text{III}^8((-F') \cup F)||$$

がわかる. 一方, Novikov additivity (たとえば [3, 25] を参照) より,

$$\text{sign}((-V') \cup V^4) = -\text{sign}(V') + \text{sign}(V^4)$$

が成り立つ. また, 定義から

$$||\text{III}^8((-F') \cup F)|| = -||\text{III}^8(F')|| + ||\text{III}^8(F)||$$

もわかる.

こうして,

$$\sigma(f) = \text{sign}(V^4) - ||\text{III}^8(F)|| = \text{sign}(V') - ||\text{III}^8(F')||$$

となることがわかって証明が終わる. $\square$

実は, 次が証明できる.

命題 3.3 向き付けられた閉 3 次元多様体 M^3 に対し, σ は写像空間 $C^\infty(M^3, \mathbf{R}^2)$ に対する order 1 の Vassiliev 型不変量を与える.

実際, 上のことは次のように説明できる. $C_{\text{III}^8}(\subset C^\infty(M^3, \mathbf{R}^2))$ を, III^8 型特異ファイバーに対応する strata とする. もう少し正確に言うと, curve segment $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C^\infty(M^3, \mathbf{R}^2)$ を, C_{III^8} に 1 点 $\gamma(0)$ で「横断的」に交わるものとする, これは proper な安定写像 $F_\gamma : M^3 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ を与える ($F_\gamma(x, t) = ((\gamma(t))(x), t)$, $(x, t) \in M^3 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$) が, これが $F_\gamma^{-1}(M^3 \times \{0\})$ 内に III^8 型ファイバーをちょうど 1 つ持つことになる. さらに, この符号と, γ が C_{III^8} を横切る方向を用いることで, C_{III^8} に co-orientation を定めることができる. さて, 今 2 つの安定写像 $f_0, f_1 \in C^\infty(M^3, \mathbf{R}^2)$ を結ぶホモトピー $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ を generic にとると, $\sigma(f_1) - \sigma(f_0) \in \mathbf{Z}$ は, このホモトピーが定める $C^\infty(M^3, \mathbf{R}^2)$ 内の curve が C_{III^8} を横切る (代数的) 回数に等しくなる. 特に, この値は generic なホモトピーの取り方に依らない. (図 6 参照.)

Vassiliev 型不変量については, たとえば [15, 16] 等を参照していただきたい.

また, σ が以下の性質を持つことも容易にわかる.

命題 3.4 (a) σ は R+L 同値で不変である. すなわち, $f_i : M_i^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ($i = 0, 1$) を, 向き付けられた閉 3 次元多様体上の安定写像としたとき, もし微分同相写像 $\Phi : M_0 \rightarrow M_1$ で向きを保つものと, 微分同相写像 $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ で, 図式

$$\begin{array}{ccc} M_0^3 & \xrightarrow{\Phi} & M_1^3 \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

を可換にするものが存在すれば, $\sigma(f_0) = \sigma(f_1)$ が成り立つ.

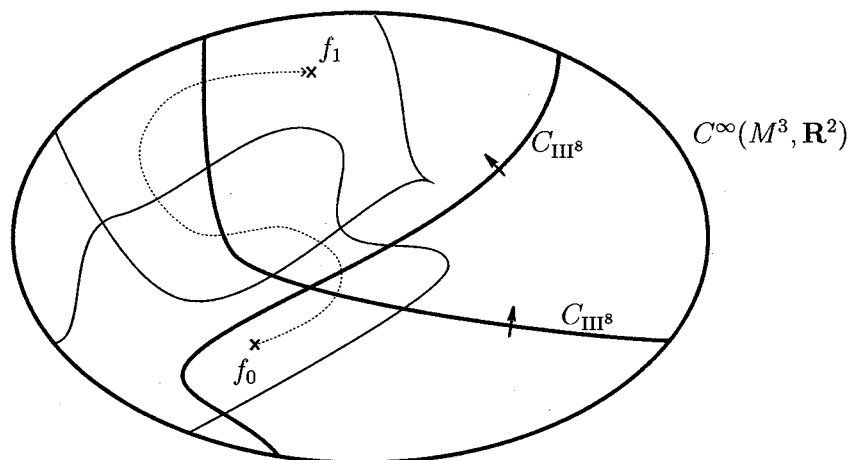


図 6: f_0 と f_1 を結ぶ generic なホモトピーの例 (この例では $\sigma(f_1) - \sigma(f_0) = 2$)

(b) $f : M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を, 向き付けられた閉 3 次元多様体上の安定写像とする. $-f : -M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を, 写像としては f と同じだが, 定義域 3 次元多様体の向きを逆にしたものとする, $\sigma(-f) = -\sigma(f)$ が成り立つ.

(c) σ は非交和 (far away disjoint union) に関して加法的である.

さて, 与えられた安定写像 $f : M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対して, 不変量 $\sigma(f)$ の値を (定義に従って) 計算することは一般に難しい. これは具体的な写像 $F : V^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [0, \infty)$ を構成することが非常に難しいからである. そこで次に, $\sigma(f)$ を 4 次元多様体を使わずに計算できる公式を紹介しよう.

4 不変量 σ の計算公式

まず次の定義を思い出そう.

定義 4.1 $f : M^n \rightarrow N^p$ を多様体間の写像とする. 定義域多様体 M^n の 2 点 a, b が, f の 1 点の逆像の同じ連結成分に入るとき同値と定義し, この同値関係による M^n の商空間を W_f , 商写像を $q_f : M^n \rightarrow W_f$ と書く. このとき, 次の図式を可換にする連続写像 $\bar{f} : W_f \rightarrow N^p$ が一意的存在することが容易にわかる.

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{f} & N^p \\ q_f \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & W_f & \end{array}$$

この図式を f の **Stein 分解** と呼ぶ. また W_f は **商空間**, もしくは **Reeb 空間**, あるいは場合によっては **Stein 分解** と呼ばれる.

特に $f: M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ が向き付け可能な閉3次元多様体上の安定写像の場合は, W_f はコンパクトな多面体であって, 各点は図7にあるような近傍を持つことが知られている [9, 11].

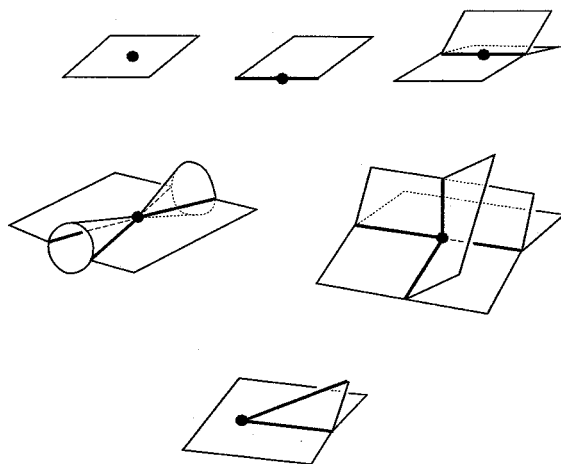


図 7: 商空間の各点の近傍

さて, $f: M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を, 向き付けられた閉3次元多様体上の安定写像とし, $\Sigma_f = q_f(S(f)) (\subset W_f)$ と置こう. すると, $W_f \setminus \Sigma_f$ は ($\bar{f}$ によって $\mathbf{R}^2$ から引き戻される) C^∞ 級2次元多様体の構造を持つことがわかる. そして,

$$q_f: q_f^{-1}(W_f \setminus \Sigma_f) \rightarrow W_f \setminus \Sigma_f$$

が smooth な S^1 -束となることが Eheresmann の fibration theorem [4] から従う.

次に $W_f \setminus \Sigma_f$ の各連結成分 R から, 1 点 p_R を取る. すると, $q_f^{-1}(p_R) \cong S^1$ は定義域3次元多様体 M^3 内の結び目となる. そして, $D_R^2 \subset R$ を p_R を中心とする十分小さな閉円板とすると, $q_f^{-1}(D_R^2)$ と $S^1 \times D^2$ の微分同相が q_f を用いて自然に構成できる. すなわち, 結び目 $q_f^{-1}(p_R)$ は枠付き結び目となる (図8参照).

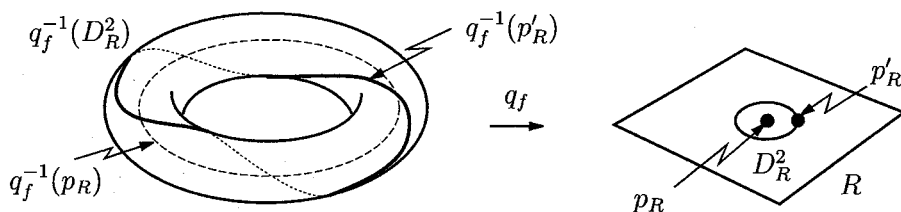


図 8: $q_f^{-1}(p_R)$ は枠付き結び目

そこで, $W_f \setminus \Sigma_f$ のすべての連結成分 R に渡って, こうしてできる枠付き結び目を考えて, その和集合を L_f とする. これは安定写像 f の定義域多様体内の枠付

き絡み目となる。(これは安定写像 f の正則ファイバーすべてと、それらの近傍での写像 f の振る舞いを指定することに相当し、似た概念が既に [20] でも登場している。) 以下、 L_f の各成分には、任意の向きを指定しておくことにする。

次に $i: L_f \rightarrow M^3$ を包含写像とし、

$$K_f = \text{Ker}(i_*: H_1(L_f; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(M^3; \mathbf{Z}))$$

と置く。これは有限階数の自由アーベル群であり、その各元は、 L_f の成分達の整数係数線形結合で代表されることに注意しよう。そこで $\alpha, \beta \in K_f$ に対して、絡み数 $\text{lk}(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}$ を次のように定義する。まず、 a, b をそれぞれ α, β の代表元 (重複度付きの枠付き絡み目と思える) とする。 $i_*\alpha = 0$ であるので、 M^3 内のある 2-chain $\exists A$ で $\partial A = a$ となるものが存在する。一方 b' を、 b を (枠付き絡み目の framing を用いて) 少しずらしてできる絡み目とする。このとき、 A は有限個の点で b' と横断的に交わる、として良い。そこで、

$$\text{lk}(\alpha, \beta) = A \cdot b \in \mathbf{Z}$$

($A \cap b$ のすべての点における代数的交点数の総和) と定義する。

補題 4.2 絡み数 $\text{lk}(\alpha, \beta)$ は、 A の選び方に依らず、well-defined である。

証明. A' を別の 2-chain とすると、 $A - A'$ は 2-cycle となる。 b は M^3 内で null-homologous なので、 b' もそうであり、 $(A - A') \cdot b' = 0$ となる。したがって、 $A \cdot b' = A' \cdot b'$ となる。□

なお、 $\alpha, \beta \in K_f$ に対して、 $\text{lk}(\alpha, \beta) = \text{lk}(\beta, \alpha)$ となることも容易にわかる。したがって、絡み数は対称双線形形式

$$\text{lk}: K_f \times K_f \rightarrow \mathbf{Z}$$

を定義することになる。

このとき以下が成り立つ。これが本稿の主定理である。

定理 4.3 $f: M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を向き付けられた閉 3 次元多様体上の安定写像とする。すると、不変量 $\sigma(f)$ の値は、絡み数が定める双線形形式 $\text{lk}: K_f \times K_f \rightarrow \mathbf{Z}$ の符号数に一致する。

したがって、我々は $\sigma(f)$ を 4 次元を使わずに計算できるのである。

証明のアイデア.

1°. $M_0^3 = M^3$, $f_0 = f$ と置き、 f_0 とある (向き付けられた閉 3 次元多様体上の) 安定写像 $f_1: M_1^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の間の有向同境 $F_1: V_1^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ で、次を満たすものを構成する。

- (1) V_1^4 はコンパクトで向き付けられた 4 次元多様体で, $\partial V_1^4 = (-M_0^3) \cup M_1^3$.
- (2) $F_1^{-1}(\mathbf{R}^2 \times \{i\}) = M_i^3, i = 0, 1$.
- (3) $f_i = F_1|_{M_i^3} : M_i^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \{i\}, i = 0, 1$.
- (4) $F_1|_{\text{Int } V_1^4} : \text{Int } V_1^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times (0, 1)$ は proper な安定写像.
- (5) $F_1|_{\text{Int } V_1^4}$ は III^8 型特異ファイバーを持たない.
- (6) W_{f_1} は W_f における Σ_f の正則近傍 $N(\Sigma_f)$ に同相である.

これは, $M^3 \times [0, 1/2]$ に, $M^3 \times \{1/2\}$ 内の f の正則ファイバーに沿って「2 ハンドルもどき」を貼り合わせることで構成できる. より正確には, $W_f \setminus \text{Int } N(\Sigma_f)$ の各連結成分 R' に対して, $R' \times D^2$ を $R' \times \partial D^2$ に沿って (q_f によって定まる framing と合うように) $q_f^{-1}(R')$ に貼り合わせる. 実際, 定値折り目特異点を $R' \times \{0\}$ ($0 \in D^2$ は中心) に沿って持つように写像を構成することができる. (値域多様体の方で, 像を適当に修正する必要がある.) するとこの写像は当然 III^8 型特異ファイバーを持たない.

なお, 有向同境 $F_1 : V_1^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ の商空間は図 9 のようになる. 図において, $R(W_f) = W_f \setminus \text{Int } N(\Sigma_f)$ であり, $\widetilde{R(W_f)} \times [1/2, 1]$ が, 新たに付け加えた「2 ハンドルもどき」上の写像の商空間に相当する.

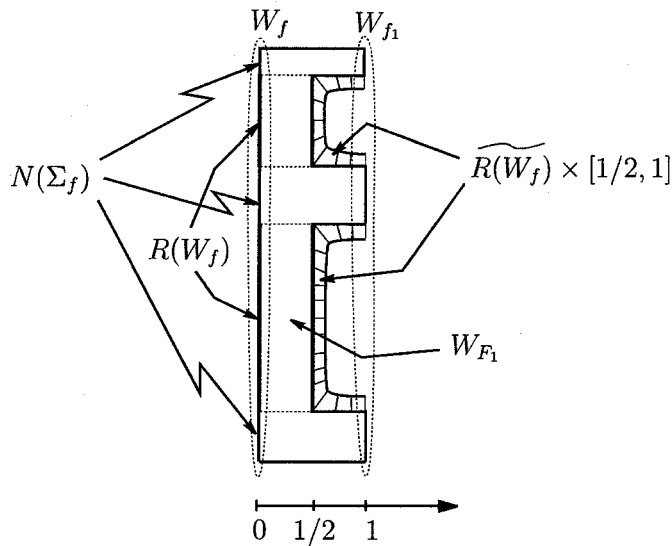


図 9: 有向同境 $F_1 : V_1^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ の商空間

さらに, 絡み数の定義と交叉形式の定義を用いることで, $\text{sign}(V_1^4)$ が, 絡み数が定める双線形形式 lk の符号数と一致することを示すことができる.

したがって, あとは, 定義にしたがって $\sigma(f_1) = 0$ を示せば良いことになる.

2°. 有向零同境 $F_2 : V_2^4 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times [1, \infty)$ で次を満たすものを構成する.

- (1) V_2^4 はコンパクトで向き付けられた 4 次元多様体で, $\partial V_2^4 = M_1^3$.

- (2) $f_1 = F_2|_{\partial V_2^4} : M_1^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \{1\}$.
- (3) F_2 は III^8 型特異ファイバーを持たない.
- (4) $\text{sign}(V_2^4) = 0$.

これは以下の手順で構成できる. まず安定写像 f_1 を, generic なホモトピー (たとえば [12, 19] 参照) とある種の同境で変形して, 図 10 にある商空間の変形が III^8 型特異ファイバーを生じさせることなく) 実現できる. これは, Σ_f をグラフと考えたとき, その各辺を「切る」ことに相当する変形である.

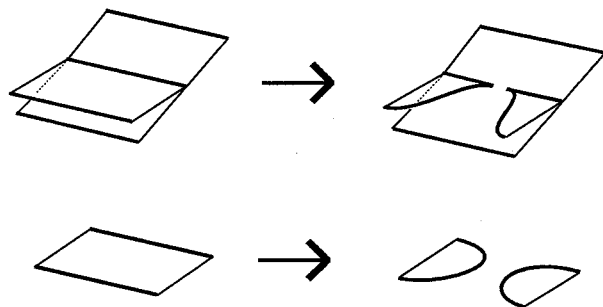


図 10: グラフ Σ_f の辺を切る

その結果, 図 11 の形の多面体に商空間が分解されることになる (図 7 参照).

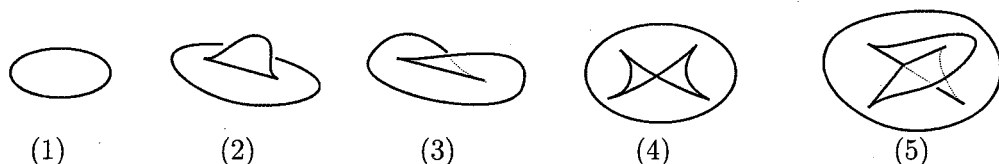


図 11: 商空間分解後の各ピース

図 11(2)–(5) については, generic なホモトピーで (1) の形に変形できる. そして (1) は, 4 次元円板を, 定値折り目写像を使って貼り合わせることができる. こうして有向零同境 V_2^4 が構成できたことになる. ここで V_2^4 は, $M_1^3 \times [0, 1]$ に 0 ハンドルと 1 ハンドルからなるハンドル体を接着してできるので, $\text{sign}(V_2^4) = 0$ となることもわかる.

したがって $\sigma(f_1) = 0$ となることになり. これで定理 4.3 の証明が終わる.

定義 3.1 の系として, 直ちに次が得られる.

系 4.4 V^4 をコンパクトで向き付けられた 4 次元多様体とし, Q^3 を境界付きの 3 次元多様体とする. また, 写像 $F : V^4 \rightarrow Q^3$ が次を満たすとする.

- (1) $F^{-1}(\partial Q^3) = \partial V^4$.
 (2) $F_\partial = F|_{\partial V^4} : \partial V^4 \rightarrow \partial Q^3$ は安定写像である.
 (3) $F|_{\text{Int } V^4} : \text{Int } V^4 \rightarrow \text{Int } Q^3$ は proper な安定写像である.
 すると,

$$\text{sign}(V^4) = ||\text{III}^8(F)|| + \sigma(F_\partial)$$

が成り立つ.

すなわち, 定理 2.6 において, 4 次元多様体に境界がある場合は, ある種の correction term (もしくは defect) として, 境界 3 次元多様体上の安定写像に対する不変量 σ が現れるわけである. 定理 4.3 よりこの term は, F_∂ の正則ファイバー達の linking numbers から決まることになる.

たとえば上の系と定理 4.3 を使うと, 4 次元多様体上の Lefschetz fibration に対する, 局所符号数公式 ([13, 14]) の別証明などができるかも知れない.

さらに, 以下の問題も考えられる.

問題 4.5 安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を与えることは, 3 次元多様体 M^3 に何らかの構造 (たとえば ξ と書こう) を与えることに対応する. すると, (M^3, ξ) に対する何らかの不変量 τ が構成できて (あるいは既に構成されていて), $\sigma(f) = \tau(M, \xi)$ となるのではないか?

もちろん, 安定写像を与えることは, 3 次元多様体 M^3 にある種の構造を与える, と考えることもできる. しかし上の問題は, それよりも (ある意味で) 弱い構造 ξ に不変量が reduce できるのではないか, ということを問うている¹.

5 具体例

では, 定理 4.3 を具体的な例に適用してみよう.

$h: S^3 \rightarrow S^2$ を (positive な) Hopf fibration とし, $\pi: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を自然な射影 $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の単位球面への制限写像とする. このとき, 合成写像 $g = \pi \circ h: S^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ は安定写像ではない (特異点集合が 2 次元になってしまっている). そこで $f: S^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を, g の安定摂動であって, 商空間が図 12 の形になっているものとする.

すると, $W_f \setminus \Sigma_f$ は 3 つの連結成分 R_1, R_2, R_3 を持ち, $H_1(S^3; \mathbf{Z}) = 0$ なので, $K_f \cong \mathbf{Z}^3$ となることがわかる. R_1, R_2 を開円板成分とすると, $q_f^{-1}(p_{R_1}) \cup q_f^{-1}(p_{R_2})$ は positive Hopf link であって, 各成分の framing は +1 であることがわかる. また, 開アニュラス成分 R_3 に対して $q_f^{-1}(p_{R_3})$ は split unknot component で, framing が

¹大槻知忠氏は, もしかすると framing, もしくは stable framing に reduce できるのではないかと予想されている.

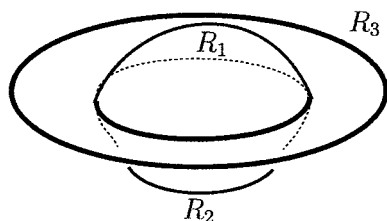


図 12: Hopf fibration から構成される安定写像 $f: S^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の商空間

0 となることもわかる. したがって, 対称双線形形式 lk の表現行列である絡み数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかる. したがって, 簡単な計算から lk の符号数が 1 となることがわかる. よって, 定理 4.3 より, $\sigma(f) = 1$ である.

さて, S^3 から $\mathbf{R}^2$ への最も単純な写像は何であろうか? これは special generic 写像 $f_0: S^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ であろう [2]. これは標準的な射影 $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の単位 3 次元球面への制限写像として得られるものである. すると, f_0 と f は写像空間 $C^\infty(S^3, \mathbf{R}^2)$ の中の path で結ばれることがわかる. 実際, 具体的な path が, 図 13 を, 対応する商空間の変化とするように構成できる.

ここで, 図 13 において, a は birth と swallow-tail と言われる transitions をそれぞれ 3 回ずつ行う path に相当する (たとえば [12, 19] 参照). すなわち, 写像空間の path として, 安定写像全体のなす空間の補空間をなす strata を計 6 回横切ることになる. 図 13 の b は cusp elimination ([10]) を 3 回行っている. c は重要で, III^8 -transition をちょうど 1 回行っている. すなわち, この path はここでちょうど 1 回, C_{III^8} を positive な方向に横切るのである. そして d は swallow-tail と呼ばれる transition を 3 回行っている. こうして special generic 写像 f_0 から f への generic な path が具体的に構成できる.

なお, f_0 に対して $\sigma(f_0) = 0$ となることは定理 4.3 から (あるいは定義から直接的に) 容易にわかる. すると, 上の path の存在から $\sigma(f) = \sigma(f_0) + 1 = 1$ となることがわかる. これは実際, 上の (定理 4.3 を用いた) 計算結果と合致している.

さて, 上の具体的な path を使うと, 安定写像 $F: \mathbf{CP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ で, 次を満たすものが (具体的に) 構成できる (図 14 参照).

- (1) $F^{-1}(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) = S^3$ となり, $f = F|_{S^3}: S^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ が成り立つ.
- (2) $F^{-1}([0, \infty)) = D^4$ であり, $F|_{D^4}: D^4 \rightarrow [0, \infty)$ はちょうど 1 つの III^8 型特異ファイバーを持つ.

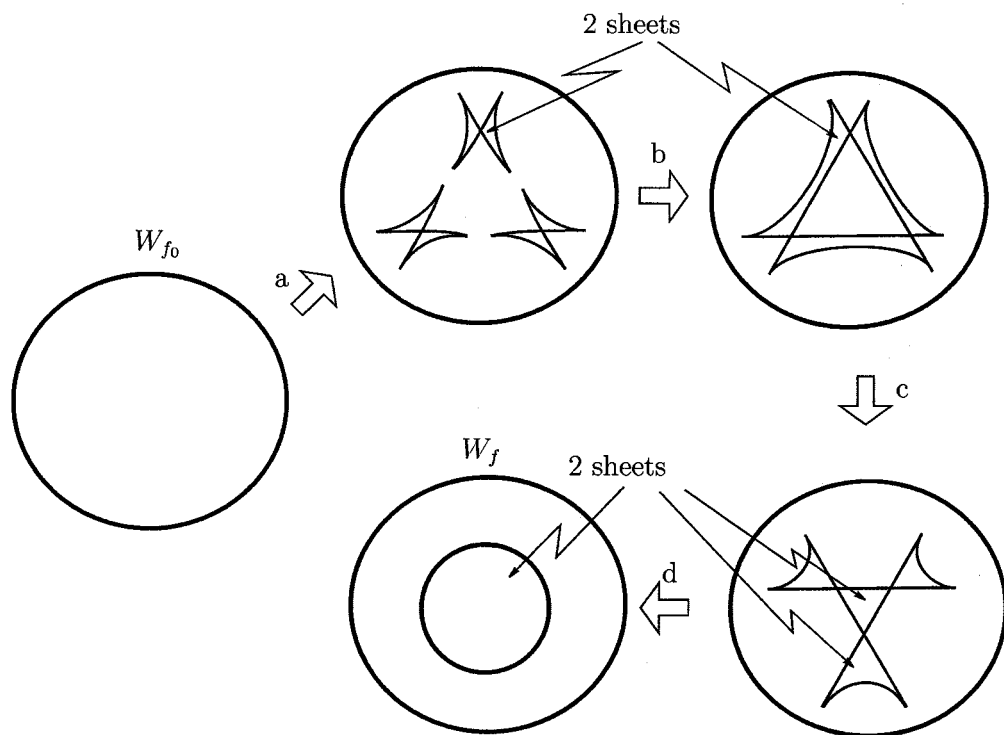


図 13: f_0 と f を結ぶ generic ホモトピーの具体例における商空間の変化

(3) $F^{-1}((-\infty, 0]) = \mathbf{CP}^2 \setminus \text{Int } D^4$ であり, $F|_{\mathbf{CP}^2 \setminus \text{Int } D^4}$ は III^8 型特異ファイバーを持たない.

これは安定写像 $\mathbf{CP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の新しい例を与えるであろう. なお, 小林 [8] が2つの安定写像 $\mathbf{CP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を具体的に構成していることを注意しておく.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP15K13438 の助成を受けている.

参考文献

- [1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 229–234.
- [2] O. Burlet and G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan*, Enseign. Math. **20** (1974), 275–292.

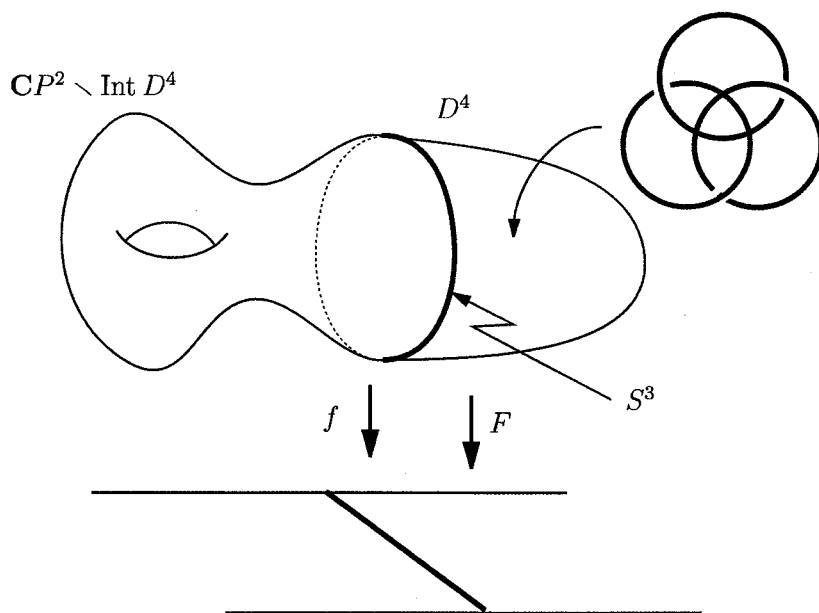


図 14: 具体的な安定写像 $\mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

- [3] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part III. Introduction to homology theory*, Translated from the Russian by Robert G. Burns, Grad. Texts in Math., Vol. 124, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [4] C. Ehresmann, *Sur l'espaces fibrés différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris **224** (1947), 1611–1612.
- [5] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., Vol. 14, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- [6] F. Hirzebruch, W.D. Neumann and S.S. Koh, *Differentiable manifolds and quadratic forms*, Appendix II by W. Scharlau, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 4, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
- [7] R.C. Kirby, *The topology of 4-manifolds*, Lecture Notes in Math., Vol. 1374, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] M. Kobayashi, *Two stable maps of $\mathbb{C}P^2$ into $\mathbb{R}^3$* , Memoirs of the College of Education, Akita Univ. Nat. Sci. **51** (1997), 5–12.
- [9] L. Kushner, H. Levine and P. Porto, *Mapping three-manifolds into the plane I*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **29** (1984), 11–33.

- [10] H. I. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3**, Suppl. 2 (1965), 263–296.
- [11] H. Levine, *Classifying immersions into $\mathbf{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\mathbf{R}^2$* , Lecture Notes in Math., Vol. 1157, Springer–Verlag, Berlin, 1985.
- [12] L.E. Mata-Lorenzo, *Polyhedrons and π -stable homotopies from 3-manifolds into the plane*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **20** (1989), 61–85.
- [13] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori II*, Proc. Japan Acad. Ser. A **59** (1983), 100–103.
- [14] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces, ed. Sadayoshi Kojima et al., pp. 123–148, World Scientific, 1996.
- [15] T. Ohmoto, *Vassiliev type invariants for generic mappings, revisited*, Real and complex singularities, pp. 143–159, Contemp. Math., 569, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- [16] T. Ohmoto and F. Aicardi, *First order local invariants of apparent contours*, Topology **45** (2006), 27–45.
- [17] V.A. Rohlin, *A three-dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one* (in Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **81** (1951), 355–357.
- [18] V.A. Rohlin, *New results in the theory of four-dimensional manifolds* (in Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **84** (1952), 221–224.
- [19] O. Saeki, *Constructing generic smooth maps of a manifold into a surface with prescribed singular loci*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), 1135–1162.
- [20] O. Saeki, *Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces*, Topology **35** (1996), 671–698.
- [21] O. Saeki, *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Lecture Notes in Math., Vol. 1854, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [22] O. Saeki, *Singular fibers and 4-dimensional cobordism group*, Pacific J. Math. **248** (2010), 233–256.
- [23] O. Saeki, *A signature invariant for stable maps of 3-manifolds into surfaces*, in preparation.
- [24] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, Geom. Topol. **10** (2006), 359–399.
- [25] C.T.C. Wall, *Non-additivity of the signature*, Invent. Math. **7** (1969), 269–274.