

同次 Lüroth 定理, として 代数曲面の対数的分類

飯高 茂

1. 以下 $k = \mathbb{C}$ として考察します. 1変数の既約多項式は1次式になりますか, 多変数の既約多項式は必ずしも1次式にはなりません. しかも, 次の事実があります.

(*) : f, g を n 変数の多項式で, とともに既約とする. f と g とは代数的に従属なら, g は f の1次式になる. さらに, h を多項式とし, f と代数的に従属とするなら h は f の多項式である.

この一見意外な事実こそ, Lüroth の定理の実質的な内容なのです.

ここでは, 上の事実(*)の同次式の場合を考察してみます.

定理 1. $F_0, F_1, F_2 \in k[X_0, \dots, X_n]$ を既約同次式とし, $d_0 = \deg F_0 \leq d_1 = \deg F_1 \leq d_2 = \deg F_2$ とします. これは定数倍を無視してもなお

2

相異なるとします。さて

$F_1^{d_0}/F_0^{d_1}$, $F_2^{d_0}/F_0^{d_2}$ が代数的に從属してゐるなら, $d_2 = \text{LCM}(d_0, d_1)$, 又 $d_2 = \delta_0 d_0 = \delta_1 d_1$ とおくと

$$F_2 = \alpha F_0^{\delta_0} + \beta F_1^{\delta_1}$$

となる α, β があつた。

例へば $d_0 = 1$ とする。 $d_2 = d_1$ により,

$F_2 = \alpha F_0 + \beta F_1$ となるから, (H) の前半となる。

この問題は, P^2 -曲線の分類上必要となるもので, 準 Albanese 多様体の研究の一例であり, 代数的微分方程式 (HALPHEN, H. POINCARÉ) と密接に関連している。

3

2. $F_0, \dots, F_r \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]$ と相異なる既約多項式とし, $d_j = \deg F_j$ とおく

$$d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_r$$

を仮定しておく. $V = \mathbb{P}^n - \bigcup V_+(F_j)$ とする
 と, $\overline{g}(V) = r$ である. 従って, V の準

Albanese 多様体 $\text{Alb}(V) \cong \mathbb{C}^{*r}$ であり,

$\alpha_V: V \rightarrow \mathbb{C}^{*r}$ は準Albanese 写像とおく

とき $\Delta_V \subset V$ の α_V による開像とすると,

$$\overline{g}(V) = \overline{g}(\Delta_V) = \overline{g}(\mathbb{C}^{*r}) = r.$$

$\alpha_V: V \rightarrow \Delta_V$ は V の準Albanese π -
 イバー多様体 (fibered variety, π -space)
 である. 今の場合 Δ_V, α_V の構成は容易であ
 るので, 次の如くである.

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \left\{ \mathbb{P} / F_0^{v_0} \dots F_r^{v_r}; \text{ } \mathbb{P} \text{ は } \sum d_j v_j = 0 \text{ の同次式} \right\} \quad \text{と定める.}$$

$$H^1(V, \mathcal{O}_V) = H^1(\Gamma(V, \mathcal{O}_V) / \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{Z}^r$$

である.

$$L = \left\{ \vec{v} = (v_0, \dots, v_r); \langle \vec{v}, \vec{d} \rangle = 0 \right\}$$

は $\mathbb{Z}^{r+1}$ の階数 r の部分格子. L の基底 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$
 とし, 各 $\vec{a}_j = (a_{j0}, \dots, a_{jr})$ において,

4

$$\mathbb{F}_j = \prod F_i^{a_{ji}}$$

とおく. V の正則 1 形式の空間 $T_1(V)$ は

$$d\mathbb{F}_1/\mathbb{F}_1, \dots, d\mathbb{F}_r/\mathbb{F}_r$$

によって張られ

$$\alpha_V: V \ni p \longmapsto (\mathbb{F}_1(p), \dots, \mathbb{F}_r(p)) \in \mathbb{C}^{x,r}$$

である. さて, Δ_V は アフィン 多様体である.

$$\Gamma(\Delta_V, \mathcal{O}) = \mathbb{C}[\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_r, \mathbb{F}_1^{-1}, \dots, \mathbb{F}_r^{-1}].$$

命題 1. $\dim \Delta_V = 1$ とすると, Δ_V は非特異であり, 関数体の拡大 $\mathbb{C}(\Delta_V) \subset \mathbb{C}(V) = \mathbb{C}(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0)$ は代数的に閉じている.

この証明は, 準 Albanese 写像の普遍性によっていて, コンパクトの場合, いいねえと. Albanese 写像の場合と全く同様に証明される.

関数体が代数的に閉な拡大である, という事実も実は Lüroth の定理に当たっている.

5

3. $\dim \Delta_V = 1$ と (7) おき.

$$V_1 = \mathbb{P}^n - V_+(F_0) \cup V_+(F_1),$$

$$V_j = \mathbb{P}^n - V_+(F_0) \cup V_+(F_j)$$

とおく. 各々について, 準-Albanese 多様体と構成して, 次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 & \xrightarrow{\quad} & \Delta_{V_1} = \mathbb{C}^* \\
 \cup & & \uparrow \\
 V & \xrightarrow{\alpha_V} & \Delta_V \subset \mathbb{C}^{*r} \\
 \cup & & \downarrow \\
 V_j & \xrightarrow{\quad} & \Delta_{V_j} = \mathbb{C}^*
 \end{array}$$

さて, $V_1 \rightarrow \Delta_{V_1}$ へ, 閉拡大 $\mathbb{C}(\Delta_{V_1}) \subset \mathbb{C}(V_1)$

を定めるから $\mathbb{C}(\Delta_V) = \mathbb{C}(\Delta_{V_1})$. 同様に

(7), $\mathbb{C}(\Delta_V) = \mathbb{C}(\Delta_{V_j})$. 一方

$$\mathbb{C}(\Delta_{V_1}) = \mathbb{C}(F_1^{\delta_1} / F_0^{\delta_0})$$

$$\mathbb{C}(\Delta_{V_j}) = \mathbb{C}(F_j^{\delta_j'} / F_0^{\delta_0}).$$

$$\therefore \text{LCM}(d_0, d_1) = \delta_0 d_0 = \delta_1 d_1, \quad \text{LCM}(d_0, d_j)$$

6

$$= \delta'_0 d_0 = \delta'_j d_j \quad \tau \in \tau_2.$$

ゆえに

$$\mathbb{C}(F_1 \delta'_1 / F_0 \delta'_0) = \mathbb{C}(F_j \delta'_j / F_0 \delta'_0)$$

により, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \varepsilon_j \in k \cap \mathbb{Q} \cap \tau$.

$$\frac{F_j \delta'_j}{F_0 \delta'_0} = \frac{\alpha_j F_1 \delta'_1 + \beta_j F_0 \delta'_0}{\gamma_j F_1 \delta'_1 + \varepsilon_j F_0 \delta'_0}$$

とある.

相異な

補題 1. f, g, h は既約同次多項式とし,

$a, b, c, e \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{C}$ により

$$\frac{g^a}{f^b} = \frac{\alpha h^c + \beta f^e}{\gamma h^c + \varepsilon f^e}$$

とする. $c > 0$ とし, $\gamma = 0$, $b = e$.

証明 $g^a (\gamma h^c + \varepsilon f^e) = f^b (\alpha h^c + \beta f^e)$

により, $\gamma h^c + \varepsilon f^e = A f^b$ とある同次式

$A \in \mathbb{C}$ とする. $\gamma \varepsilon \neq 0$ とする. f と h^c とは互いに素な多項式である. よって $\gamma = 0$, $\varepsilon f^e = A f^b$ とする.

7

に, $b = c$ となることも直ちに中れる.

補題2. f, g, h は相異なる既約多項式
 と $(1 \leq a \leq b \leq c)$ とする

$$f^a + g^b + h^c = 0$$

が成立するとき, $a = 1$ となる.

これは次の定理の特殊な場合とみられる.

定理2 (HALPHEN). $\Lambda \in \mathbb{P}^n$ の1次束と
 し, 一般元は既約としよう. $e_i D_i$ ($e_i \geq 2$,
 D_i は素因子) となる Λ の元は高々2個である.

この定理は, ミニホロニエ - ユー・Jouanolou
 から教えてもらった. 感謝する. 代数的微分
 方程式の定理なのだそうです.

以上により, $\delta_0' = \delta_0$, $\delta_j' = 1$ となる.
 よって,

$$F_j = \alpha_j F_0^{\delta_0} + \beta_j F_1^{\delta_1}$$

となる α_j, β_j があることを見る. として,
 定理1の証明をおえる.

8

4. さて $n=2$ のとき, 即ち

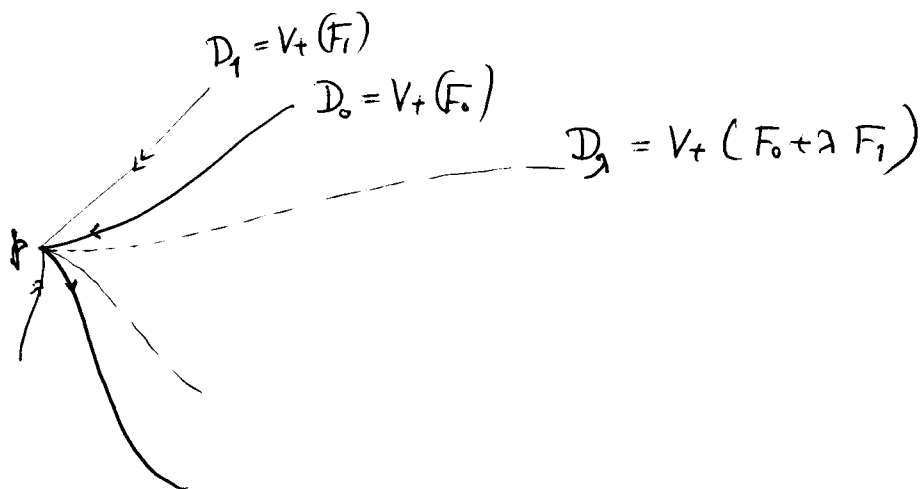
$$S = \mathbb{P}^2 \cup V_+(F_0)$$

の分類を今之よう

I) $\pi(S) = -\infty$ とする. $r \geq 1$ とすると,

S の Albanese 写像は 3. の条件を満たす

即ち, $\dim \Delta_S = 1$ であり, $w \in \Delta$ 一般の
点とすると $\alpha^{-1}(w) \cong \mathbb{A}^1$ になる (M. R. の定理).



即ち, $D_0 \cap D_1 = p$ であり $D_2 - \{p\} \cong \mathbb{A}^1$ になる.
このように F_0, F_1 を選ぶことは問題になる.

II) $\pi(S) = 0$ とし, $\bar{g} = r \geq 1$ とする.

$\bar{g} = 2$ のとき $S \simeq \mathbb{C}^{\times 2}$ は示されている.
これを F_0, F_1, F_2 の言葉で表わすことは出来る.

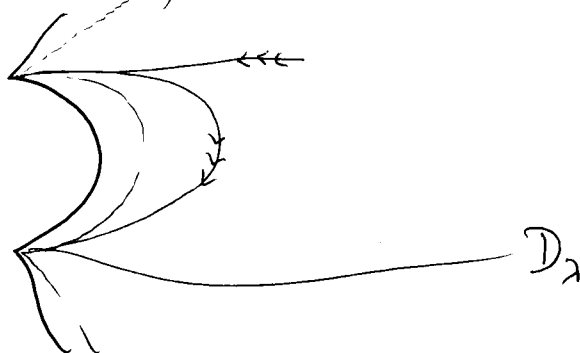
9

ない。即ち,

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_V) \simeq \mathbb{R}[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_1^{-1}, \overline{x}_2^{-1}]$$

もし F_0, F_1, F_2 の標準式をえる?

そこで $r=1$ とするとき, $V_+(F_0\delta_0 + \lambda F_1\delta_1) = B$
 $(B = D_0 \cap D_1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*$ とえる. (こゝより)



になる F_0, F_1 を求めてみたい, である.

例. $d_0 = 1$ とするとき,

$$F_1/F_0 = x^m y - 1 \quad \text{又は}$$

$$= x^m (1 + a_1 x + \dots + a_\ell x^\ell + x^\ell y) - 1$$

となることかその条件なのである.

このようにして, 宮西-杉江の問題の一般化を解くことか必要になる, てくる.

10

$\Pi 1/2$ さて, $\pi(S)=1$ のとき, S の非数
 的標準ファ イバー多様体 $\pi: S \rightarrow C$ に対して
 $\pi^{-1}(w) = \mathbb{C}^*$. π と S の Albanese ファ
 イバー多様体 $\alpha: S \rightarrow \Delta_S$ は一致する: と考
 える. そのような条件下で, 以下の $F_0, F_1,$
 $\dots$ を与えてみたい.

11

5. 定理2をそのまま弱めて、既約性を落とすことはできない。しかし、次の命題を証明する。

定理3. $p \geq q \geq r \geq 2$ とし、

$$S_{p,q,r} = V(x^p + y^q + z^r) \subset A^3 \text{ とおく.}$$

これは常同値である。

1) $x, y, z \in k[u, v]$ をとり、

z に共通因子がなく、

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \text{ は正整数,}$$

$$x^p + y^q + z^r = 0$$

とするとおける。

2) $\varphi: A^2 \longrightarrow S_{p,q,r}$, $\varphi'(0) = \text{有限集合,}$

φ は支配的 とある φ の存在,

$$3) \kappa^\#(S_{p,q,r}) = -\infty,$$

$$4) 1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \text{ である } (p, q, r) = (1, 2, 2)$$

$$= (3, 3, 2), \quad = (4, 3, 2), \quad = (5, 3, 2).$$

12

$$5) \pi: S' \longrightarrow S_{p,q,r}, \quad 0' = \pi(0) \quad \text{かつ},$$

$$S'(0') \longrightarrow S_{p,q,r}(0) \quad \text{は Galois 拡張.}$$

S' は $\mathbb{P}^1$ の m 次 Veronese 埋入の錐.

証明 1) $\Leftrightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3) は自明. 又, 5) $\Rightarrow$ 2) も明らかである. 4) $\Rightarrow$ 5) は Phinkham の一般論を用いる. 3) $\Leftrightarrow$ 4) は, $ay^r + 2z^r = 0$ の特異点除去を用いて x 座の計算を敢行するのである. 4) の条件 F で, 1) の解を見出すことは (5, 3, 2) の場合は容易. (5, 3, 2) は単純群に属する場合でありながら, 1) の解を見出さねばならない. ここに一種の意味がある.

注意 V を代数多様体とすると, その非特異部分を $\text{Reg } V$ で表わし, $\pi^\#(V) = \pi(\text{Reg } V)$ とおき, V の特異小平次元とよぶのである. 特異小平次元により, 1) の如き Fermat の問題が解かれないとされるのである.

6. 古典的な代数曲面の分類理論では、射影的非特異代数多様体の双有理同値類の基本的構造が問題にされる。そして、曲面、即ち、2次元の場合に、極小モデルの存在理論がつけられ、これを基礎に代数曲面の分類がなされる。

射影性や完備性を要求しない非特異代数多様体と考察するとき、固有双有理同値類と定める固有双有理写像を用いることにするとすべてが同様に進行する。

定義を復習しておこう。

$\phi: V \rightarrow V_1$ を双有理写像とする。これに、固有双有理正則写像 $\psi: Z \rightarrow V_1$, $\mu: Z \rightarrow V$ により $\phi \circ \mu = \psi$ とおけるなら、固有双有理とよばれる。これは合成、逆、により保存される。従って、同値類を与える。この同値類を固有双有理同値類という。対数形式の空間は、固有双有理写像により同型に写され、その空間の次元は、対数的 ρ -種数とよばれる。従って、対数的 ρ -種数は、固有双有理同値類

14

の不変量である。

$f: V \rightarrow V_1$ と有理写像とする。与えられた固有双有理正則写像 $\mu: Z \rightarrow V$ により, 正則写像 $f \cdot \mu: Z \rightarrow V_1$ が得られる。 f は強有理写像とよばれる。強有理写像は、固有双有理な μ で不確定点を除去できる有理写像の意味から極めて自然な概念といえてよい。

非特異代数多様体 $V_1, V_2, \dots$ に対して, 次に極小多様体の概念を導入しよう。

与えられた代数多様体 V を一つ固定して考える。次に, 非特異な V_i と固有双有理写像 φ_i との対 (V_i, φ_i) を考え, $(V_i, \varphi_i) \sim (V_j, \varphi_j)$ と,

固有双有理正則写像 $\psi: V_i \rightarrow V_j$ (但し ψ の図式は可換なようにする) の存在により定義する。また ψ が同型なとき $(V_i, \varphi_i) \sim (V_j, \varphi_j)$ と同一視しておく。かくして,

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\psi} & V_j \\ \varphi_i \downarrow & \nearrow \varphi_j & \\ V & & \end{array}$$

1. V に対して, $\{(V_i, \varphi_i)\}$ なる一つの順序系を定まるとこれを $\Sigma(V)$ と記そう。 $\Sigma(V)$ は極小条件を満たす。これをみるには次の補題に注意

15

目(2) すればよい。その前に、非特異の V に対し、Deligne の Hodge 理論を思い出し、 $H^2(V, \mathbb{Z})$ に混合 Hodge 構造が入っていることを使わねばならぬ。このとき重み 7 , ルネ W があ

$$\beta(V) = \dim(W_2 H^2(V, \mathbb{C})) \leq l_2(V) \text{ が成り立つ。}$$

補題 V_1, V_2 を非特異代数多様体とし、 $f: V_1 \rightarrow V_2$ を双有理正則写像とする。

$$i) \beta(V_1) \geq \beta(V_2),$$

$$ii) \beta(V_1) = \beta(V_2) \Leftrightarrow f \text{ は同型。}$$

(正標数のときには、 $\mathbb{Q}$ 進エタールコホモロジーを使えば同じ結果を得る。)

さて、 $\Sigma(V)$ の極小元 (V_*, ρ_*) はいくつもありうるが、この V_* を V の相対的極小モデルという。このとき V_* は非特異であって、非特異 V_* と固有双有理正則写像 $\psi: V_* \rightarrow V$ (これは、 V への) により、同型となる性質をもち、これに特徴づけられる。

$\Sigma(V)$ に最小元があるとき、それは極小元にもなり、唯一つである。 (V^*, ρ^*) を最小元としよう。 V^* を V の固有相対的極小モデルという。

16

定義をいいてみましょう。非特異な $V^\#$ と、固有双有理写像 $\psi: V^\# \rightarrow V^*$ と任意にとるとき、 ψ が常に正則となるなら、 V^* は 固有的極小多様体 とよばれる。 V^* が V と固有双有理同値るとき、 V^* を V の 固有的極小モデル という。条件を強めて、すべての強双有理写像 $\psi: V^\# \rightarrow V^*$ が正則になる性質を V^* が持つとしよう。この V^* は 極小多様体 とよばれる。さらに条件を強め、 $V^\#$ を非特異、はさうまま仮定し、任意の強双有理写像 $\psi: V^\# \rightarrow V^*$ が正則になるとき、 V は 超極小多様体 とよばれる。 V と V^* とが固有双有理同値るとき、 V^* を V の 超極小モデル という。即ち、超ミニ のモデルなのである。

非特異アフィン多様体 (正規 ではないか) は超ミニである。この意味で、アフィン多様体も "完備" な性質を持つのである。

さて、古典的な Castelnuovo-Enriques- (Zariski) の基本定理に対応して次の定理が成立する。

定理 4. S を相対的に極小な代数曲面とし、 $\pi(S) \geq 0$ を仮定する。このとき S は極小でも

ある。

古典的な場合には、相対的極小曲面は、中一種例外曲線の不存在、によって特徴づけられた。必ずしも完備でない曲面についても全く同様の事が成立する。即ち、 S を非特異代数曲面とし、 E を S 内の完備曲線で、 $E^2 = -1$ 、 $\pi(E) (= \dim H^1(\mathcal{O}_E)) = 0$ を満たすとしよう。 E は中一種既約例外曲線とよばれる。非特異点に縮められる。このような E があれば、 S は相対的に極小ではない、逆も成立する。

定理4 は一見完全なようであるが、実は極めて不十分なものである。定理4 よりも之の結果の方が内容上の意味がある。

定理4*. S を極小でない相対的極小モデルとする。このとき S には次の性質をもつ完備有理曲線 C が存在する。i) $C^2 \geq 0$, ii) C が (無限に近い特異点をも含む) 特異点の重複度を $\nu_1, \dots, \nu_r$ とするとき $C^2 = -1 + \sum_{j=1}^r \nu_j^2 + t$ ($t \geq 0$), iii) $2\pi(C) - 2 = \sum_{j=1}^r \nu_j(\nu_j - 1)$.

このような C を持つ S の代数的小平次元は

18

明らかには $-\infty$ である。しかし、 $\pi(S) = -\infty$ となる S には必ずしもこのような C はないことがある。例えば、 S がアフィンな S のような C は無論のこと、完備な曲線すら含みえないのである。従って、 $\pi(S) = -\infty$ となる S を更に究明して、定理 4 の結論を満たす S の構造を求めて、必要十分条件の形にしなくてはならない。しかも $\bar{\rho}(S) > 0$ なる準 Albanese 多様体を使って研究は容易になるから $\pi(S) = -\infty$, $\bar{\rho}(S) = 0$ となる S の構造だけを問われる。このような S を 対数的有理曲面 という。

以前の定理 4 を改善するには、 S の完備化 $\bar{S}$ とその境界 D を考え、境界付きの極小性を探るのによいのである。

$\bar{V}$ を完備非特異代数多様体とし、 D を $\bar{V}$ 上の正規交叉因子とする。対 $(\bar{V}, D)$ を 対数多様体 といい、 $V = \bar{V} - D$ を $(\bar{V}, D)$ の 内部 という。同じ事だが、 $\bar{V}$ を V の 通常境界 (ordinary boundary) D を持つ 完備化 ともいう。とくに D の各成分が非特異のとき、非特異境界 ともい

19

(i). $(\bar{V}, V, D)$ を 非特異な対 といふ。さて, $(\bar{V}, D)$ を元とする圏をつくらう。 $f: (\bar{V}_1, D_1) \rightarrow (\bar{V}_2, D_2)$ は $f: \bar{V}_1 \rightarrow \bar{V}_2$ が正則写像で, $f^*(D_2) \subset D_1$ を満たすもの, として定める。このとき, $\bar{V}$ の内部 V_1, V_2 の間の正則写像 $f|_{V_1}: V_1 \rightarrow V_2$ ができる。このような $f \in$ 正則写像 といふ。さらに, $(\bar{V}, D)$ の双有理幾何を考へることにもできる。即ち, 有理写像 $f: \bar{V}_1 \rightarrow \bar{V}_2$ があり, $f|_{V_1}: V_1 \rightarrow V_2$ が双有理写像になるとき $f: (\bar{V}_1, D_1) \rightarrow (\bar{V}_2, D_2)$ を, $(\bar{V}, D)$ の圏での有理写像と理解し, 区別するために 双有理写像 といふ。 $f|_{V_1}: V_1 \rightarrow V_2$ が固有双有理なら f を 固有双有理の双有理写像 といふ。

$(\bar{V}, D)$ から出発して, 固有双有理の正則写像 $f: (\bar{V}, D) \rightarrow (\bar{V}_1, D_1)$ を考へる。 f が同型でなければ $b_2(\bar{V}) > b_2(\bar{V}_1)$ となる。 $(\bar{V}, D) \rightarrow (\bar{V}_1, D_1) \rightarrow \dots$ とくり返せば, ついに b_2 が相対的に極小になる。この $(\bar{V}_*, D_*)$ を 相対的に双極小, 双多様体 といふ。前と同様にして, 固有的に双極小, 双極小な双多様体 といふ概念をえら。

20

さて、3曲面 $(\bar{S}, D)$ に対して、(オ-種)例外曲線を色々考えることができる。それを L とおくと、 L は、i) $\bar{S}$ 上のオ-種例外既約曲線であって、 D との関連上次の付帯条件を持つ。

α) ii) $L \subset \bar{S} - D = S$. L は S 上の例外曲線と
いう。

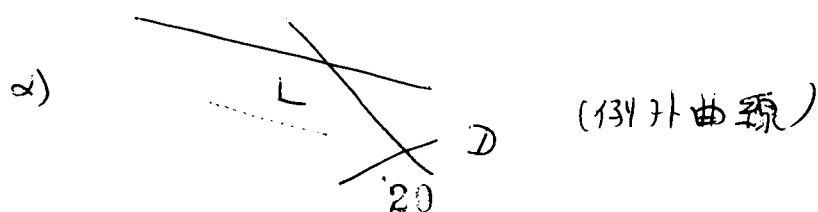
β) ii) $L \subset D$, $D = D' + L$ とおくと、 $(L, D') = 1$ 又は 2. (このような L を境界のオ (L, D') 種の例外成分という)。オ2種例外成分のない D を極小境界という。

γ) ii) $L \not\subset D$, $(L, D) = 1$. このとき L は D 例外曲線、とも $L - D$ は S の 半点 ともいう。

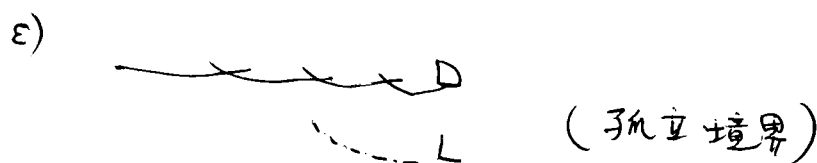
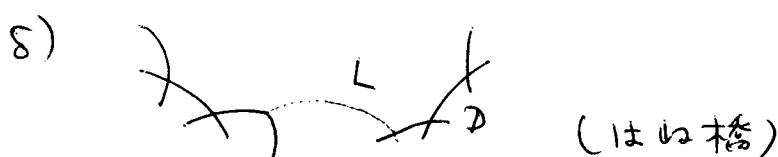
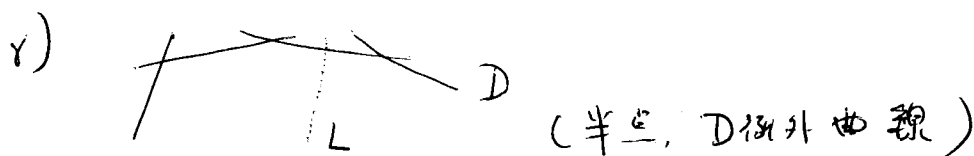
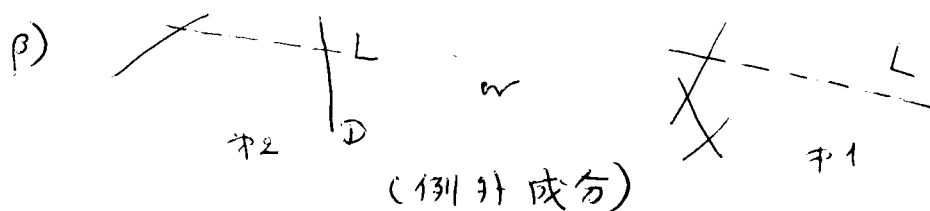
δ) i) $L \not\subset D$, $(L, D) = 2$. この L は、 L は L は "はね橋" と称せられる。

ε) ii) $L \subset D$, $D = D' + L$ とおくと $(L, D') = 0$. L は、 D の孤立例外成分。

印象を鮮明に保持する為に図をかいておこう。



21



(但し L は D に入らぬ L である L は D の一部 L)
すると,

$(\bar{S}, D)$ が相対的に ∂ 極小になる必要十分条件は, α), β) 型 γ 例外曲線がないことである
即ち $S = \bar{S} - D$ も D も極小 (相対的に) になるときに限定される。

定理 5. $(\bar{S}, D)$ が相対的に ∂ 極小で, $\chi(S) \geq 0$ 又は $\pi(S) = 2$
($\bar{S} - D = S$) ならば, 固有的に ∂ 極小である。

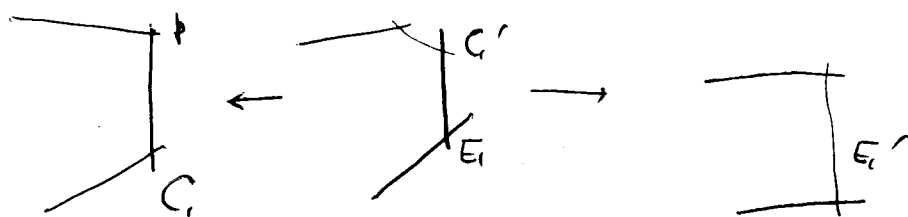
± S に $(\bar{S}, D)$ に γ) δ) 型 γ 例外曲線がない S

22

($\bar{S}, D$) は極小になる.

この定理は定理4に比べると余程し、ネリ
(というが、 $\pi(\delta)=2$ という条件の強さが気
になるであろう). しかし、 $\pi(\delta)=2$ とする δ
については、その完備化 $\bar{\delta}$ を $\bar{S}-\delta=D$ と極小
境界なるようにとれば一意であることがわか
るという利点がある.

$\pi(S) \geq 0$ の条件だけでは、 δ の極小性は保証
されない. 例えば $D \supset C_1$, $C_1^2=0$, $C_1=\mathbb{P}^1$,
(C_1, D') = 2 ($D'+C_1=D$) とする C_1 のあるとき
次図のように双有理変換をひいておれば S 上同
型である.



これを 軸 C_1 における初等変換 とし $dm(p, C_1)$
で示す. $\pi(S)=1$ のときは、 $f: \bar{S} \rightarrow \Delta$ による標
準化 Γ (ハーマン曲面の構造に入り、 D の成分は
 $f^{-1}(a_i)$ となる) における 軸に初等変換

23

とき、 $\bar{\kappa}$ はこれらの合成によって、 $\bar{\kappa}(S)=1$ の $(\bar{S}, D)$ の固有双有理写像は同型を除いてすべてえられるのである。

$\bar{\kappa}(S) \geq 0$ の $(\bar{S}, D)$ の双有理幾何を行う上で次の変換は重要な役割を演じる $(\bar{S}, D)$ を日曲面とし、 $p \in D$ をとり、 p 中心の二次変換を

$$\lambda: \bar{S}' = Q_p(\bar{S}) \longrightarrow \bar{S}, \quad D' = \lambda^{-1}(D) \quad \text{とかく}$$

p が D の二重点のとき、 $\lambda: (\bar{S}', D') \rightarrow (\bar{S}, D)$ を 正準二次変換 という。このとき

$$K(\bar{S}') + D' = \lambda^*(K(\bar{S}) + D)$$

定理 6. $(\bar{S}, D), (\bar{S}', D')$ を日曲面とし、ともに相対的に日極小。さしに $S = \bar{S} - D = \bar{S}' - D'$ と、 $\bar{\kappa}(S) \geq 0$ と仮定する。 $f: (\bar{S}, D) \rightarrow (\bar{S}', D')$ を固有双有理写像とすると、 f の不確定点集は、正準二次変換の合成 $\mu: (\bar{S}^*, D^*) \rightarrow (\bar{S}, D)$ により不確定点を除去できる。即ち $g = f \circ \mu$ は正則写像になり、これも正準二次変換の合成になる。よって $(K(\bar{S}) + D)^2 = (K(\bar{S}') + D')^2$ 。

正準二次変換の中心は D の二重点として、

24

特定されているから高々可算個しかない。

定理 6 の条件を満たす $(\bar{S}, D)$ をとり、 $\bar{S}$ に $\varphi \in \text{Aut}(\bar{S})$ とする。 φ は双有理の字族 $\psi: (\bar{S}, D) \rightarrow (\bar{S}, D)$ と定まる。 定理 6 により、正準 2 次変換の合成 $\mu: (\bar{S}_i, D_i) \rightarrow (\bar{S}, D)$ により、 $g = \psi \cdot \mu: (\bar{S}_i, D_i) \rightarrow (\bar{S}, D)$ は正則な写像。
 g は、 D_i 内の例外成分のいくつかに D の 2 重直線に写像しているのだから、 g^* も正準 2 次変換の合成で正則化され、結局、同型 $\psi_i \in \text{Aut}(\bar{S}_i, D_i)$ とえる。 さて $\text{Aut}(\bar{S}_i, D_i)$ を G とおく。 D_i の各既約成分を $\Gamma_1, \dots, \Gamma_c$ とし、 G を $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_c\}$ に作用させ、その自明作用部分群を G° とおくと $(G: G^\circ) \leq c!$ 。 G° の元 ψ は $\psi(\Gamma_1) = \Gamma_1, \dots, \psi(\Gamma_c) = \Gamma_c$ 。 よって、 D_i 上の成分 Γ_j も Γ_j に写像するので ψ は $\bar{\psi} \in \text{Aut}(\bar{S}, D)$ と導く。 いふかえると、 $\text{Aut}(\bar{S})$ は、可算指数を無視すると

$\text{Aut}(\bar{S}, D)$ に入るのである。 例えは、 $\mathbb{P}^2$ 射影 3 次曲線を S とすると、 $\text{Aut}(S)$ が可算個の元よりなることがわかる。

さて $\pi(S) = 0$ のときの S の極小完備化の決

定は次の付録で行われる。

さて、代数曲面論の現状(1977年12月26日)と総括してみる。

Ⅲ) $\chi(S)=2$ の曲面 S . $(\bar{S}, D)$ と内部に S の極小の円曲面とし、さらに $(\bar{S}, D)$ には D 例外曲線がないとしてよい。ここで、さらに、 $(\bar{S}, D)$ に 毛 ($D=X+D'$, $X=\mathbb{P}^1$, $(X, D')=1$, $X^2 \leq -2$ とする $X \in (\bar{S}, D)$ の 毛 または、端成分 という) がない場合には $K(\bar{S})+D$ は準アンプールになり、 $m \gg 0$ のとき $H^1(m(K(\bar{S})+D))=0$ なる結論も出る(酒井)。しかし、毛 がある場合の研究は難しく手がついていない。

Ⅲ½) $\chi(S)=1$ の曲面. S の標準ファイバー曲面は楕円曲面又は対数的楕円曲面(一般ファイバーが $\mathbb{C}^*$; 準楕円曲面ともいう)の構造をもつ。後者は、飛田によって詳しく研究された(1977年3月の修論)。前者は近論小平先生の論文。

Ⅳ) $\chi(S)=0$ の曲面. S の完備化 $\bar{S}$ が $\chi(\bar{S})=0$ のときは、古典理論に帰着される。 $\chi(S)=0$, $F_g(S)=0$ のときには $P_2=1$ となる最小

26

の i をとり $|i(K(S)+D)| \ni \Gamma$ を合成曲線にする
 補写 $\tilde{S} \rightarrow S$ とくると $\pi(\tilde{S})=0$, $\bar{p}_g(\tilde{S})=1$.
 かくして、この場合の研究にすべてお帰せら
 れる.

$\bar{S}$ は有理曲面 D は $\bar{S}$ 上の正規因子.

$S = \bar{S} - D$ とかくとき $\pi(S)=0$, $\bar{p}_g(S)=1$.

すると $\bar{q} = \bar{q}(S) = 2, 1, 0$ であり、それぞれ
 構造は付録の後半で定められる。古典理論で
 は $\bar{q}=1$ の場合存とおきない。しかし、3次元
 以上だと、このようなことは古典理論でもお
 きる。である。た(井草の例).

I) 従って残った場合は $\pi(S) = -\infty$ である.

$\bar{q}(S) \geq 1$ なら S の準 Albanese 写像を用いて.

m 又の定理が応用できる. $\pi(S) = -\infty$, $\bar{q}(S) = 0$
 となる曲面の構造は一般的には何もわからな
 い. 以上

昭和53年1月1日にきた手紙で、Ⅳの場合
 の研究に新居望のひらけたことと m 又は報い
 ている。一般論が一気にいきそうでした

Ⅱ) についても一見しよう。対数的 $K3$ 曲面の

27

研究結論から.

$\bar{p}_g(S) = 1 \vee \pi(S) = 0$, $g(\bar{S}) = 0$ となり S は代数
的楕円曲面の構造を与えた. 又は, ($\mathbb{P}^n$ 型
の代数 $K3$ のとき) $C_n \cong \mathbb{C}^*$ と一般元とする, 指数
数 > 1 の代数的束をもち (このときより) 2
の結論を得た. 即ち $\mathbb{P}^2 - C$ の分類理論である.

$S = \mathbb{P}^2 - C$ (C は既約) とし, $\bar{p}_g(S) \geq 1$ と
する. $d = \deg C \geq 3$ となり,

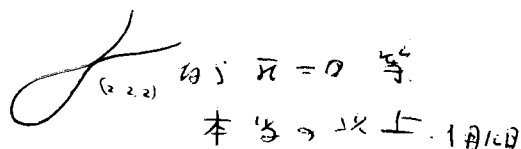
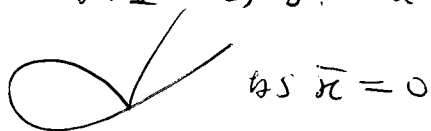
i) $d=3$ なら $\pi(S)=0$ して C は楕円曲線. S
は $\mathbb{P}^2$ 型の代数的 $K3$, C は有理曲線. S は $\mathbb{P}^2$
型の代数的 $K3$ 曲面.

ii) $d \geq 4$, $g(C) \geq 1$ なら $\pi(S)=2$ (酒井・群)

iii) $d \geq 4$, $g(C)=0$, C^* は C の非特異な部分
とするとき $\mu: C^* \rightarrow C$ により $\#(\mu^{-1} \text{Sing } C)$
を σ とおく.

$\sigma \geq 3$ なら $\pi(S)=2$.

iv) $d \geq 4$, $g(C)=0$, $\sigma=2$ の場合 $\pi(S)$
は複雑である. $d=4$ と 7 .



(付録)

1

環状境界と対数的K3曲面

飯高 茂

1. $\bar{S}$ を完備非特異曲面とし, D を $\bar{S}$ 上の因子で正規交叉をもつものとする. 対 $(\bar{S}, D)$ を 2-曲面とよんだ. $S = \bar{S} - D$ は $(\bar{S}, D)$ の内部であり, また, $\bar{S}$ は S の通常境界 D を持つ完備化という.

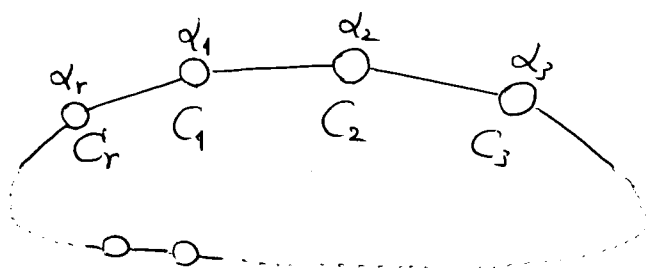
$D = \sum_{i=1}^r C_i$ を既約因子への分解とする. そこで,

$$i) C_i = \mathbb{P}^1,$$

$$ii) i-j \equiv 1 \pmod{r} \text{ なら } (C_i, C_j) = 1. \text{ また, } i-j \not\equiv 0, 1 \pmod{r} \text{ なら } (C_i, C_j) = 0$$

を満たす D を環状境界ということにしよう.

D の双対グラフをかくと

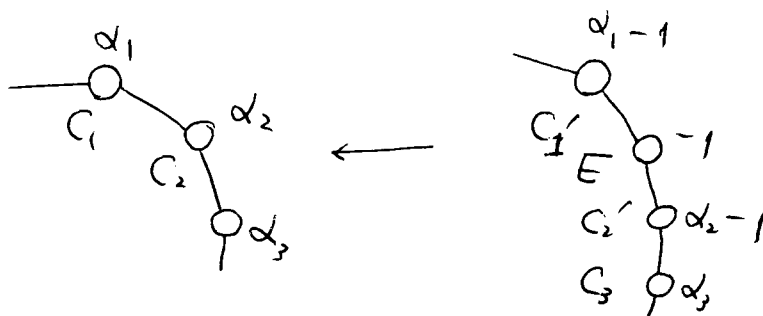


となる. ただし, $\alpha_i = C_i^2$ である.

さて, $C_1 \cap C_2 = \{p\}$ の点 p を中心に2次元変換を

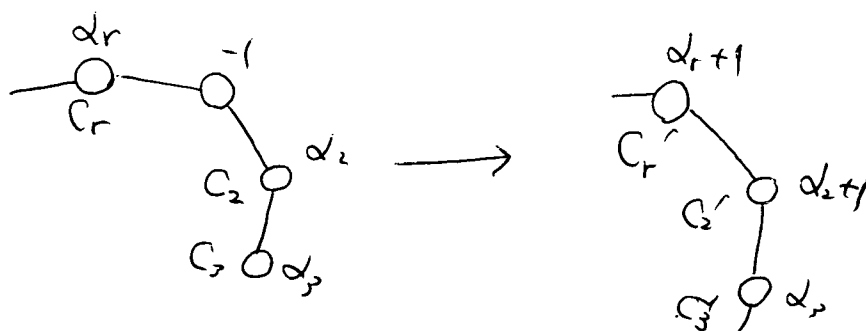
2

しようにすると,



ここに E は, 2次変換の例外曲線である.

逆に $\alpha_1 = -1$ のとき, Castelnuovo の判定法により, これは一点に潰れる.



ここで, 各 $\alpha_j \neq -1$ となる環状境界を極小とよぶことにしよう. ここで, 2次変換は $\mathbb{D}$ の2重点中いづれかのみを考えている. ところが2次変換は, 正確な2次変換ともよばれる.

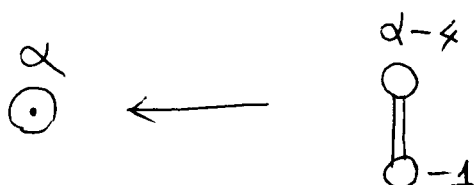
$\pi = 1$ の環状境界とは, 1個の通常2重点

3

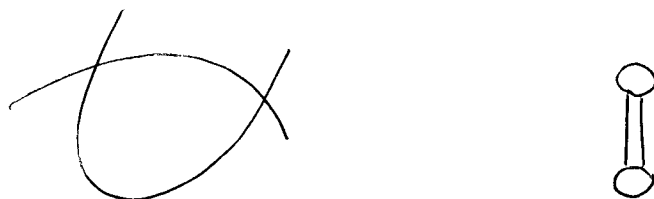
をもつ有理曲線のことがあつた。この点を中心に
に2次変換すると次の図のようになる。



$(C_1')^2 = C_1^2 - 4$ であるから、 C_1 は $\odot$ で表
わすと、



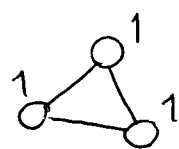
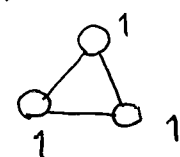
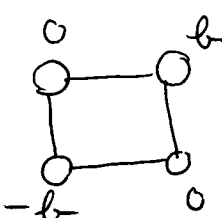
となる。 $r=2$ とは、次の図の如きものである。



環状境界 D に2次変換をひそく逆をくり返
し行なう。かくてえた D^* と D と同値 (2-双
有理同値とよべば正確なところ) という。

4

問題 与えられた D に対し, D と同値な極小環状境界を求めて求めよ.

例 1. D として  とする. すると
 極小の D^* は $D^* =$  又は  $b \neq 1, b \geq 0$.

このとき, $\bar{S}^*$ は左から $\mathbb{P}^2$, 右から Hirzebruch 曲面である. $b \neq 1$ と,

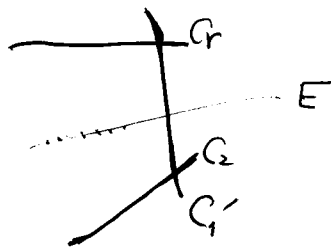
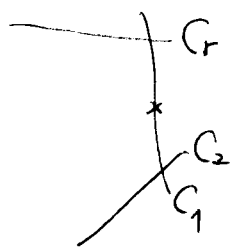
$\mathbb{C}^{*2}$ の極小完備化 $(\bar{S}, D)$ は上のものに
 限る,

となる. もっともこれをいう場合には, 2-曲面の双有理幾何をやらねばならぬ. これだけで自明なわけではない. ともかく, $\pi(S) = 0$, $\bar{\rho}_g(S) = 1$ とおいた S の極小完備化の決定には上の問題ととまざるべしである.

5

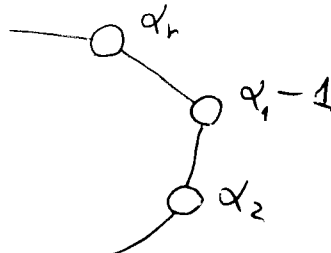
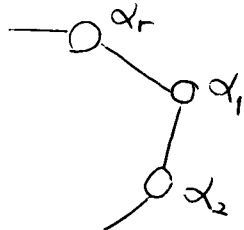
2. 勿論すべての環状グラフ $(\bar{S}, D)$ の D からえられるのではない。 D からえられるグラフを幾何的という。幾何的グラフの必要条件を求めてみよう。その為に「半点添加」という有理変換を定義せねばならない。

$(\bar{S}, D)$ を δ -曲面とし、 $p \in D$ の特異点外からとり、 $\lambda: Q_p(\bar{S}) \rightarrow \bar{S}$ と p の二次変換とする。 $\bar{S}' = Q_p(\bar{S})$, $D' = \lambda^*(D) = E + D^*$ とおく。 $E = \lambda^*(p)$ である。 $\bar{S}' - D' = \bar{S} - D = S$ であるから、 $S^* = \bar{S}' - D^* \supset S$ である。 S^* は S の中の p の半点添加、 S と S^* から半点除去した曲面という。図の通りである。



$$(C_1')^2 = C_1^2 - 1.$$

グラフでみるとき



6

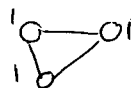
即ち、幾何的グラフ Γ があるとき、各頂点の重みをいくら減いても幾何的なのである。 S に半点がないかというのを判定することは難しい。 S の通常境界 D をもつ完備化を $\bar{S}$ とするとき、常に $E \subset \bar{S}$, $E \not\subset D$, $(E, D) = 1$ となる例外曲線の^(注)ないとき、はいめて、 S には半点がない、という。完備化は色々あるから、これを調べるのは楽でない。

例 $\mathbb{C}^{*2}$ の完備化 $\bar{S}$ は通常境界 D を持つでしょう。 S に半点があるなら、それを除いて、 $S' \subset S$ もえる。すると、 $0 = \pi(S) = \pi(S')$, $\bar{q}(S') \geq \bar{q}(S) = 2$. さて、 $\pi(S') = 0$ のとき $\bar{q}(S') \leq 2$ になり、 S はアフィンだから、 S' もアフィン。ゆえに、 $\mathbb{C}^{*2}$ の $\pi, \bar{q}$ 判定定理により、 $S' = S$ となり矛盾。 $\therefore S$ は半点を持つ。

一般に S' は S の半点除去とすると $\bar{p}_m(S') = \bar{p}_m(S)$, $\bar{q}(S') = \bar{q}(S)$ 又は $= \bar{q}(S) + 1$ である。

注) $E - E \cap D \simeq A^1$ であるから、これを半点とよぶのである。

7

定理 1. $(\bar{S}, D)$ を曲面とし, D は環状境界とする. $\exists \tau \ C_1^2 \geq 0$ ($r=1$ のときは $C_1^2 > 0$) と仮定すると, D は  かつ, 半点添加の ω 二次変換と ω の逆によりつくられる.

証明は次のような順で入るで行われる.

i) $C_1^2 \geq 0$, $\pi(C_1) = 0$ により $K = K(\bar{S})$ として,

$$(K, C_1) + C_1^2 = -2.$$

すると $(K, C_1) \leq -2$. よって, $\chi(K, \bar{S}) = -\infty$.

よって, $\bar{S}$ は線織面になる. $C_2 = \mathbb{P}^1$ かつ C_1 と交わるから $\bar{S}$ は非有理的になりえない.

$r=1$ のときは, $C_1^2 > 0$ と仮定するから, 同様にして, $\bar{S}$ は有理曲面になる. ω 二次曲面の Riemann-Roch 定理によると,

$$\dim |C_1| = 1 + C_1^2.$$

ii) $C_1^2 = 0$, かつ $j \neq 1, 2, r$ に対し $C_j^2 = 0$ とすると, $r=4$ である, $\tau \ C_1 \sim C_3$ (線型同値).

[証明]. $\exists \tau$ i) により $\dim |C_1| = 1$, $\dim |C_j| = 1$.

$p \in C_j$ を一つ定め, $|C_j|$ の元 D で p を通るものとする. $(D, C_j) = (C_1, C_j) = 0$, $C_1^2 = 0$ により

8

C_j は D の成分となる 即ち, $D = C_j + F$ ($F \geq 0$).

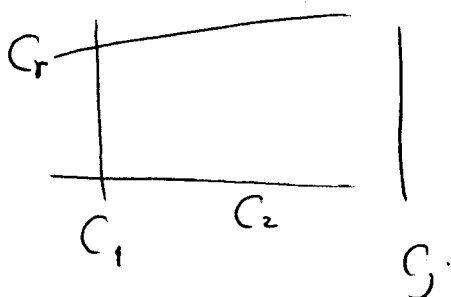
逆の考察, 即ち, C_1 を通る $|C_j|$ の元 ε となることにより, $C_j \sim C_1 + F'$ ($F' \geq 0$) となる. 合せて,

$$C_j \sim C_j + F + F'.$$

よって $F = F' = 0$. 即ち $C_1 \sim C_j$. さて,

$$1 = (C_1, C_2) = (C_j, C_2), \quad 1 = (C_1, C_r) = (C_j, C_r)$$

なるので, $r = 2$ となる.



iii) ii) の仮定のもとに, D は $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \circ & \circ \end{smallmatrix}$ として表されることを示そう.

$|C_1|$ の一般の元 $\varepsilon \in C_n$ とし, C_1 と C_n を生成する 1-次元 Λ とする. Λ は正則写像 $f: \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を定める.

1) $f: \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ は特異ファイバーを持たぬ, と仮定する. すると, $\bar{S}$ は $\mathbb{P}^1$ 束となる. いわゆる Hirzebruch 曲面 Σ_g になる. さて, C_2, C_g

9

は, $\Sigma_b \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断となっており。しかも,
 $C_2 \cap C_\infty = \emptyset$ をみたしている点に注意。

補題 1.

i) $b \geq 1$ とする。 $C^2 < 0$ となる既約曲線は
 Σ_b 上唯一つで、それは ∞ 切断 Δ_∞ である。

$\Gamma = f^{-1}(v)$ とすると、 $\Sigma_b \rightarrow \mathbb{P}^1$ の ~~他の~~ 切断は $\Delta_\infty + b\Gamma$
と線型同値である。 Γ, Γ_0 一つと Δ_0 とおくと、
 $\Delta_0^2 = b, (\Delta_0, \Delta_\infty) = 0, \Delta_\infty^2 = -b$ 。

ii) $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ のとき、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の切断
は $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ によって Γ_φ である。 $\Gamma_1 = \mathbb{P}^1 \times p_1$,
 $\Gamma_2 = p_2 \times \mathbb{P}^1$ とおくと $\Gamma_\varphi \sim \Gamma_1 + d\Gamma_2$, $d = \deg \varphi$.
ゆえに $(\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi) = d + d_1$, $d_1 = \deg \psi$ ゆえに
 $(\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi) = 0 \iff \Gamma_\varphi \sim \Gamma_\psi \sim \Gamma_1$

これによると、 $\bar{S} = \Sigma_b$ ($b \geq 1$) なら $C_2 = \Delta_0$,
 $C_\infty = \Delta_\infty$ である。 $C_2^2 = b, C_\infty^2 = -b$ 。 よう

て $S = \Sigma_b - D = \mathbb{C}^{*2}$ なら $\bar{S} = \Sigma_0$ とする。

$C_2 = \mathbb{P}^1 \times a, C_\infty = \mathbb{P}^1 \times a'$ とおけるから $S = \mathbb{C}^{*2}$ 。

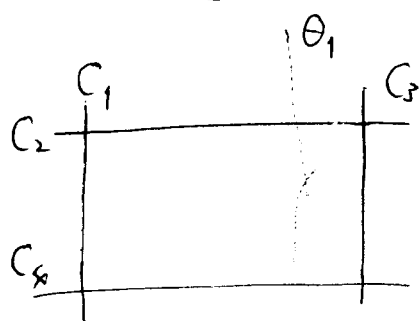
ii) $f: \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ が特異ファイバーをもつとす
る。 $F = f^*(a) = \sum_j m_j \theta_j$ が特異ファイバーと

10

する. $j \geq 2$ と なり $\theta_j^2 \leq -1$ が成立つ. F の成分に於て一種例外曲線があるから. それを一つと里, θ_1 とおく. $\theta_1 \not\subset D$ であるから. 次の場合がおこる

66) $(\theta_1, C_2) = (\theta_1, C_\infty) = 0$. $\theta_1 \cap D = \emptyset$ である. θ_1 は 1 点に於てだけ交わる. D には影響がない. だが S の中の θ_1 は 5 点にあるのである.

67) $(\theta_1, C_2) = 1$, $(\theta_1, C_\infty) = 0$. θ_1 は 1 点に於てだけ交わる. S は



半点 $(\theta_1 - \theta_1 \cap C_2)$ を除去したことになる.

68) $(\theta_1, C_2) = (\theta_1, C_\infty) = 1$. さて,

$$1 = (C_1, C_2) = (F, C_2) = m_1 (\theta_1, C_2) + \sum_{j=2}^n m_j (\theta_j, C_2) \geq m_1$$

よって $m_1 = 1$ になる. さて $j \geq 2$ につき

$$(\theta_j, C_2) = 0. \text{ 同様にして } (\theta_j, C_\infty) = 0 \text{ である.}$$

さて, 次の補題を用いる

補題 2. $m_1 = 1$. θ_1 は一種例外曲線のと

11

き. S に別々の二種例外曲線 Θ_2 がある.

証明 $F^2=0$ より $(K, F) = -2$. $\Theta_j^2 \leq -2$

と $(K, \Theta_j) \geq 0$ は同値 ゆえに

$$\begin{aligned} -2 &= (K, F) = \sum m_j (K, \Theta_j) \\ &= -1 + \sum_{j=2} m_j (K, \Theta_j) \end{aligned}$$

より明か.

Q.E.D.

ゆえに, 二種例外曲線 Θ_2 があり これについて, 松)の場合に使える.

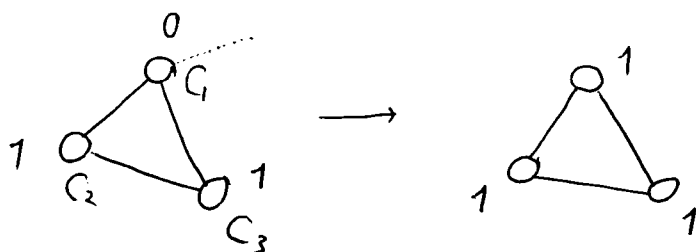
かくて, 同変換と半点除去により S は $\mathbb{C}^{r2}$ に利することになった.

iv) $C_1^2=0$, $r=3$ のときを考察する. 前段と同様の考察により, $\bar{S} = \bar{Z}_1$ としてよいことがわかる $(C_2, C_3)=1$ となる切断 C_2, C_3 があるから 2 の 2 の場合がある.

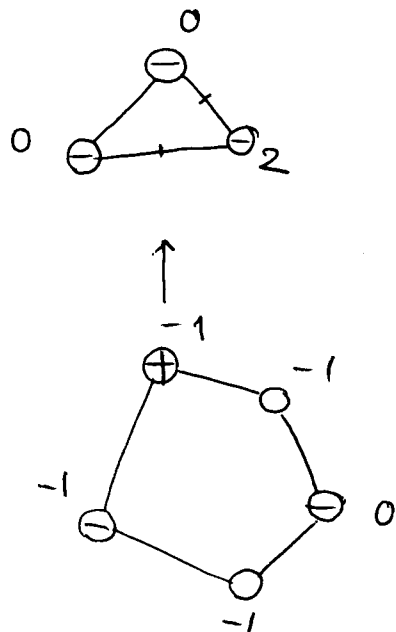
陰) $\bar{S} = \bar{Z}_1$ ($l \geq 1$). すると $l=1$, $C_2 = \Delta_0$, $C_3 \sim \Delta_\infty + \Gamma_1$. して, Δ_∞ も切断なのだから $(C_1, \Delta_\infty)=1$, $\Delta_\infty \cap C_2 = \emptyset$, $\Delta_\infty \cap C_3 = \emptyset$ 即ち, $\Delta_\infty - C_1 \cap \Delta_\infty$ は S の半点なのである. これを除去する. C_1 の像を C_1' とするとき,

12

$(C_1')^2 = C_1^2 + 1 = 1$. Σ_1 (変換後) は $\mathbb{P}^2$ になる. よって,
 S の 半正除去は $\mathbb{C}^{*2}$ である. グラフで書くと
 かくう.



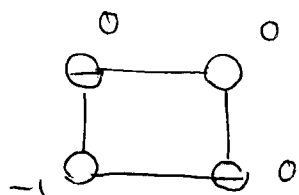
陽) $\bar{S} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. $C_2 = \mathbb{P}^1 \times p_1$, $C_3 \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$
 としてよい. かくえはかくうグラフとえる.



図の 1 印の所で 2 変換する. かくり易くす
 るために, 固有変換に依る所は 0, 0 と 印

13

つけておいた。ついで $\oplus$ を一変ちかぬ。
すると、



ええ。ゆえに、前の場合か使えるのである。

i) $C_1^2 = 0$, $j \neq 1, 2$, なる市に $C_j^2 < 0$ のとき
このとき $p \in C_j$ として, $|C_1|$ の元で p を
通すものをとると特異ファ イバーである。他
の議論は同じ。

ii) $C_1^2 > 0, r \geq 2$ のとき。さて, $C_1 \cap C_2$ の適中
心の 2 次変換を行い, さらにくり返すと。前
の場合に戻す。

iii) $r = 2$, $C_1^2 = 0$, $C_2^2 \leq 0$ とする。この
ときも, $\bar{S} = \bar{Z}_b$ としてよい。 $(C_1, C_2) = 2$
たえら, $C_2 \sim 2\Delta_0 + m\Gamma_1$ ($m \geq 0$) となる。 $C_2^2 =$
 $4b + 4m \geq 0$ になるから $b = m = 0$ 。よって,
 C_2 は可約となり矛盾。

注意。ここでも矛盾が現れるのは少々妙なことで
ある。 $(C_2^2 \leq 0)$ という仮定が不自然なのである。

14

3) $C^2 > 0$ のときは後述に於ける。

VIII) $r=1$ のときは $C_1^2 \geq 4$ と仮定している。

2次変換により前の場合へ帰着される。

定理 2. $(\bar{S}, D)$ と $(\mathbb{P}^2, \bar{\Delta})$ から半点添加と正準 2 次変換 ω により得られた 2-曲面とする。さらに $D = \sum C_i$, $C_i^2 \geq 0$ と仮定すると、グラフは次の通りである。

- i) $\odot m \leq 9$. $m=9$ なら $\bar{S} = \mathbb{P}^2$
 $m=8$ なら $\bar{S} = (\Sigma_0 \text{ 又は } \Sigma_2, \Sigma_1)$
 ii) $1 \bigcirc \text{---} \bigcirc \times$, $\bar{S} = \mathbb{P}^2$

ω の半点添加

- iii) $2 \bigcirc \text{---} \bigcirc 2$; $\bar{S} = \Sigma_0, \Sigma_2$

ω の半点添加

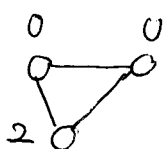
- iv) $0 \bigcirc \text{---} \bigcirc \times$ $\bar{S} = \Sigma_0$

ω の半点添加

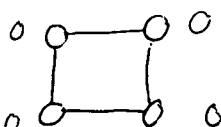
- v) $\begin{array}{c} 1 \bigcirc \quad 1 \bigcirc \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$ $\bar{S} = \mathbb{P}^2$

ω の半点添加

15

VI)  $\bar{S} = \Sigma_0$

それにこの半点添加

VII)  $\bar{S} = \Sigma_0$

証明.

補題. 半点添加するとき

$$K(\bar{S}') + D' = \lambda^*(K(\bar{S}) + D),$$

すなわち $(\bar{S}', D')$ は $(\bar{S}, D)$ の正準変換のとき,

$$K(\bar{S}') + D' = \lambda^*(K(\bar{S}) + D). \quad \text{——}$$

さて, $K(\mathbb{P}^2) + \Delta \sim 0$. ゆえに, $K(\bar{S}) + D \sim 0$.

まず $\bar{S} = \mathbb{P}^2$ とすると, 直 S に, $D =$

$$0 \cdot 9, 10 \text{ --- } 0 \times, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}$$

となる. $\bar{S} = \Sigma_b$ とする. $-K(\bar{S}) \sim \Delta_0 + \Delta_\infty + 2\Gamma_1$ である. $b=0$, $b \geq 2$ に依りてかなり異なる. $b=0$ のとき $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. $\Gamma_1 = \mathbb{P}^1 \times p$, $\Gamma_2 = p \times \mathbb{P}^1$ とおく. Σ_0 の曲線 C は $a_1\Gamma_1 + a_2\Gamma_2$ と線型同

16

値であり, $a_1 \Gamma_1$ と線型同値となる既約曲線があれば $a_1 = 1$ になる.

$$2\pi(C_1) - 2 = G(C_1 + K) = 2(a_1 a_2 - a_1 - a_2)$$

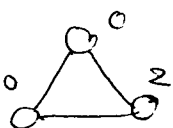
になるから, $\pi(C_1) = 1$ ならば, $a_1 = a_2 = 2$. このとき

は $C_1^2 = 8$. また $\pi(C_1) = 0$ ならば, $a_1 = 1$ 又は $a_2 = 1$.

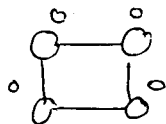
$\pi(C_1) = \pi(C_2) = 0$, $(C_1, C_2) = 2$ とすると, $2 \circ \equiv \circ 2$,

$4 \circ \equiv \circ 0$, 1 になる. $(C_1, C_2) = 1$ とすると, $C_1 \sim \Gamma_1$,

$C_2 \sim \Gamma_2$ 又は $C_1 \sim \Gamma_1$, $C_2 \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$. したがって,

$r=3$ ならば  $C_1 \sim \Gamma_1$, $C_2 \sim \Gamma_2$, $C_3 \sim \Gamma_1 + \Gamma_2$

1 になる. $r \geq 4$ ならば $C_1 \sim C_3 \sim \Gamma_1$, $C_2 \sim C_4 \sim \Gamma_2$.

 1 になることがわかる.

よって, $b \geq 2$ について $\bar{S} = \Sigma_b$ とする. 同

様の推論により, $r=1$ ならば $b=2$, $C_1 \sim 2\Delta_0$. この

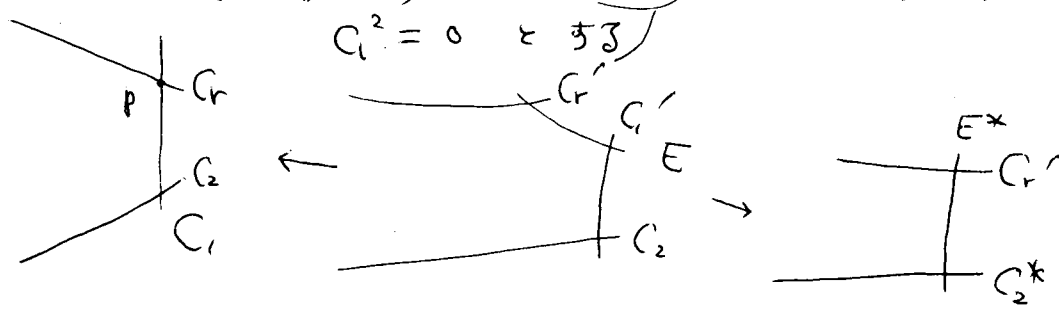
とき $C_1^2 = 8$. $r \geq 2$ ならば, $b=2$, $C_1 \sim C_2 \sim \Delta_0$

となることがわかる. したがって, $2 \circ \equiv \circ 2$

なるのである.

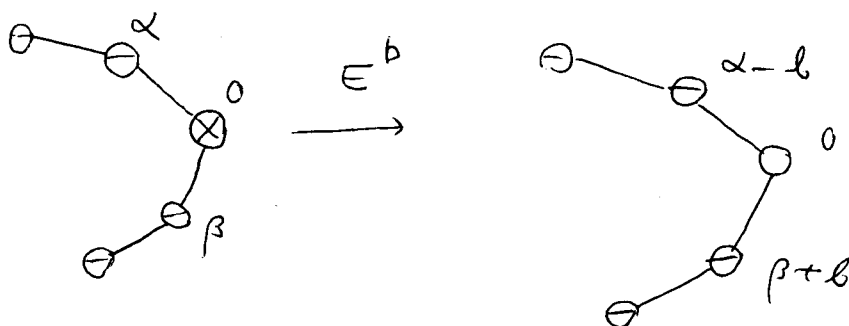
17

3 E変換(初等)を定める, $r \geq 3$ とする,



すると $E^{*2} = 0$, $C_r'^2 = C_r^2 - 1$, $C_2^{*2} = C_2^2 + 1$.

これを, 中心 p , 軸 C_1 の E 変換という, くり返して E^b 変換をえる. 詳しくは $E^b[p, C_1]$ とおく. 以下つづいてみる.

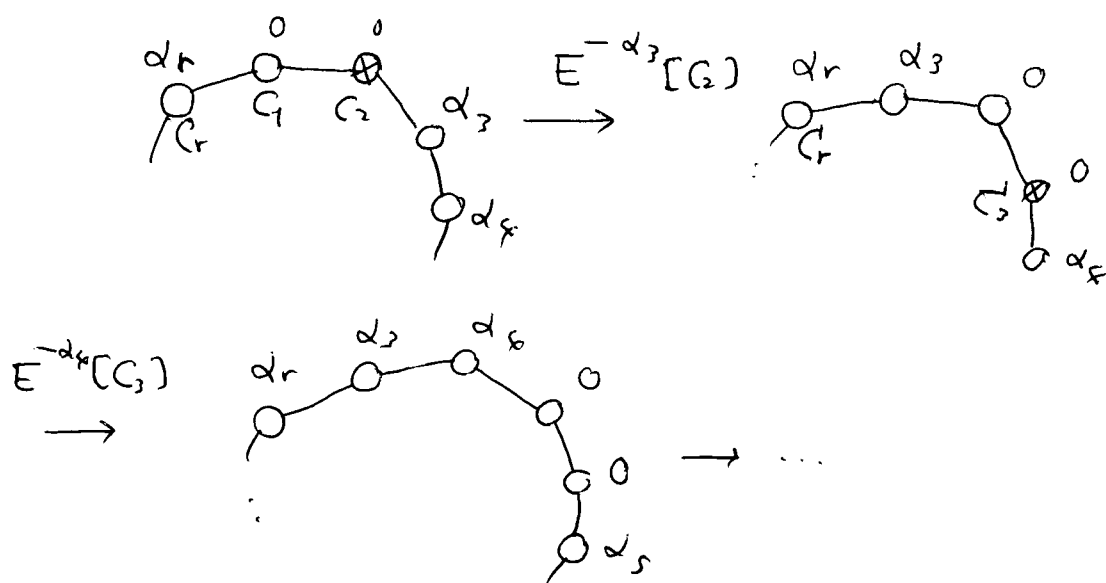


⊗ は, 変換によつて, 消失する成分があることを意味する.

さて, 各重み α_j が 0 または ≤ -2 になるとき, 負の極小グラフという. また $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \leq -2, \dots, \alpha_r \leq -2$ のとき $(0,0)$ 負の極小グラフという.

18

さて、いくつかの例外を除いて、極小環状グラフは、完全星（すなわち j につき、 $\alpha_j \leq -2$ ）となっていて、 $(0,0)$ の極小グラフに同値なことがわかる。よって $(0,0)$ の極小グラフをとる



このようにして、 $(0,0)$ の位置をずらす（てき）る。 $D[G_2, G_3, \dots, G_t] = E^{-\alpha_{t+1}}[G_t] \circ \dots \circ E^{-\alpha_3}[G_2]$ を D 変換（ダイヤル変換）という。

$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ を同値な $(0,0)$ の極小グラフとしよう。すると $\mathcal{D}_3$ がある。 $\mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{D}_1$ は正準変換の合成 $\mu_{\mathcal{D}_1} \circ \mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{D}_2$ も同じ。 γ

19

ここで μ を最短にとっておく.

さて, $\mathcal{D}_1$ に正準 2 次変換 λ をく返すとき,

$$\mathcal{D}_1 \xleftarrow{\lambda} \mathcal{D}_1' \xleftarrow{\lambda} \mathcal{D}_1^{(1)} \xleftarrow{\lambda} \dots \xleftarrow{\lambda} \mathcal{D}_1^{(\ell)} = \mathcal{D}_3$$

と, γ には $\mathcal{D}_3$ に致る.

補題

$$\mathcal{D}_1^{(j)} \text{ に対して } \dots \overset{-1}{\circ} \dots$$

E_j

と $\mathcal{D}_1^{(j-1)} \xleftarrow{\lambda} \mathcal{D}_1^{(j)}$ の例外曲線 ϵ として, $\mathcal{D}_1^{(j)} \xleftarrow{\lambda} \mathcal{D}_1^{(j+1)}$

の中には E_j の点である. 即ち,

$$\mathcal{D}_1^{(j)} \text{ に対して } \overset{\alpha}{\circ} \overset{-1}{\circ} \overset{\beta}{\circ}$$

E_j

$$\uparrow$$

$$\mathcal{D}_1^{(j+1)} \text{ に対して } \overset{\alpha-1}{\circ} \overset{-1}{\circ} \overset{-2}{\circ} \overset{\beta}{\circ}$$

$E_{j+1} \quad E_j'$ また

$$\overset{\alpha}{\circ} \overset{-2}{\circ} \overset{-1}{\circ} \overset{\beta-1}{\circ}$$

$E_j' \quad E_{j+1}$

となっているのである

証明. くり返し, 場所の中に ϵ があるとする.

即ち,

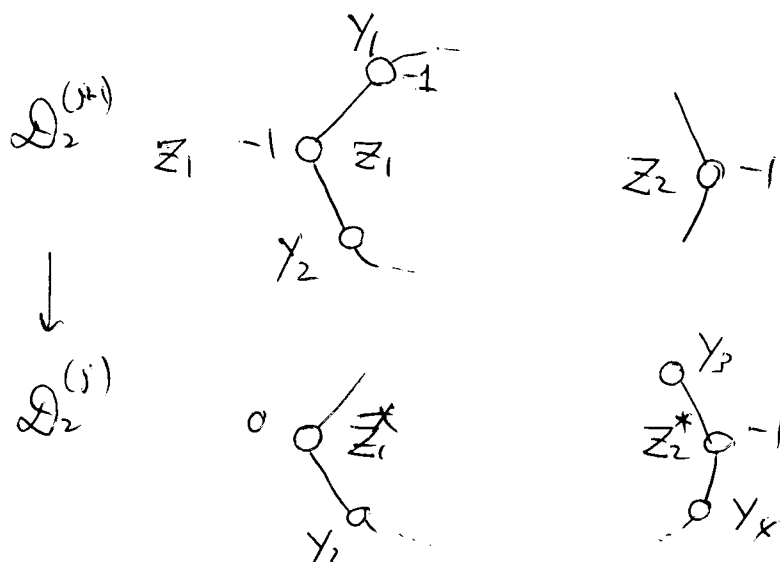
$$\mathcal{D}_1^{(k+1)} \quad \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ E_{j+1} \end{array} - \circ - \cdots - \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ E_j \end{array} - \cdots$$

となる。この $\mathcal{D}_3$ 上の E_j の完全逆像には $\times$ する例外曲線 X_2 がある。又 E_{j+1} における例外曲線を X_1 とする。

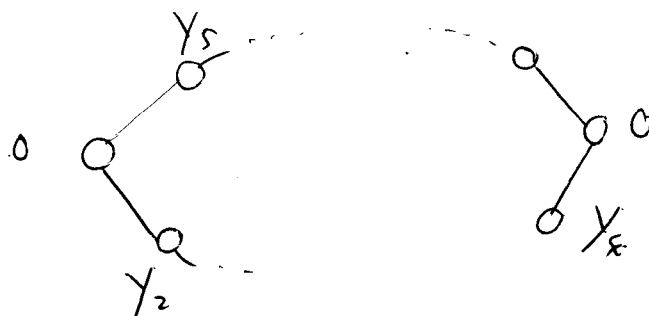
$$\mathcal{D}_3 \quad \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ X_1 \end{array} - \circ - \cdots - \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ X_2 \end{array} - \cdots$$

も $(g(X_1) = \pm 1)$ である。故に X_1 の ± 1 の 2 変換は $\sim$ である。特に $g(X_1) = Y_1, g(X_2) = Y_2$ は曲線である。 $Y_1^2 \geq X_1^2 = -1, Y_2^2 \geq X_2^2 = -1$ による $Y_1^2 = Y_2^2 = 0$ 。故に $\mathcal{D}_2$ は $(0,0)$ の極小かつたから。 $\mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{D}_2$ は正準変換の合成にかけられる。即ち $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_2^{(m-1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}_2^{(1)} = \mathcal{D}_2$ と書ける。 X_2 の像 Z_2 は $Z_2^2 = -1$ から X_1 の像 $Z_1^2 = -1$ 。そして、この段階で $Z_2^2 = -1, Z_1^2 = 0$ とする。グラフをかく。

21



$\gamma = \gamma_1$ $\gamma_1^2 = -1$ が成り立って Z_1 に添付 = 成り立つとする。
 今度は、 Z_2^* に添付 = 成り立つ例升曲線がある。これを γ_3 としよう。
 $\gamma_3 \cap Z_1^* \neq \emptyset$ ならば $Z_1^{**2} = 1$ となり、(まう) ゆえに γ_5 が存在する。かくて図をえる



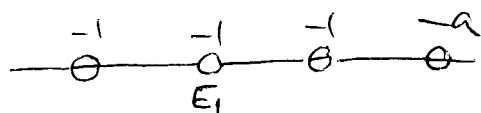
ようて、 $\mathcal{Q}_2$ に添付 0 と 0 とが隣り合わなくなり矛盾する。

22

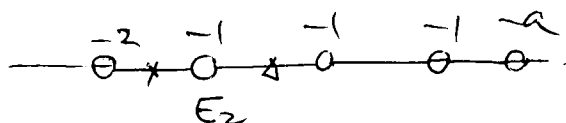
定理3. $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ は (00) の極小グラフと
 (1. $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ とは同値とする このとき $\mathcal{Q}_2$
 は $\mathcal{Q}_1$ の D 変換になる.

証明

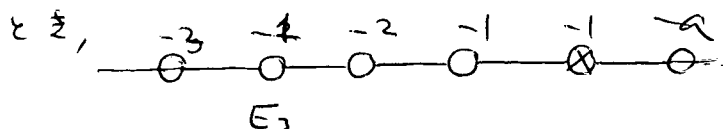
1) $\overset{0}{\circ} \text{---} \overset{0}{\circ} \text{---} \overset{-a}{\circ}$ は $\mathcal{Q}_1$ の同値とする
 同の $\times$ で 2 変換しよう. 次回をえる. 併利



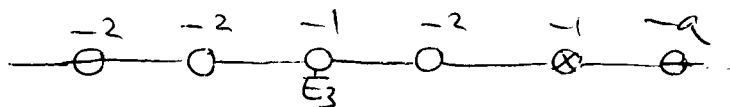
たから, 左側で 2 変換したとしよう.



さて, やはり $\mu: \mathcal{Q}_3 \rightarrow \mathcal{Q}_1$ は最短になると
 すれば, たの $\ominus$ は $\mathcal{Q}_3$ まで -1 のまま残り
 これとちがう事 $g: \mathcal{Q}_3 \rightarrow \mathcal{Q}_2$ は 1 段
 階でなければならぬ. よって今度は $\times$ の



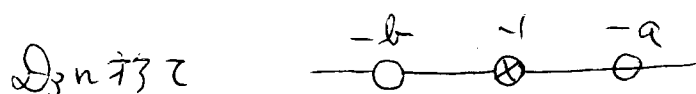
△ のとき



23

こゝで $\ominus$ は $\mathcal{Q}_1$ から生じたもの、 $\bigcirc$ は 2 次
 変換の例外曲線から生じたもの、 $\otimes$ は g で
 つぶれてしまうことを意味する。

さて $\mathcal{Q}_3$ で $\otimes^1$ の左右をみよう。

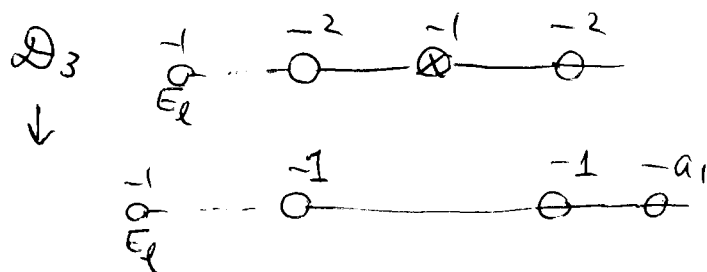


さて $\otimes^1$ をつぶすとき

とえる。 $1-b = -1$ 又は $1-a = -1$ となると、
 はいどて例外曲線をつぶしか進行する。(左の
 側に $\bigcirc_{E_\ell}^{-1}$ がある他は皆 ≤ -2 。しかも E_ℓ

は g でつぶすわけにいかぬ)。3つの場合を
 具合よく調べよう。

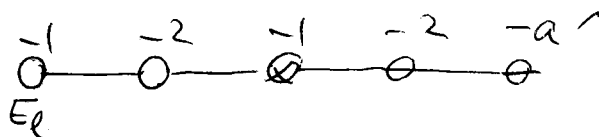
天) $1-b = -1, 1-a = -1$ 。即ち



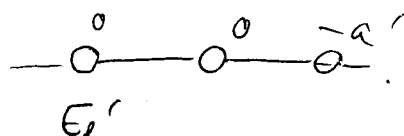
天) 左の -1 をつぶす。このとき E_ℓ にもう
 是れおちこま存へ限り、 $\mathcal{Q}_2$ は (0) 同になす

24

※. 42に



とある。7. なる。 : 4. 5. 7. 8. 9. 10. (2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.)

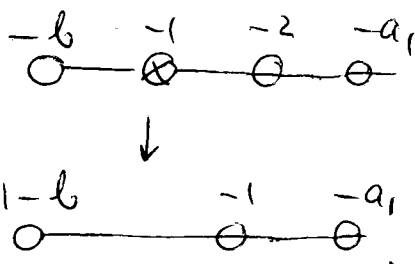


: 4. 5. 7. 8. 9. 10. (2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.)

7. 8. 9. 10. (2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.)

この E_l をつなぐことはできない。よって、
これはおきない。

地) $1-b \leq -2$, $1-a = -1$. $u \sim v$ なる
 $b \geq 3$, $a = 2$.



この前の考察を用いる。まず $1-b = -2$ 又は

$a_1 = 2$. 一般に $1-b = -2$ 又は



$b \geq 3$
 $e \geq 3$

26

$$\Pi_3(b_1-3):$$

$$-b_2 \quad -b_1 \quad -2 \quad -1 \quad -3 \quad -2 \quad -2 \quad -e \quad e \geq 3$$

$e \geq 3$ となる順序は、 $-3, -2$ 。

$$-b_2 \quad -b_1 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -2 \quad -e$$

$$1-b_1 \quad -1 \quad -2 \quad -e$$

$$\Pi_3 \text{ or } \Pi_e: \quad -2 \quad -1 \quad -e$$

$$*) \quad -b_1 \quad -2 \quad -1 \quad -a \quad -a_1$$

$$-b_1 \quad -1 \quad 1-a \quad -a_1$$

$$b_1 = 2 \quad 1-a \leq -3 \quad (\text{or } a \geq 4)$$

$$\Pi_a(b'-2)$$

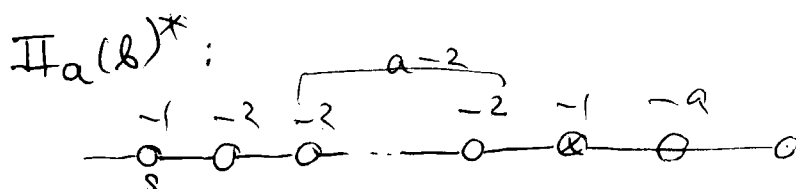
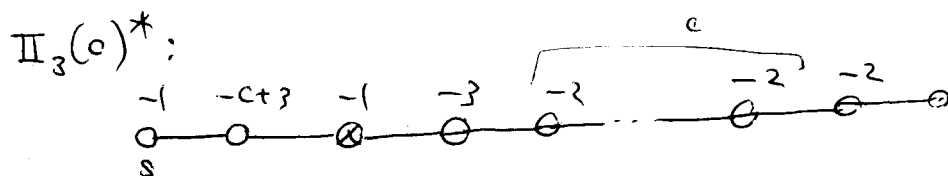
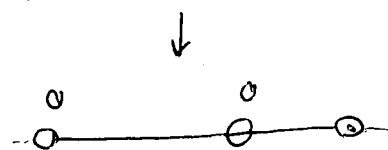
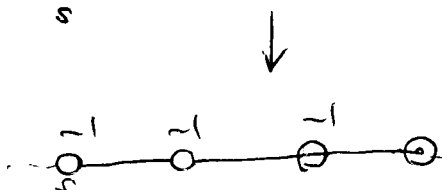
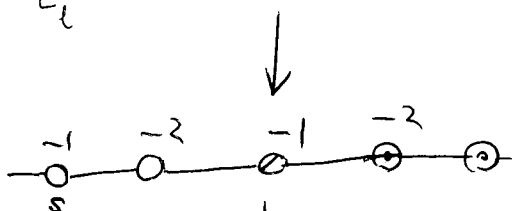
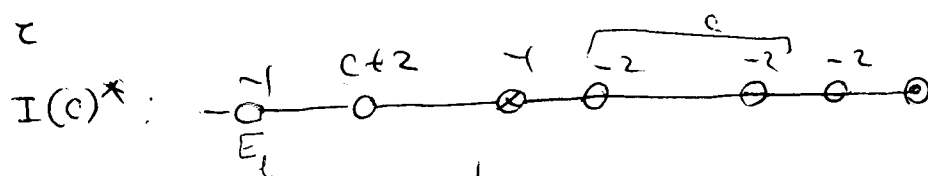
$$-b' \quad -2 \quad -2 \quad \dots \quad -2 \quad -1 \quad -a \quad b' \geq 3$$

とある。すると、

$$I(b'-2): \quad -b' \quad -1 \quad -2$$

27

I, Π_3 , Π_a に対しての形に整理すると $\varepsilon = 2$ の $\mathcal{D}_2$ を得る。これは最小型である。よって、
 $\varepsilon = 2$



($-\frac{1}{\varepsilon}$ の代りに $-\frac{1}{s}$ とかいている。)

s は stable を意味する

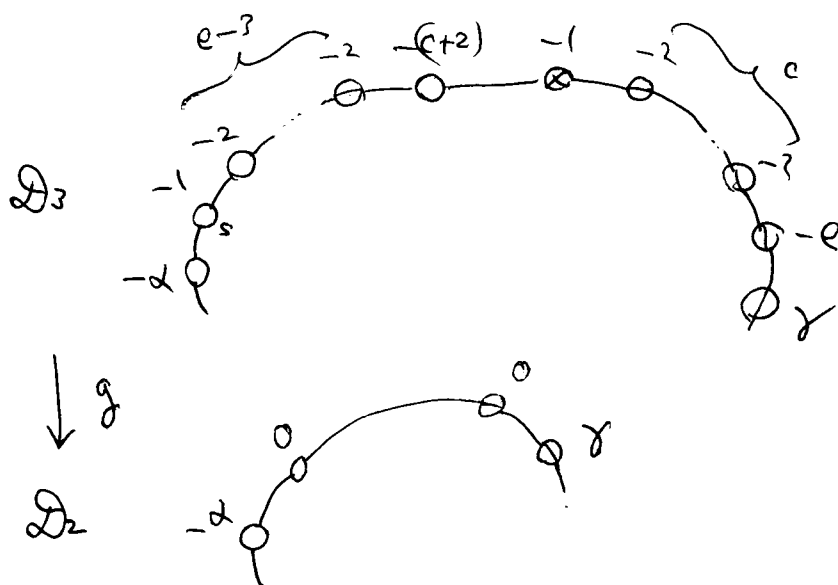
28

I , II_3 , II_a を色々組合せり最後に I^* , II_3^* , II_a^* のいふものを接続して $\mathcal{D}_3$ ができる. これをかくと, D 変換になっていることがわかるのである.

例) $I(c) \circ II_e^*$ とする. ($e \geq 4$)

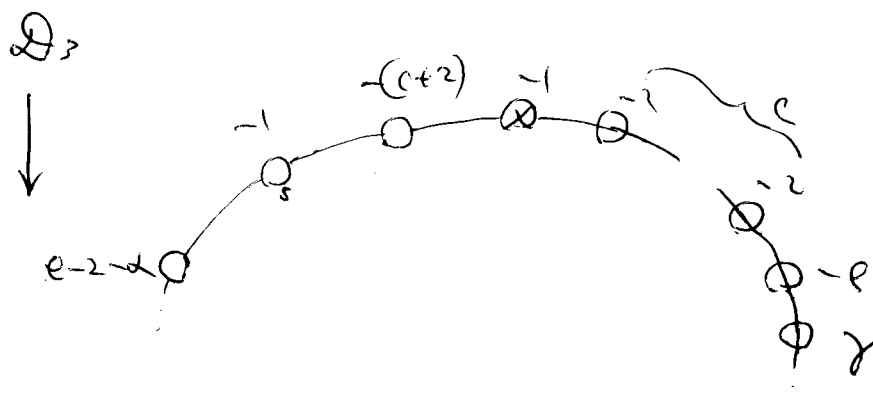
$$I(c): \quad \begin{array}{ccccccc} & -(c+2) & -1 & -2 & & -2 & -e \\ & \circ & \otimes & \circ & \cdots & \circ & \circ \end{array}$$

これに II_e^* を組合せると,

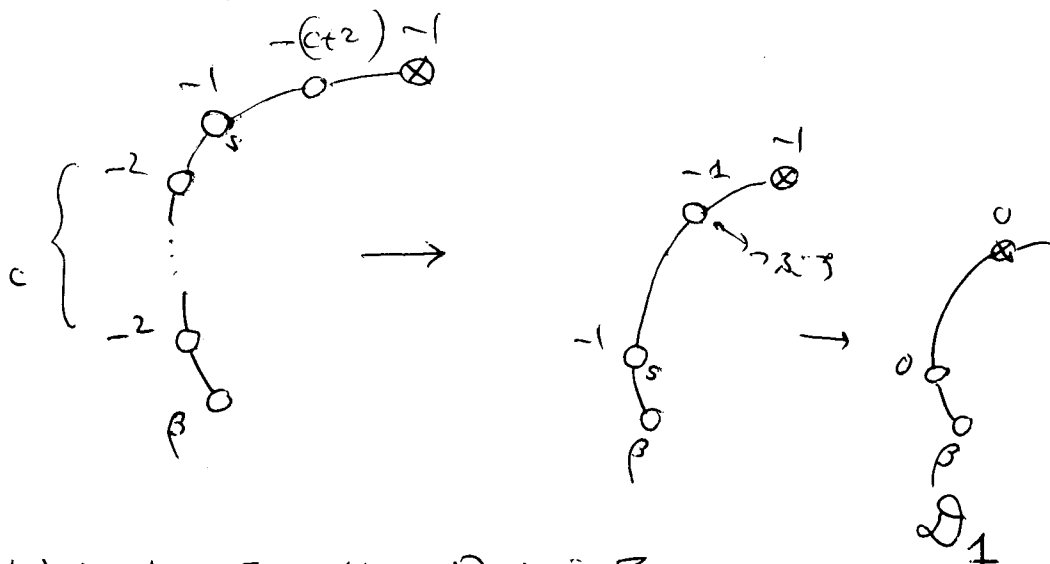


さて $\mu: \mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{D}_1$ の対応を見てみよう. $\frac{-1}{0} \varepsilon$ になるのである.

29

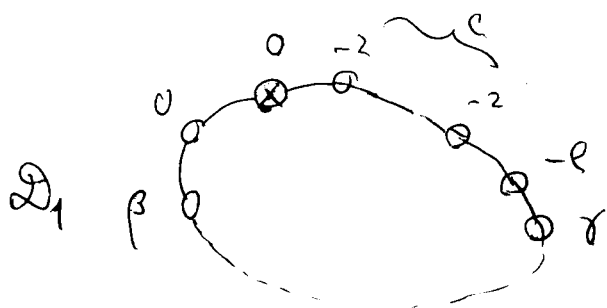


$e-2-\alpha = -2$ となりはいいので $\frac{1}{9}$ くらいしか進行
 できる。である。 $-(c+2)$ は大まかに $e-2-\alpha =$
 -2 かつ $\bar{0}^2$ が必要である。

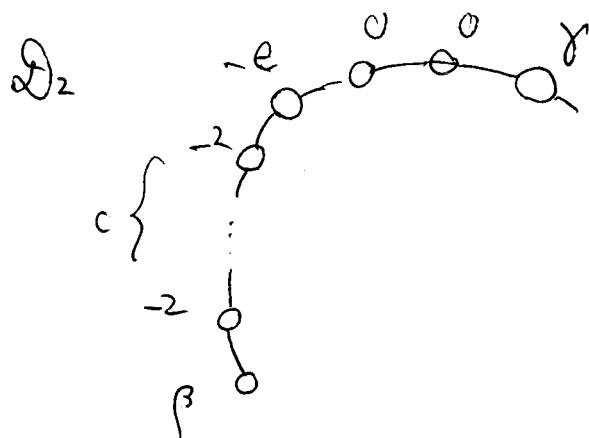
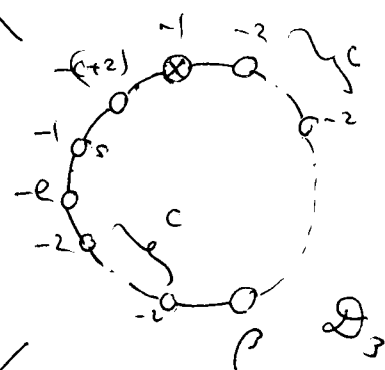


以上によつて、次の図を得る

30



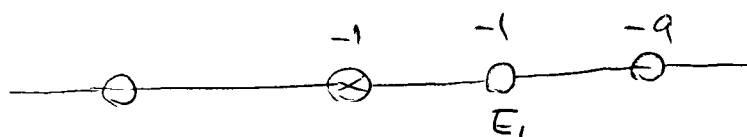
D 変換

 μ $\downarrow$ 

31

ii)  と $\mathcal{D}_1$ の図とし,

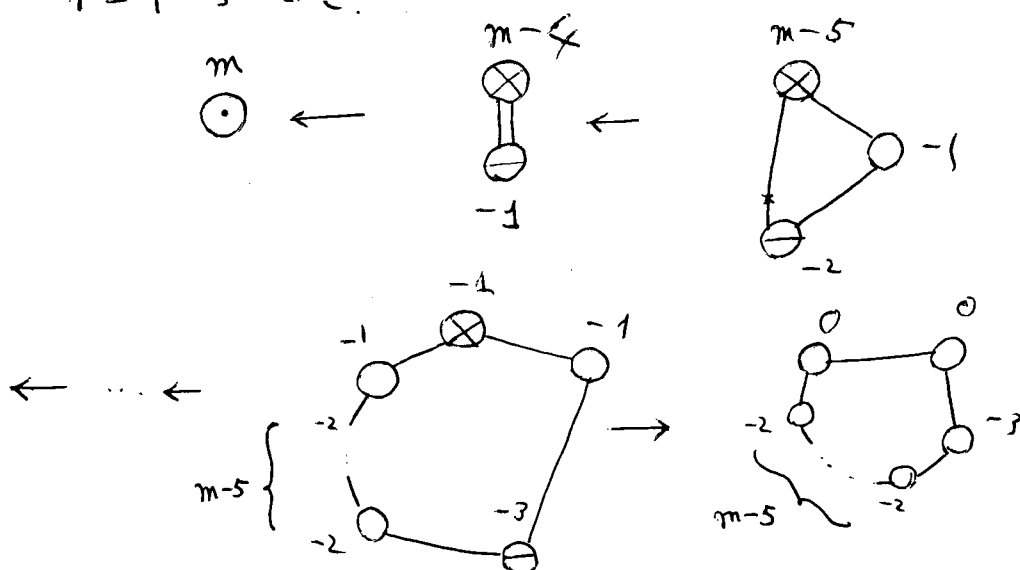
図の x を 2 次変換したとする.



補題 を考慮するとき, (00) 図の極小グラフ
の出来ないことがわかる. Q.E.D

今度は, 与えられたグラフを (00) 図の極小
グラフに変換することは, 果たして何時可能
かを論じる.

$r=1$ のとき.



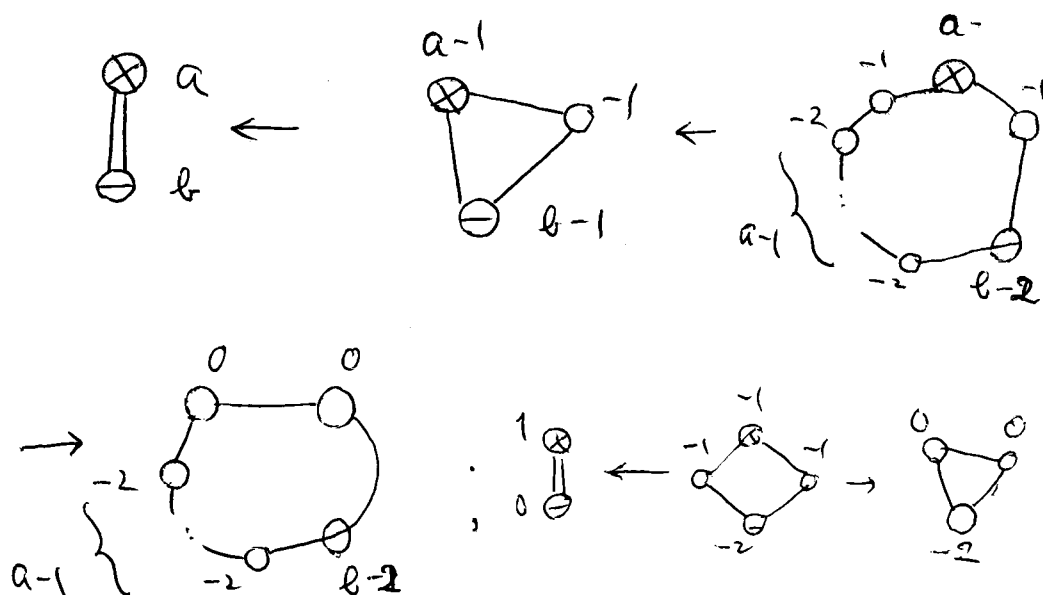
32

と変換する。即ち, $m \geq 5$ なら解法にできてしまう。 $m \leq 4$ なら, 極小グラフは $\odot$ しがないのである。

$r=2$ のとき, $a \text{ --- } b$ であるが,
 $a > 0$ と $a \leq 0$ でかなり異なる。場合わけして考えよう。

東) $a \leq 0, b \leq 0$. --- (但し,
 $a \neq -1, b = -1$ は無論仮定されてゐる) は唯一の極小グラフ。

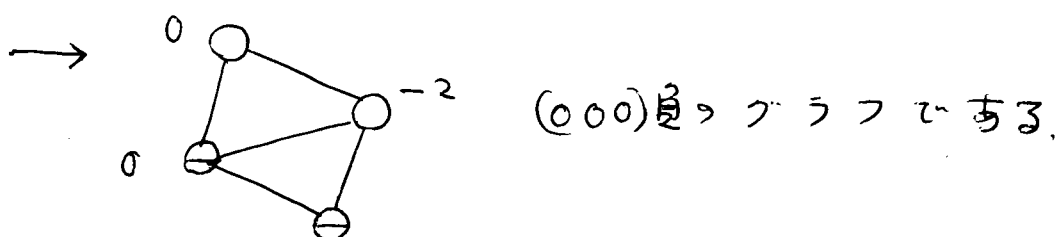
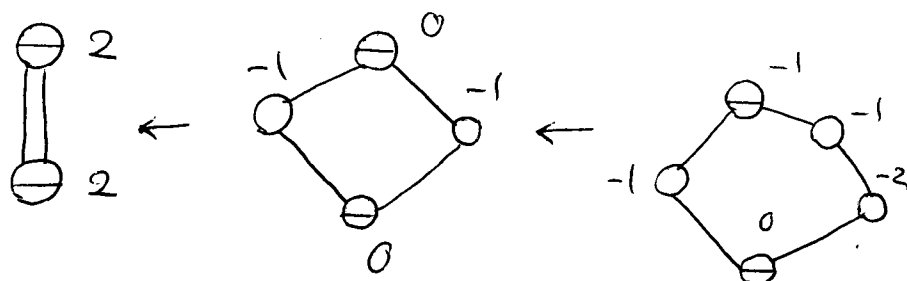
西) $a > 0, b \leq 0$ としよう。図のように変換する。(但し $a=1, b=0$ を除く)



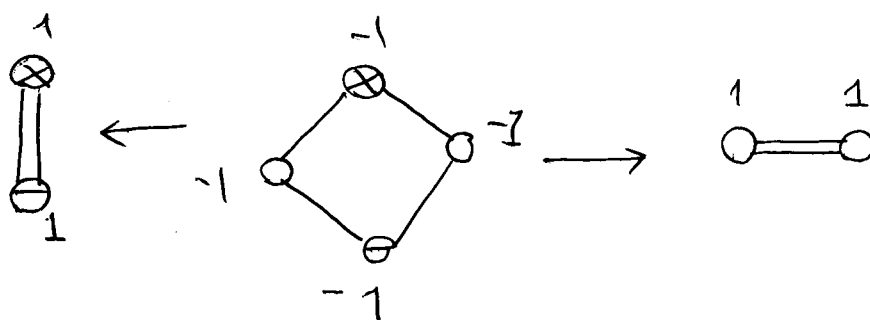
33

次に $a > 0$, $b > 0$ とする. $a \geq b$ とおけば $b = 1, 2$ に限る.

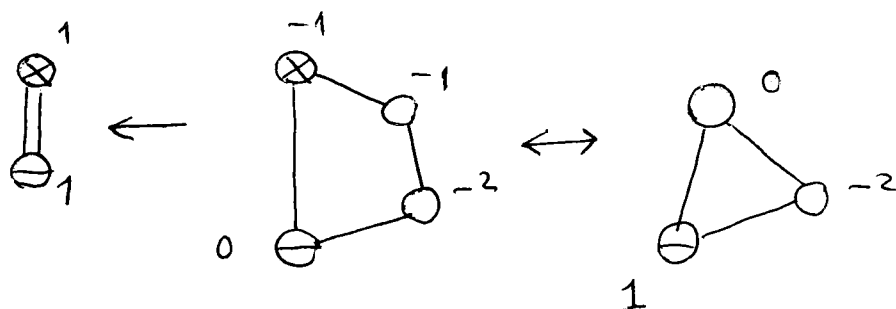
南) $a = 2, b = 2$.



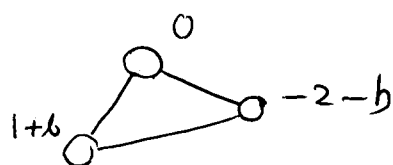
北) $a = 4, 3, 2, 1; b = \dots$



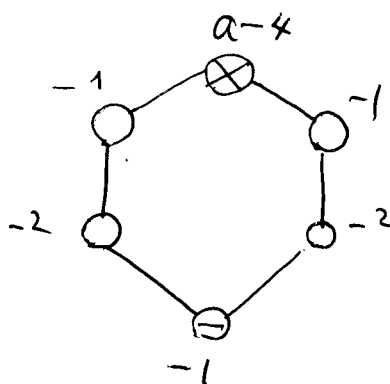
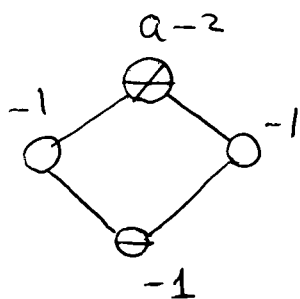
34



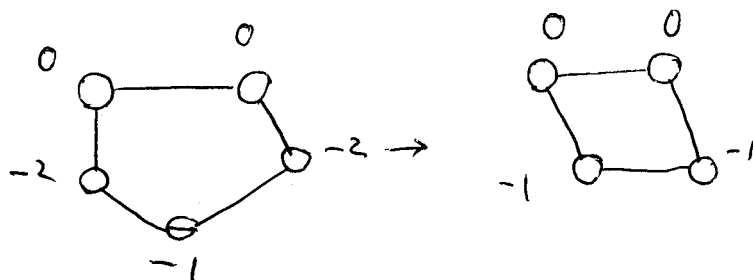
$\gamma = 2$, 0 を軸にして E 変換すると,



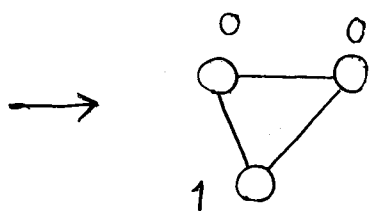
とえる. これは $b \neq -1, -2$ なる極小であるか
見てはない. $\gamma = 2$ $a \geq 2$ として,



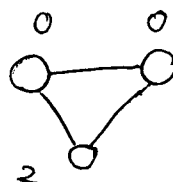
$a = 3$ なら,



35

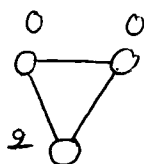
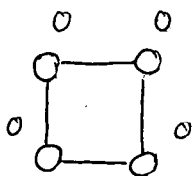
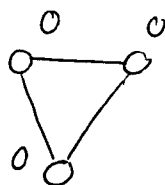
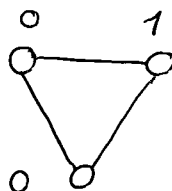
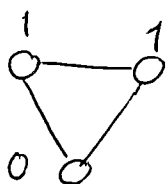
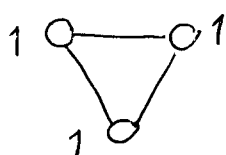


$a=4$ なら同様にして,



に到る.

$r \geq 3$ のときを考える. $\forall G_i^2 \geq 0$ を満たして
いるものは,

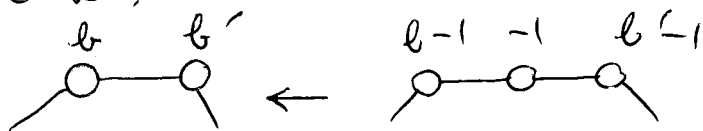


に限る. これは (0,0) の極小グラフに決
て同値で移りえない.

$$C_1^2 \geq C_2^2 \geq C_3^2 \geq \dots \quad \text{と並べる.}$$

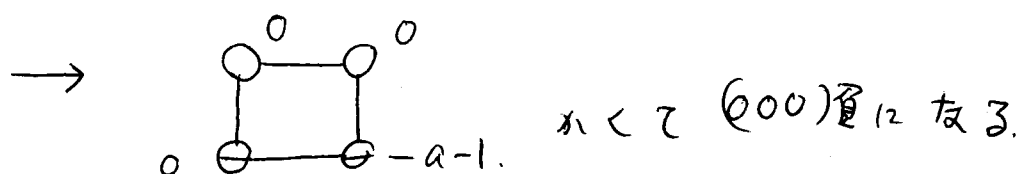
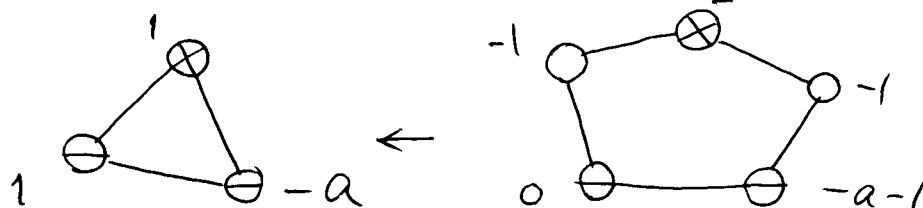
甲) $b = C_1^2 > 0, \quad C_2^2 > 0$ とすると $C_1^2 = C_2^2 = 1$.

仮定なら,

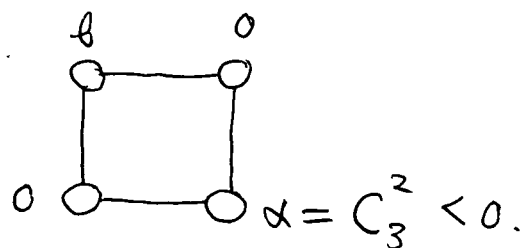


36

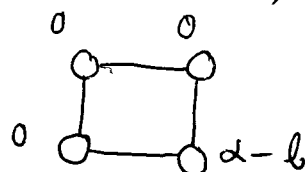
$b-1 \geq 1$, $b' \geq 1$ とすると, Hodge の指数
定理)に矛盾する. γ の上 $r=3$ なら $C_3^2 \leq -2$
としてよい. $r \geq 4$ なら 矛盾. -1



乙) $b = C_1^2 > 0$, $C_2^2 = 0$ とする. さらに $C_{r-1}^2 = 0$,
 $r \geq 4$ と仮定しよう. すると $r=4$ (定理1)



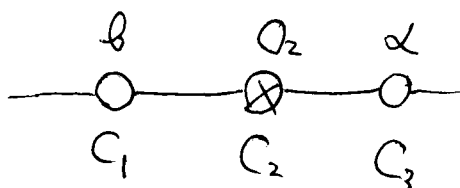
そこで E^{-b} 変換を行ない 2つのグラフをえら.



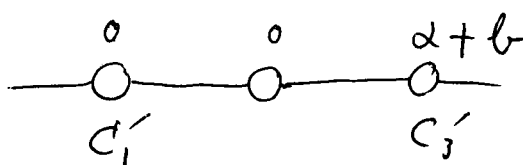
37

これは $(0, 0, 0)$ 型の極小グラフである

丙) $C_1^2 = b > 0$, $C_2^2 = 0$, $j \geq 3$ のとき,
 $C_j^2 \leq -2$. $r \geq 4$ と仮定する.



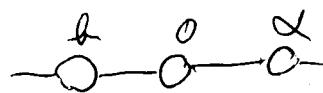
C_2 を軸に E^{-b} 変換を行なうと



$r \geq 4$ により $C'_1 \cap C'_3 = \emptyset$. 故に $\alpha + b \leq 0$ である. i) $-\alpha = b$ なら ii) の場合になる.

ii) $\alpha + b = -1$ とすると, 極小グラフではなく, この場合は不自然な複雑さの原因となるから, 除しておく必要がある.

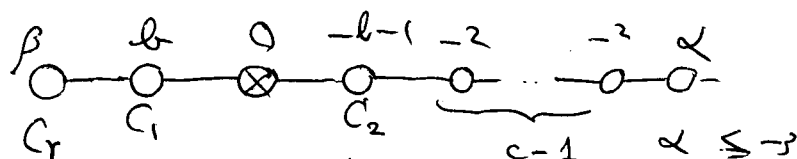
定義. $\alpha = -b - 1$ となる
 を含むグラフを 不正則 という.



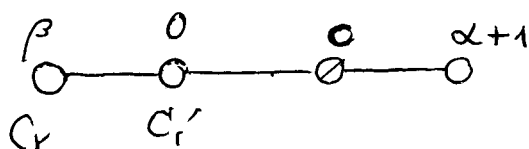
不正則グラフは変換して, 極小正則グラフに変更するのである.

38

さて不正則グラフが与えられたとしよう.



とすると, まず E^{-b} 変換をして, ついで 0 を 1 にかえる.

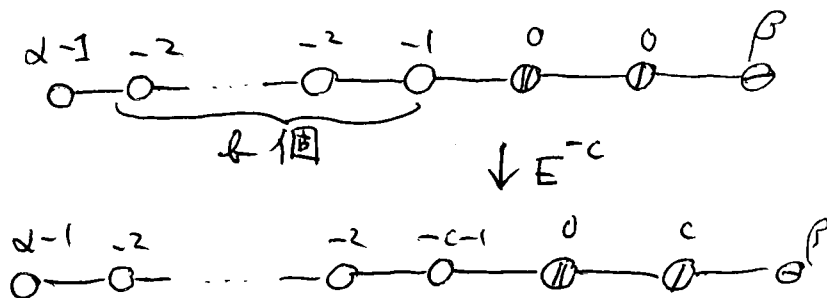


$c > 0$, $\beta \leq -2$ なら, $c + \beta = -1$ ならやはり不正則グラフ (極小ではある) になる. これをくり返すと, ついに $(0,0)$ 型の正則極小グラフ, 又は, 今迄 α へてきた例外的な正則極小グラフになる.

不正則グラフをつくる変換を定義しよう.



が与えられたとする. 2 次変換をくり返して,



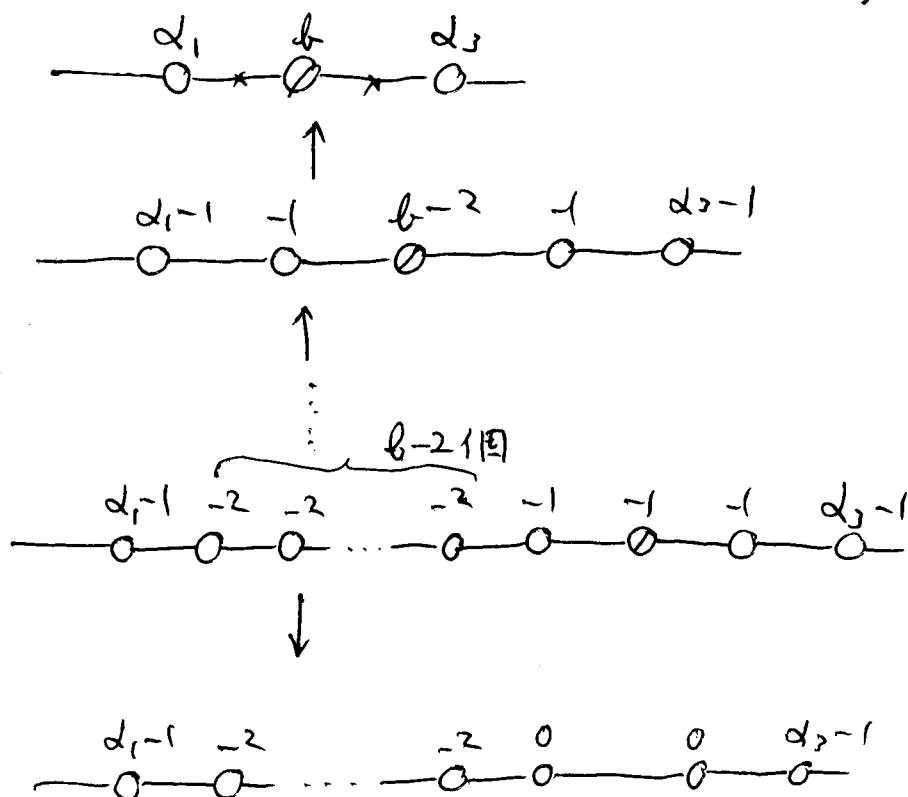
39

これを F 変換 (fragile 変換) といい、
 $F_{b,c}$ で表わす。

さて,

iii) $\alpha + b \leq -2$ のとき (i) の 極小グラフ
 になっている。

戊) $C_1^2 = b > 0$, $j > 1$ につき常に $C_j^2 \leq -2$.



$$\alpha_1 - 1 \leq -3, \quad \alpha_3 - 1 \leq -3.$$

かくして, 極小の (0) 負グラフとえる. この
 変換を G 変換 といふ.

40

定理 4. $C_1^2 \geq 0$ の幾何的環状グラフから与えられたとしよう. すると, 1) 極小化 2) E^h 変換 3) 逆 F 変換 4) G 変換 によ, て次のものが成り立つことを示すことができる

$$A_m \quad \text{---} \quad \text{---} \quad m = 1, 2, 3, 4$$

$$A^* \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$B_a \quad \text{---} \quad a = 0, 1, 2$$

$$C_a \quad \text{---} \quad a = 0, 2, 3, \dots$$

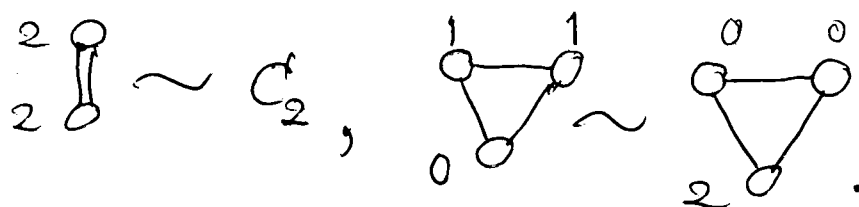
正則性(0,0) の極小グラフ.

証明. $\sim$ を同値関係とすると

$$\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \text{---} \text{---} \sim B_2, \quad \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \text{---} \text{---} \sim B_1$$

$$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \text{---} \text{---} \sim B_0, \quad \begin{matrix} 1 & & 1 \\ & \diagdown & / \\ & \text{---} & \\ & / & \diagdown \\ 1 & & 1 \end{matrix} \sim C_0$$

41

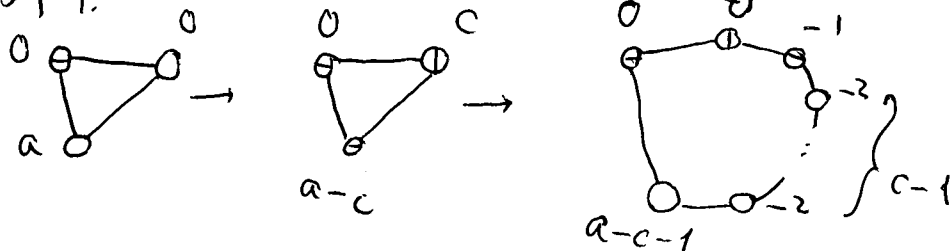


さて、同値な極小グラフの決定は今や次のように容易にできる。即ち、

I) 与えられたグラフを極小化する。このとき、 A_m, A^* になるのは、これであり、 E^b 変換と F 変換により、 B_a, C_a 又は正則な(0)の自グラフに到るのである。さて、これらには $C_1^2 = C_2^2 = 0$ があるので D 変換を行ない、ついで E^b, G 変換とする。かくて、正則極小グラフをすべてえることができる。

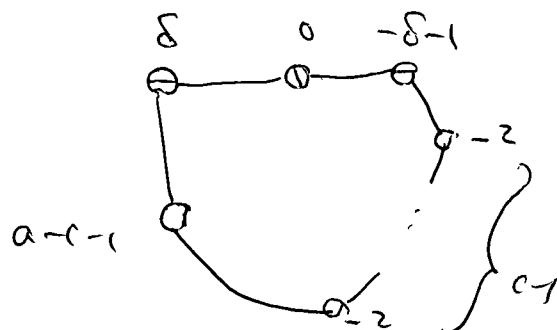
C_0 を除くと、 F 変換によりいくらでも複雑な極小グラフをえる。

例 1.

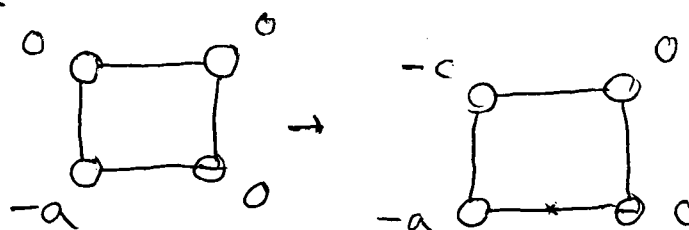


42

$a-c \leq -3$ であるならば $\delta > 0$ について,



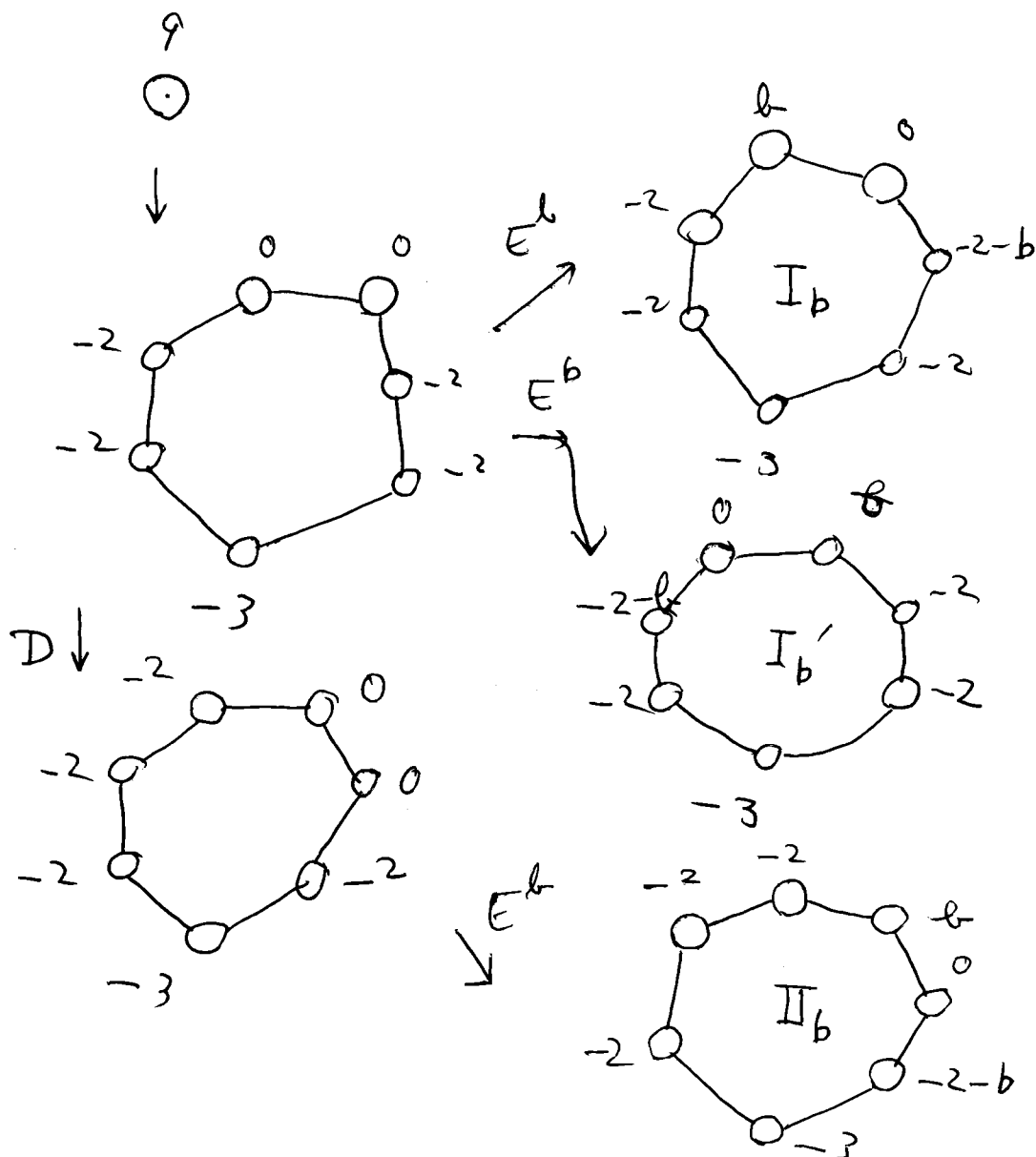
例 2



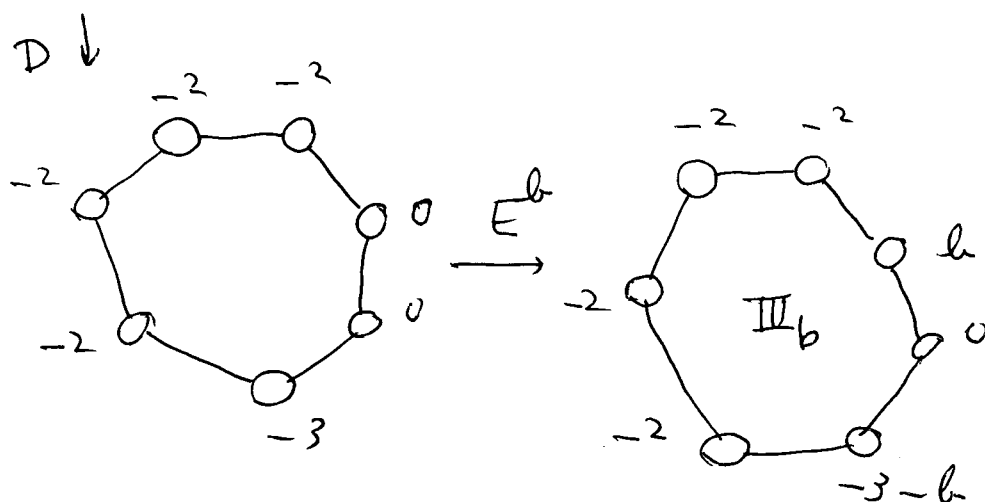
これをもとに F 変換することができる. ($a \geq 2$ のとき).

X3

$\mathbb{P}^2$ 内の, 結節点をもつた3次曲線 C とする. $C^2 = 9$ ならば $S = \mathbb{P}^2 - C$ の正則極小完備化を決定しよう.

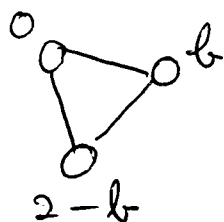


44



I_b と I'_b は裏返し $\circ$ 関係にある。即ち、
 III_{-2} としてみよう。すると $\circ$ が $\circ$ になる。
 ぶれて $\circ$ になる、てしまう。

次に $\circ$  と考える。結局



しかない。このようにして、 D 変換 $\circ$ できる

$x_1, \dots, x_m$ がありそれぞれについて、

$$E^{b_1} x_1, \dots, E^{b_m} x_m$$

45

とパウメターのメタ主系列かてき 特殊な
 k_j について頂点の数が減少した例外型の有限
 個で与えることがわかる。この例外型の方が割
 込み深いのが面白い所である。ここにも「分
 類の原理」が成立しているのである。

→城崎-東京間にて←

46

4. さて, $(\bar{S}, D)$ を環状境界をもつ2-曲面とし,
 $D = \sum C_i$ を既約分解とする. さて, $C_i^2 \geq 0$ と
なる C_i があれば, $(\bar{S}, D)$ は $(\mathbb{P}^2, \mathbb{A})$ からえら
れるものである. そして, $C_i^2 \geq 0$ なる C_i の存
在は, $S = \bar{S} - D$ に多様な極小完備化の存
在を仮定する限り, 受け入れなければならない条件
なのである. $(\bar{S}, D)$ を調べる目的には合致しない.

定理 1 の帰結の一つは, " $C_i^2 \geq 0$ なる C_i
があれば, $\pi(S) = 0$ " である. すなわち, $(\bar{S}, D)$
に対して, $\pi(S) = 0$ を仮定するのみにとど
めてみよう.

定理 5. D を環状境界とし, $\pi(S) = 0$ とする.
 $(\bar{S}, D)$ が相対的に極小 ($S = \bar{S} - D$ に例外
曲線がなく, D は極小境界) ならば, $K + D \sim 0$.
そして, $(\mathbb{P}^2, \mathbb{A})$ から 正準2次 (逆も当然)
変換と, 半束追加をえてえられる.

証明. $(\bar{S}, D)$ には D 例外曲線がない, とし
てよい. さて, D のグラフは, 輪を一つもつ
から, $\bar{J}_g(S) \geq 1$. 一方 $\pi(S) = 0$ により,

47

$\bar{P}_m(S) = 1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). $\tau = \tau''$, $|K(S) + D| \ni \Gamma$
 とし, $\Gamma = \sum \pi_i E_i$ と既約成分にわけ, $D = \sum G_j$
 と表わす. $G_j^2 \leq -2$ ($j = 1, 2, \dots$) と仮定してよい
 (定理 1 による). $\kappa(S) = 0$ による, $\kappa(\sum E_i, \bar{P})$
 $= 0$. ゆえに $[(E_i, E_j)]$ は半正定値. とくに,
 $\Gamma^2 \leq 0$. ゆえに $\Gamma E_1 \leq 0$ としてよい. $E_1^2 \leq 0$
 なる, $KE_1 + DE_1 \leq 0$ により, 場合を考
 える.

1) $E_1 \not\subset D$. すると, $DE_1 \geq 0$. よって $KE_1 \leq 0$.

ゆえに $2\pi(E_1) - 2 \leq 0$.

i) $E_1^2 = KE_1 = 0$, $\pi(E_1) = 1$, $DE_1 = 0$,

ii) $E_1^2 = -2$, $KE_1 = 0$, $\pi(E_1) = 0$, $DE_1 = 0$,

iii) $E_1^2 = -1$, $KE_1 = -1$, $DE_1 = 1$. このときは,

E_1 は D 例外升曲線だから, $(E_1 - D)$ を半正, ともし
 った) おこらないとしてよい. 必要なら半正
 除去できる.

iv) $E_1^2 = 0$, $KE_1 = -2$, $DE_1 \leq 2$. さて,

$l(mE_1 + D + K) \leq \bar{P}_{im}(S) = 1$ なるから,

Riemann-Roch の定理によれば,
 $1 \geq l(D + mE_1 + K) = \frac{(D + mE_1 + K)(D + mE_1)}{2} + 1$

48

$$= \frac{m}{2} (DE_1 + DE_1 + KE_1) + \frac{D^2}{2} + 1.$$

よして $2DE_1 + KE_1 \leq 0$. 即ち, $DE_1 \leq 1$.

よって $(\Gamma, E_1) = KE_1 + DE_1 \leq -1$. しかし,
 $(\Gamma, E_1) = \eta_1 E_1^2 + \eta_2 EE_1 + \dots \geq 0$. かくて矛盾した.

従って i) と ii) の場合しかおきなく. このとき $E_1 \cap D = \emptyset$. よって $\Gamma E_1 = 0$.

2) $E_1 \subset D$. $D = D' + E_1$ とおけば $(E_1, D') = 2$. よ
 して, $(\Gamma, E_1) = 2\pi(E_1) - 2 + (D', E_1) = 0$.

χ にて $E_1 = \{ \sum \eta_j E_j; E_j \subset D \}$, $E_2 = \{ \sum \eta_j E_j; E_j \not\subset D \}$ とおこう.

$$\Gamma = E_1 + E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset,$$

$$\Gamma^2 = \sum \Gamma \eta_j E_j = 0,$$

に注意すると,

$$\Gamma^2 = E_1^2 + E_2^2 = 0.$$

$$E_1^2 \leq 0, \quad E_2^2 \leq 0 \quad \text{故に} \quad E_1^2 = 0, \quad E_2^2 = 0.$$

さて $E_1 \neq 0$ とすれば, $|E_1| = D$ であり,

$$D - E_1 \leq 0 \quad \text{である.} \quad \text{よって,}$$

$$K \sim E_2 + E_1 - D \geq 0$$

49

となり, 次の補題に反する.

補題 $\chi(\bar{S}) = 0$ とし, $\bar{S}$ 上の正因子 D をとり $\chi(\bar{S}-D) = 0$ とする. このとき D のグラフには輪がない.

証明 $\bar{S}$ は極小と仮定してよく, さらに $\bar{S}$ の性質を $\bar{S}$ の種類に依いて調べる. 詳しくは [3] の [7] と参照.

さて $\chi(S) = 0$, $\chi(\bar{S}) \geq 0$ とすると,

$$0 = \chi(K+D, \bar{S}) \geq \chi(K, \bar{S}) = \chi(\bar{S}).$$

ゆえに, 補題により D には輪がなく, したがって $\chi(\bar{S}) = -\infty$ 即ち, $\bar{S}$ は有理曲面か線線面. もし $\bar{S}$ が非有理線線面なら $\bar{S}$ の Albanese ファイバー曲面を利用すると矛盾が生ずる.

かくて, $\bar{S}$ は有理曲面になることがわかった.

ゆえに, $\mathcal{E}_1 = 0$. 従って $|K+D| \ni \Gamma$ をとるとき $D \cap \text{Supp } \Gamma = \emptyset$ であり, Γ の連結成分を Γ_j とかくとき, $\Gamma^2 = \sum \Gamma_j^2 = (K+D)^2 = 0$. よって $\Gamma_j^2 = 0$.

50

$\pi(E_1) = 0$ となる Γ の成分 E_1 は $E_1^2 = -2$,
 $KE_1 = 0$. よって Γ_j は, 丁度, 楕円曲面
 の特異 Γ_p 1 本と同じ configuration をもち
 うる. $E_2 \neq 0$ と仮定して矛盾を導こう.

$$\dim |\Gamma_j + K| = \Gamma_j(\Gamma_j + K)/2 = 0$$

に注意して, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(K) \longrightarrow \mathcal{O}(K + \Gamma_j) \longrightarrow \mathcal{O}(K(\Gamma_j)) \longrightarrow 0$$

により,

$$\dim H^0(K(\Gamma_j)) = l(K + \Gamma_j) = 1$$

とえる. $l(K + D) = 1$ である.

$$\dim H^0(K(D)) = 1. \quad \text{---} \quad D \cap \Gamma_j = \emptyset$$

に注意すると,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(K) \longrightarrow \mathcal{O}(K + \Gamma_j + D) \longrightarrow \mathcal{O}(K + \Gamma_j + D)|_{\Gamma_j + D} \longrightarrow 0.$$

しかし $(K + \Gamma_j + D)|_{\Gamma_j} = K(\Gamma_j)$, $(K + \Gamma_j + D)|_D = K(D)$
 となるので, 右端は $\mathcal{O}(K(\Gamma_j)) \oplus \mathcal{O}(K(D))$
 である.

$$0 = H^0(\mathcal{O}_K) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(K + \Gamma_j + D))$$

$$\rightarrow H^0(\mathcal{O}_K(\Gamma_j)) \oplus H^0(\mathcal{O}_K(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_K) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \dim H^0(K(\Gamma_j)) + \dim H^0(K(D)) \\ = \dim H^0(K + \Gamma_j + D). \end{aligned}$$

一方

$$\dim H^0(K + \Gamma_j + D) \leq \dim H^0(2\Gamma) = \bar{P}_2(j) = 1.$$

よって,

$$2 = \dim H^0(K(\Gamma_j)) + \dim H^0(K(D)) \leq 1.$$

これは矛盾である.

さて, $\bar{S}$ は相対的に極小な有理曲面である.
 $\bar{S}$ には π -種例外曲線 L が存在する

$$(K + D, \mathcal{L}) = (0, L) = 1.$$

一方 $LK = L^2 = -1$ なので $DL = 1$ から $L \notin D$
 ゆえに L は D 例外曲線となる.

従って, $\bar{S} = \mathbb{P}^2$, Σ_0 , Σ_∞ と交換してよく,
 前の定理が使える形になる.

52

5. 今度は環状境界という仮定を落として論じよう. $(\bar{S}, D)$ とする曲面で, $\chi(S) = 0$, $\bar{\rho}_g(S) = 1$, $\bar{\rho}(S) = 0$ とする. このよきな S は 対数的 K3 曲面 とよぶことにしよう.

I) $\bar{\rho}_g(\bar{S}) = 1$ のとき. すると $\bar{S}$ は K3 曲面である. $\bar{S}$ の極小モデルを $\bar{S}_*$ とすると $\mu: \bar{S} \rightarrow \bar{S}_*$ によって $\mu(D) = D_*$ とおく. 次の補題を用いる.

補題 $\bar{V}_*$ は非完異完備, $D_* \in \bar{V}_*$ の正因子とし, $\mu: \bar{V} \rightarrow \bar{V}_*$ は D_* の正規変換とする. 即ち, $D = \mu^{-1}(D_*)$ は正規変換とし, $D^* \in D_*$ の μ^{-1} による固有像とすると, $\chi(\bar{V}) \geq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \chi(\bar{V} - D^*) &= \chi(\bar{V} - D) \\ &= \chi(\bar{V}_* - D_*) = \chi(K(\bar{V}_*) + D_*, \bar{V}). \quad \text{---} \end{aligned}$$

即ち, D_* の特異性は関係しない.

ゆえに $\chi(D_*, \bar{S}_*) = 0$ とえる. K3 曲面について Riemann-Roch の定理を用いると, $D_* \subset \mathcal{E} = \{\cup E_j; E_j^2 = -2, E_j \cong \mathbb{P}^1\}$. 従って, S は $\mu^{-1}(\bar{S}_* - \mathcal{E} - \{\text{有阻集合}\}) = S_*$ と含む.

53

さて, $D_* = 0$ なら, $\bar{S} \supset S \supset \bar{S} - \bar{\mu}^1(F)$.

F は有限集合. $\bar{S} \supset \bar{S} - \bar{\mu}^1(F)$ は WPB 同値. よ

うて, $S \subset \bar{S}$ は W^2PB 同値. ようて S は $\bar{S}_*$

と W^2PB 同値. 之より, $D_* = E$ とすると, W^2

PB 同値の すれをみると, $F = \emptyset$ になるから,

$$\bar{S} \supset S \supset \bar{S} - \bar{\mu}^1(E), \quad \text{よって } \bar{S} - \bar{\mu}^1(E) \rightarrow$$

$\bar{S}_* - E$ は PB. ようて S は $\bar{S}_* - E$ と WPB 同値.

II) $\bar{\mu}_g(\bar{S}) = 0$ のとき. $\bar{\mu}(\bar{S}) = 0$ なるから,

$D = \mathcal{Q}_1 \cup \dots \cup \mathcal{Q}_s$ を連結成分とすると,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_j} \rightarrow 0$$

により

$$0 = H^1(\mathcal{O}) \rightarrow \bigoplus H^1(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_j}) \rightarrow H^2(-D) \rightarrow 0$$

を得る. ようて,

$$\bar{\mu}_g(S) = h^2(-D) = \sum \pi(\mathcal{Q}_j).$$

$\bar{\mu}_g(S) = 1$ により, $\pi(\mathcal{Q}_1) = 1, \pi(\mathcal{Q}_2) = \dots = \pi(\mathcal{Q}_s) = 0$.

54

$$\mathcal{Q}_1 = C_1 + \cdots + C_p \quad \text{を既約成分とすると、}$$

$$\pi(\mathcal{Q}_1) = \sum g(C_j) + h(\mathcal{Q}_1).$$

$h(\mathcal{Q}_1)$ は $\mathcal{Q}_1$ がつくるグラフの輪状数.

$$\pi(\mathcal{Q}_1) = 1 \quad \text{により} \quad g(C_1) = 1, g(C_2) = \cdots = 0$$

$$h(\mathcal{Q}_1) = 0 \quad \text{又は} \quad g(C_1) = \cdots = 0, h(\mathcal{Q}_1) = 1$$

の 2 場合がある.

II_a) $g(C_1) = 1$ のとき.

補題 $(\bar{V}^*, D)$ を多様体とし, $\mu: \bar{V}^* \rightarrow \bar{V}$ を
固有双有理正則写像, $\bar{V}$ は非特異, $\Delta = \mu_*(D)$
とおく. $\kappa(\bar{V}^* - D) \geq 0$ ならば,

$$\kappa(\bar{V} - \Delta) = \kappa(K(\bar{V}) + \Delta, \bar{V}).$$

(前の補題の一般化である.)

証明. $\mu^*(\Delta) = D + E$ とおくと, E は μ
例外因子. $\mu^*\Delta = D + E^*$ とおくと $E^* \leq \sigma E$.
 $\kappa(K(\bar{V}^*) + D + E, \bar{V}^*) = \kappa(K(\bar{V}^*) + D + \sigma E, \bar{V}^*)$
 $\geq \kappa(K(\bar{V}^*) + \mu^*\Delta, \bar{V}^*) = \kappa(\mu^*(K(\bar{V}) + \Delta) + \rho_\mu, \bar{V}^*)$
 $= \kappa(K(\bar{V}) + \Delta, \bar{V}). \quad \text{Q.E.D.}$

さて, $\bar{S}$ の相対的極小モデルを $\bar{S}_*$ とし,
 $\mu: \bar{S} \rightarrow \bar{S}_*$ を固有双有理正則写像とする.

55

$\chi(\bar{S}) = 0$ なる $\bar{S}_*$ は Enriques 曲面であるが,
 $g(C) = 1$ なる C の存在からこのようなことはあ
 きない. 実際, $\lambda: \tilde{S} \rightarrow \bar{S}$ を普遍被覆とする
 と $\tilde{S}$ は K3 曲面であり, $\tilde{D} = \lambda^{-1}(D)$ とおくと,
 $\tilde{S} - \tilde{D} \rightarrow \bar{S} - D$ は不台岐全射. よって,
 $\chi(\tilde{S} - \tilde{D}) = \chi(\bar{S} - D) = 0$.

I の議論から, $\tilde{D}$ の各成分は $\mathbb{P}_g^1$ である.

よって, $\bar{S}_*$ は有理曲面である. ゆえに, $\bar{S}_* = \mathbb{P}^2$
 又は Σ_b ($b = 0, 2, 3, \dots$). $\Delta = \mu(D)$ とおき,
 $\Delta_1 = \mu(C)$ とおく. Δ_1 は楕円曲線であり,
 $\chi(\bar{S}_* - \Delta_1) = \chi(K(\bar{S}_*) + \Delta_1, \bar{S}_*)$

である. ゆえに $\chi(\bar{S}_* - \Delta_1) = 0$ なる $\bar{S}_*$ は;

$K(\bar{S}_*) + \Delta_1 \sim 0$. よって, $\bar{S}_* = \mathbb{P}^2$ なる,

$\Delta_1 = E$ は $\mathbb{P}^2$ の 3 次曲線. $\bar{S}_* = \Sigma_0$ なる双次
 数 (2, 2) の楕^円曲線. $b \geq 2$ のとき, $(\Delta_1, \Delta_\infty) \geq 0$
 によると, $(\Delta_1, \Delta_\infty) = -(K(\bar{S}_*), \Delta_\infty) = 2 - b \geq 0$.
 よって $b = 2$.

実は, 上の場合しかおきないことが証明さ
 れるのである.

定理 6 $(\bar{S}, C)$ は 2 曲面で相対的に 2 極小と

56

(, C を楕円曲線に非特異とし, $\bar{\kappa}(S) = 0$ を仮定する ($S = \bar{S} - C$). すると $K(\bar{S}) + C \sim 0$.

証明. $\bar{p}_g(S) = 1$ なる $\bar{S}$ に対し, $|K + C| \ni \Gamma$ となる. $\Gamma = \sum \alpha_i E_i$ を既約成分への分解とする.

$\chi(\Gamma, \bar{S}) = 0$ により, $[(E_i, \bar{S})]$ は半正値行列として $(\Gamma, E_1) \leq 0$ とする. $E_1^2 \leq 0$ なる $\bar{S}$ に対し,

i) $E_1^2 < 0$ のとき. すると, $KE_1 + CE_1 \leq 0$ となるから, $KE_1 \leq 0$. もし $KE_1 < 0$ なら, $KE_1 = E_1^2 = -1$ かつ $CE_1 = 1$ 又は 0 となる. E_1 をつるすと, 半尖除去, 又は, 逆二次変換になる. 後者は, $(\bar{S}, C)$ が相対的に極小に反してしまふ. ついて $KE_1 = 0$ とする. ($CE_1 = 0$ になり) $E_1^2 = -2$, $\pi(E_1) = 0$ をえらふ.

ii) $E_1^2 = 0$. すると $\Gamma E_1 = 0$. ゆえに $CE_1 = -KE_1 \geq 0$. $E_1^2 = KE_1 = 0$, $\pi(E_1) = 1$ 又は, $E_1^2 = 0$, $KE_1 = -2$, $CE_1 = 2$. して後者はあきない. 次の補題を用いる.

補題 E を有理曲面 $\bar{S}$ 上の正因子とし, $\dim H^0(\mathcal{O}_E) = 1$ とする. このとき, $\dim H^1(E + K) = 0$.

$\ell(E + K) = \pi(E)$ (E が正因子に分解しない).

57

証明 $0 \rightarrow \mathcal{O}(-E) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$

による $0 \rightarrow H^1(-E) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_E) \rightarrow H^2(-E) \rightarrow 0$

よ, 7. $l(E+K) = \pi(E), \dim H^1(E+K) = 0.$

さて $\alpha \gg 0$ とする.

$$\alpha E_1 + C + K \leq \alpha \Gamma + C + K \sim (\alpha+1)\Gamma.$$

ゆえに, $l(\alpha E_1 + C + K) \leq 1$. 一方補題 による,

$$l(\alpha E_1 + C + K) = (\alpha E_1 + C)(\alpha E_1 + C + K)/2 + 1$$

$$= (2\alpha + 0)/2 + 1 \gg 0.$$

まためると, $\Gamma E_1 = 0$ であり, i) $\pi(E_1) = 0, E_1^2 = -2$ 又は ii) $\pi(E_1) = 1, E_1^2 = 0$. いずれの場合も $E_1 \cap C = \emptyset$ かつ $\Gamma^2 = \sum \pi_i \Gamma E_i = 0$.
 ゆえに, Γ の連結成分をとり Γ_1 とおけば $\Gamma_1^2 = 0$ の Γ_1 の configuration は, 楕円曲線, 又はその退化と同じである. しめるに $\kappa(\Gamma_1, \bar{S}) = 0$ であり, 決して, 楕円曲面のあるファイバー

37

として出てはこない。実は Γ_1 存在しない
のである。 $\Gamma_1 \neq \emptyset$ として矛盾を導く。

$$\ell(\Gamma_1 + K) = \ell(\Gamma_1 + K)/2 + 1 = 1,$$

により, $K(\Gamma_1) = (K + \Gamma_1)|_{\Gamma_1}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \rightarrow H^0 \mathcal{O}(K) &\rightarrow H^0(K + \Gamma_1) \rightarrow H^0 K(\Gamma_1) \\ &\rightarrow H^1 \mathcal{O}(K). \end{aligned}$$

ゆえに, $\dim H^0 K(\Gamma_1) = \ell(K + \Gamma_1) = 1$. 同様に

(7, $\ell(K + C) = 1$ により $\dim H^0 K(C) = 1$.

よって $\ell(K + C + \Gamma_1) \leq \overline{P}_2(S) = 1$ によらず,

$$\ell(K + C + \Gamma_1) = 1.$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(K) \rightarrow \mathcal{O}(K + C + \Gamma_1) \rightarrow \mathcal{O}(K + C + \Gamma_1)|_{\Gamma_1} \oplus$$

$$\mathcal{O}(K + C + \Gamma_1)|_C \rightarrow 0 \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned} C \cap \Gamma_1 = \emptyset \text{ により } \mathcal{O}(K + C + \Gamma_1)|_{\Gamma_1} &= \mathcal{O}K(\Gamma_1), \\ \mathcal{O}(K + C + \Gamma_1)|_C &= \mathcal{O}K(C). \end{aligned}$$

$$H^0(K + C + \Gamma_1) \xrightarrow{\sim} H^0(K(\Gamma_1)) \oplus H^0 K(C)$$

よって,

$$\dim H^0 K(F_1) + \dim H^0 K(C) = 1$$

一方、前生によると左辺 = 2. したがって矛盾した。
Q.E.D.

さて $K + C \sim 0$ が示された。 $\bar{S}$ が相対的に極小でない限り $\bar{S}$ には少なくとも一種例外曲線 L がある。 $C \neq L$ であり $LK = -1$ かつ $S \cdot CL = 1$.
即ち、 L をつぶすと、 S の半は除去になる。
この操作をくり返すと、 $\bar{S}$ は相対的に極小となり、つぎには P^2, Σ_0, Σ_2 のいずれかになる。

6. 今度は $D = C_1 + \dots$ $g(C_1) = 1$ の場合を考える。
 $S = \bar{S} - D, S_1 = \bar{S} - C_1$ とする。

$$0 \leq \kappa(S_1) \leq \kappa(S) = 0$$

つまり、 $\kappa(S_1) = 0, \bar{p}_g(C_1) = 1$ である。

ゆえに、 $(\bar{S}, C_1)$ の相対的 ∂ 極小モデル

$(\bar{S}_*, \Delta_1)$ をつく。 $p: \bar{S} \rightarrow \bar{S}_*$ があり、

$C_1 = p^{-1}(\Delta_1)$ である。 C_1 は非特異既約だから、

p は C_1 と交わりを持つため少なくとも一種例外曲線をもつ

59

りつゝしてゐることになる 前定理によつて
 $K(\bar{S}_*) + \Delta_1 \sim 0$ として $D = C_1 + D'$ とおき
 $\Delta' = p_*(D')$ とおこう $S_* = \bar{S}_* - \Delta$ とお
 くと $S \rightarrow S_*$ は固有双有理正則写像 次の補題を用ゐる

補題 $\kappa(V_*) \geq 0$ とし $p: V \rightarrow V_*$ を固有
 双有理正則写像とする $\nabla \in V_*$ の因子とす
 る $p^{-1}(\nabla) = \nabla^* + E$ と固有変換 ∇^* を分離して
 おくと

$$\kappa(V - \nabla^*) = \kappa(V_* - \nabla).$$

一方 $\bar{V}_*$ と V_* の通希境界 D_* をもつ定備化とし
 $\bar{\nabla}$ と ∇ の $\bar{V}_*$ 内での定備化とすると

$$\kappa(V_* - \nabla) = \kappa(K(\bar{V}_*) + D_* + \bar{\nabla}, \bar{V}_*).$$

証明. $\bar{V}$ と V の通希境界 D をもつ定備化とし
 p は正則写像 $p: \bar{V} \rightarrow \bar{V}_*$ を用ゐると
 仮定しよう $p^{-1}(\bar{\nabla}) = \bar{\nabla}^* + \bar{E}$ とおくと
 $p^{-1}(\bar{\nabla})$ も通希境界と仮定できるから

$$\kappa(\bar{V} - \bar{\nabla}^*) = \kappa(K(\bar{V}) + D + \bar{\nabla}^*, \bar{V}).$$

∇ は Σ -ノールの古拙文字

60

$$\begin{aligned}
K(\bar{V}) + D &= \bar{p}^*(K(\bar{V}_*) + D_*) + \bar{R}_p \quad \exists \lambda < \tau, \\
&= \chi(\bar{p}^*(K(\bar{V}_*) + D_*) + \bar{R}_p + \bar{\nabla}^*, \bar{V}) \\
&\quad (\chi(K(\bar{V}_*) + D_*, \bar{V}_*) \geq 0 \quad \text{by } \gamma) \\
&= \chi(\bar{p}^*(K(\bar{V}_*) + D_*) + N \bar{R}_p + \bar{\nabla}^*, \bar{V}). \\
\exists \tau, \quad \overline{p^*(\nabla)} &= \bar{\nabla}^* + \mathcal{E}^* \quad \text{with } \epsilon < \epsilon_0, \quad \mathcal{E}^* \\
&\text{is } \bar{R}_p \text{ in } \lambda \text{ and } \tau \text{ is chosen.} \quad \text{for } N \gg 0 \text{ in} \\
&\text{the case;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \chi(\bar{p}^*(K(\bar{V}_*) + D_*) + \overline{p^*(\nabla)}, \bar{V}) \\
&= \chi(\bar{p}^*(K(\bar{V}_*) + D_* + \bar{\nabla}), \bar{V}) \\
&= \chi(K(\bar{V}_*) + D_* + \bar{\nabla}, \bar{V}) \\
&\geq \chi(V_* - \nabla). \quad \text{Q. E. D.}
\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに, } \chi(S_* - \Delta') = 0 \quad \text{and}$$

$$\chi(S_* - \Delta') = \chi(K(\bar{S}_*) + \Delta' + \Delta_1, \bar{S}_*).$$

$K(\bar{S}_*) + \Delta_1 \sim 0$ であつた. 又 Δ' は Δ_1 と交
わらずに Δ_1 と Δ' とは特異点をもちては構わない.

Δ' の既約成分をとり, γ とおく.

①) $\gamma \cap \Delta_1 \neq \emptyset$ ならば

$$1 = \ell(\Delta_1 + \gamma + K) = (\Delta_1 + \gamma)(\Delta_1 + \gamma + K) / 2 + 1$$

61

よると $K + \Delta_1 \sim 0$ なる t_2 あり

$$Y^2 + \Delta_1 Y = 0, \quad Y^2 = -\Delta_1 Y < 0.$$

一方 $Y^2 - KY = 0, \quad Y^2 \leq 0$ なる s に

$$1 \geq \ell(Y+K) = Y(Y+K)/2 + 1$$

よって, $Y^2 + KY = 0$ 又は -2 . 従って,

$$Y^2 + KY = -2 \quad \text{よって,} \quad Y^2 = -2, \quad KY = 0 \quad \text{又}$$

は $Y^2 = KY = -1, \quad \Delta_1 Y = 1$. 前者はおきえない.

なぜなら, $\Delta_1 Y = 2$ なる y には, $\alpha \gg 0$ となるから.

$$\alpha Y + \Delta_1 + K \leq \alpha \Delta'_1. \quad \text{よって,}$$

$$\ell(\alpha Y + \Delta_1 + K) = 1.$$

よって

$$\ell(\alpha Y + \Delta_1 + K) \geq (\alpha Y + \Delta_1)(\alpha Y + \Delta_1 + K)/2 + 1$$

$$= \alpha + 1 \gg 0.$$

かくして 得られたから, Y をつけさせる (他の Δ'_1 の成分を無視するは).

B) $Y \cap \Delta_1 = \emptyset$. すると,

$$1 = \ell(D_1 + Y + K) = \pi(D_1) + \pi(Y).$$

$$\pi(D_1) = 1 \quad \text{よって} \quad \pi(Y) = 0. \quad \text{即ち} \quad Y^2 + YK = -2.$$

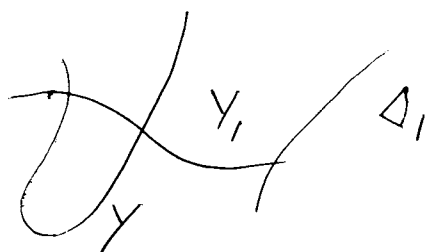
62

$YK = -Y\Delta_1 = 0$ なるので $Y^2 = -2$. 即ち,
 Y が Δ_1 と共通点のない連結成分なら $Y^2 = -2$
 を満たす

①) のときにある Y_1 とする. $Y_1\Delta_1 = 1$. さらに,
 Y_1 以外の Δ'_i にある連結成分を Y とおく. $YY_1 = 1$
 となることをみよう.

$$YY_1 \geq 2 \quad \text{とすると,}$$

$$Y_1^2 = 0$$



$$\begin{aligned} 1 &= l(Y_1 + Y + \Delta_1 + K) \\ &= (Y_1 + Y + \Delta_1)(Y_1 + Y)/2 + 1 \\ &= -1 + YY_1 + 1 + YY_1 - 2/2 + 1 \\ &= YY_1. \end{aligned}$$

よって $YY_1 = 1$. さて, さらに, Y_2, Y_3 は連
 結成分で $Y_1Y_2 = 1, Y_1Y_3 = 1$ として矛盾を導
 く.

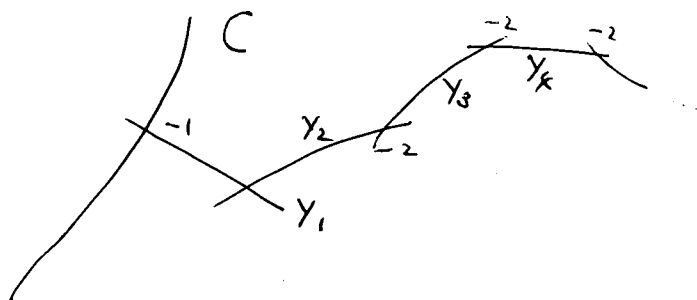
$$\begin{aligned} 1 &= l(2Y_1 + Y_2 + Y_3 + \Delta_1 + K) \\ &\geq (2Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 + (2Y_1 + Y_2 + Y_3)\Delta_1/2 + 1 \end{aligned}$$

63

$$= (-1 - 4 + 4 \cdot 2 + 2) / 2 + 1$$

$= 2$. これは矛盾.

従って, Δ' の連結成分 y で $y \cap C \neq \emptyset$ にとると図のような具合になっている.



よって, y_1 をつなぐ. 与える式につなぐと,

y は空になり C に吸収されてしまう.

よって, $\Delta' \cap C = \emptyset$ の場合を考察する.

$\bar{S}_* = \mathbb{P}^2$, Σ_0 , Σ_2 のときには $\bar{S}_* - C$ に固有曲線はない. 従って, $\Delta' = \emptyset$. $\Delta' \neq \emptyset$ のとき $\bar{S}_*$ は相対的極小でない. ゆえに, $\bar{S}_*$ に例外の一種の既約曲線 L がある. $L \cap \Delta' = \emptyset$ なら $LC = 1$ だから, 遠慮なく L をつなぐ. S_* とみれば, 半点除去になる. $L \cap \Delta' \neq \emptyset$ とし, L をつなぐ. 即ち, $\sigma: \bar{S}_* \rightarrow \bar{S}_{**}$ と2次変換とし, $\Delta'' = \sigma(\Delta')$ とおく. さて,

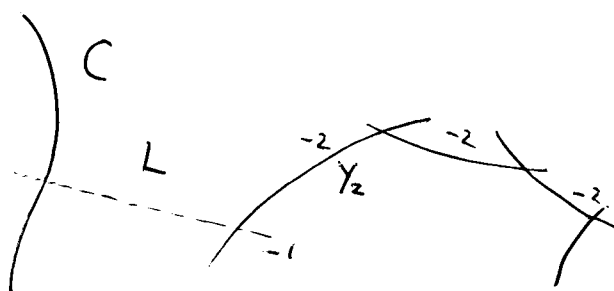
68

$$\sigma^{-1}(\Delta') = \Delta' + L$$

であり, L は σ 例外的. よ, 補題 により,

$$\overline{\kappa}(\overline{S}_{**} - \sigma(C) - \Delta') = \overline{\kappa}(\overline{S}_* - C - \Delta') = 0.$$

ゆえに, 前段によると, $(\sigma(C), \Delta') = 1$. 即ち,
 $(L, \Delta') = 1$ となる.



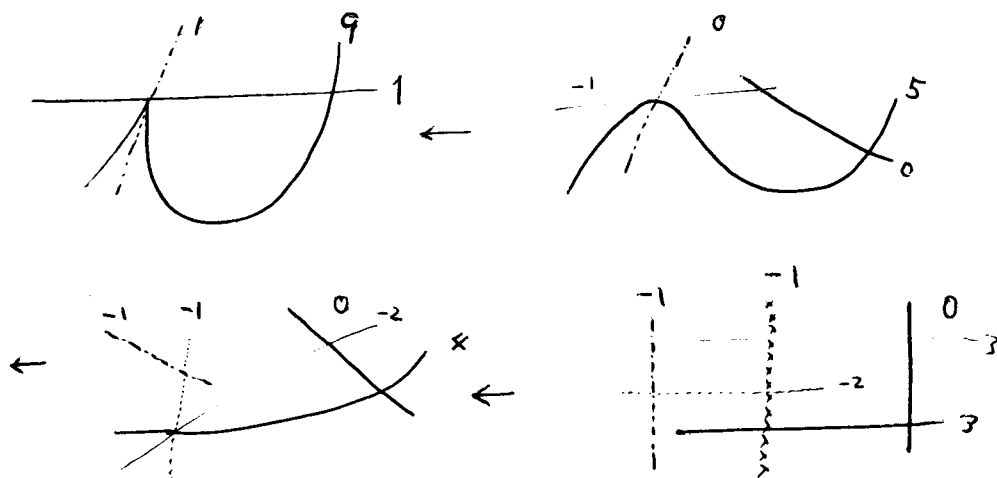
S_* から L をぬくと, 再び芽つる式につぶれていく. S_* から L をぬくことと, $\frac{1}{2}$ 点除去という. 以上のようにして, Δ' は正規交叉になり, $\frac{1}{2}$ 点除去により境界にくりこめることがわかった. $\rho(D')$ の 0-2 元成分は, W^2P/B 同値でずらせば解消される. よって $\Delta' = \rho(D')$ としてよい. $D' \subset \tilde{\rho}(\Delta')$ であり D' は $\tilde{\rho}(\Delta')$ からいくつかの正因子をとり, とくに第一種例外曲線をすべておとして, 極小境界になっているようにつくられている. 即ち $\frac{1}{2}$ 点添加, 又は $\frac{3}{2}$ 点

65

添加なのである。連結境界を考えた限りは成り立たない。

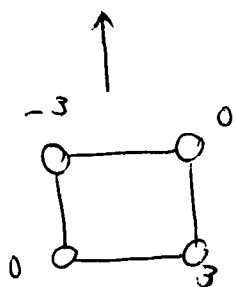
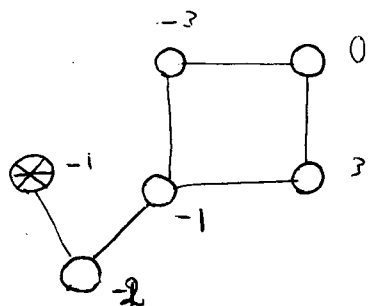
II_b) $g(C) = \dots = 0$, $h(D) = 1$ のとき すると D の部分境界で環状となるものが唯一つあるから、それを D_1 とおく。この D_1 を II_a) の C の代りに用いると、同様の議論が通るのである。定理 6 にあたるものは定理 5 として既に証明されている。 D_1 は極小境界でも半添加によって極小でなくなることもある。そのときにはあきらめて極小化せねばならない。いずれにせよ、同様の結論がでてくる。

例 $xy^2 = 1$



66

即ち $xy^2=1$ の極小完備化
の結果である グラフでみると図の如し.



④は, 境界では無い.
しかし, $\bar{S} \rightarrow \bar{S}_*$ の操
作では D_1 にふくまない
例外曲線は 皆つふさか
はならない. 然る後に

Σ_3 の標準的グラフを
ええ.

注意 $\bar{g}(\bar{S})=0$ の曲面を完備化に与える曲面
 S の半正添加によつて, $b_1(S)=\bar{g}(S)$, $b_2(S)$ が
変ることをみよう.

$$S = \bar{S} - D, \quad D = C_1 + C_2 + \dots = C_1 + D' \quad \text{とおく.}$$

補題 次の条件は同値. したがって, $p \in C_1$ の中
いとした S の半正添加を S' とおく.

- i) C_1 は D' の各元と $\mathbb{Q}$ コホモロジ独立
- ii) $\bar{g}(S') = \bar{g}(S)$, iii) $b_2(S') = b_2(S) + 1$.

67

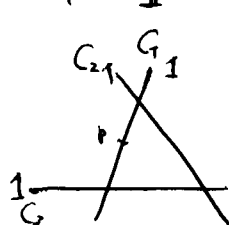
さらに, i), ii), iii) のみは 以下に示す,

$$\text{ii)} \quad \bar{g}(S') = \bar{g}(S) - 1,$$

$$\text{iii)} \quad b_2(S') = b_2(S),$$

$$\text{i)} \quad \sum_{i=1}^n x_i C_i = C_1 \text{ in } H^2(\bar{S}, \mathbb{Q}) \text{ とおける}$$

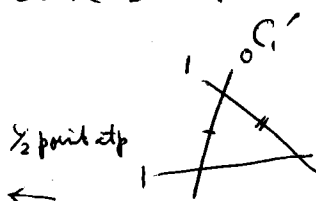
例 $\mathbb{P}^2$ から出発する.



$$\bar{g} = 2$$

$$b_2 = 1$$

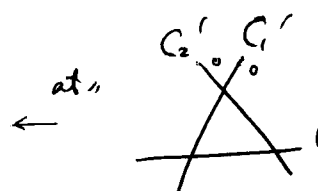
$$C_1 \sim C_2 \sim C_3$$



$$\bar{g} = 1$$

$$b_2 = 1$$

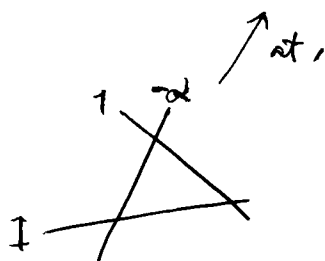
$$C_1 + E \sim C_2 \sim C_3$$



$$\bar{g} = 0$$

$$b_2 = 1$$

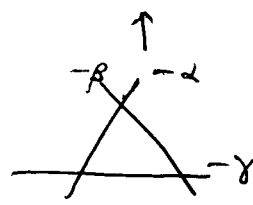
$$C_1', C_2', C_3 \text{ は独立}$$



$$\bar{g} = 1$$

$$b_2 = \alpha + 1$$

$$C_2 \sim C_3$$



$$\bar{g} = 0$$

$$b_2 = \alpha + \beta + \gamma + 2$$

以上の曲面はすべて $\bar{p}_m = 1$ を満たす

68

7. 今度は可約な標体で $K3$ に当たるものを考える. 一般に $\mathcal{A}$ を $n+1$ 次元の非特異代数の標体とし, $X \subset \mathcal{A}$ を閉完備スキームで, 正規交叉因子としよう. $X = \sum X_i$ を既約分解とするとき, $\text{Reg } X = \bigcup \text{Reg } X_i^\circ$, $X_i^\circ = X_i - \bigcup_{j \neq i} X_j$. ここで, m の対数的 m 種数, 対数的小平次元と次元のよ) に $\bar{p}_m$ と $\bar{p}$ 値で表える:

$$\begin{aligned}\vec{\bar{p}}_m(X) &= (\bar{p}_m(\text{Reg } X_1^\circ), \dots, \bar{p}_m(\text{Reg } X_r^\circ)), \\ \vec{\bar{p}}(X) &= (\bar{p}(\text{Reg } X_1^\circ), \dots, \bar{p}(\text{Reg } X_r^\circ)), \\ \vec{\bar{q}}(X) &= (\bar{q}(\text{Reg } X_1^\circ), \dots, \bar{q}(\text{Reg } X_r^\circ)).\end{aligned}$$

例えば, 図 4-中村の意味での安定準 Abelian 標体 X とすると, $\vec{\bar{p}} = \vec{0}$, $\vec{\bar{q}} = (n, \dots, n)$ である. ここで, $\vec{\bar{p}} = (0, \dots, 0)$, $\vec{\bar{q}} = (n, \dots, n)$ がある種の極小性から, 安定準 Abelian 標体を特徴づけると想像される.

$\dim X = 2$ のとき $\vec{\bar{p}}_2(X) = (1, 1, \dots, 1)$, $\vec{\bar{p}}(X) = (0, \dots, 0)$, $\vec{\bar{q}}(X) = (0, \dots, 0)$ とおいたとき $X \in K3$ (安定準 $K3$?) とおいたものである. とくに, X は単純正規交叉なら $(X_i, \sum_{j \neq i} X_j \cap X_i)$ は曲面で, X_i° は対数的

69

$K3$ 曲面である。これらと組合せて X をつくるのだが、いふ組合せりの議論からできるがよくわからない。

ともあれ、モジュラス空間の安定コンパクト化で、上の意味の安定な $K3$ 曲面は基本的な役を演ずる筈である。このような関係は、完備多様体の理論と、開多様体、 $\mathbb{Q}$ -多様体の理論の間の深い本質的關係を示唆するものである。

$\vec{x}$ の有効性の例をさえる。

$\dim X = 1$ のとき、 X を単純正規交又とする

$$\begin{aligned} \vec{x} = (1, \dots, 1) &\Leftrightarrow g(X_i) \geq 2, \text{ 又は } g(X_i) = 1 \text{ かつ} \\ &\quad \left(\sum_{j \neq i} X_j, X_i \right) \geq 1, \text{ 又は } g(X_i) = 0 \text{ かつ} \\ &\quad \left(\sum_{j \neq i} X_j, X_i \right) \geq 3. \end{aligned}$$

たゞの条件をみたす X は、しばしば $(g \geq 2)$ の安定曲線、とよばれる。安定曲線の自己同型は有限群である、たゞこれの一般化は容易。

定理 X を単に純 n 次元とする。

$\vec{x} X = (n, n, \dots, n)$ なら $\text{Aut}(X)$ は有限群。

70

文献表

[1] P. Deligne, Theorie de Hodges II, IHES.
80 (1973), 5-57.

[2] H. G. Halphen, Oeuvres II.

[3] 飯高茂: On Diophantine equation $\varphi(x, y) = \varphi(X, Y)$, J. f. u. a. M. 1: 23.

[4] ———, Minimal models in proper birational geometry, 70 7-11 21.

[5] ———, Some applications of logarithmic Kodaira dimension. 京都 1977.

[6] ———, A numerical characterization of quasi-abelian surfaces, 70 7-11 21.

[7] ———, On logarithmic K3 surfaces, 70 7-11 21.

その他多数

[8] 飛田英行: 準楕円曲面, 東大修論