

氏 名	笠 谷 昌 弘
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3219 号
学位授与の日付	平 成 20 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Zeros of symmetric Laurent polynomials of type $(BC)_n$ and Koornwinder-Macdonald polynomials specialized at $t^{k+1}q^{r-1}=1$ ($(BC)_n$ -対称 Laurent 多項式のある零点と, パラメータが特殊化された Koornwinder-Macdonald 多項式)
論文調査委員	(主 査) 教 授 三 輪 哲 二 教 授 上 野 健 爾 教 授 柏 原 正 樹

論 文 内 容 の 要 旨

本論文の目的は, BC 型の Weyl 群不変な n 変数 Laurent 多項式環において, ある種の零点条件で特徴づけられるイデアルの基底を, Koornwinder 多項式を用いて構成することである。 A 型の Weyl 群に対応する場合, すなわち通常の対称多項式の場合には, Macdonald 多項式による同様の基底の構成が, Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhin によって得られていた。本論文ではこの結果を BC 型の場合に拡張している。

Macdonald による対称多項式の理論では対称多項式環の基底となる Macdonald 多項式が中心的役割を果たす。 n 変数の場合, Macdonald 多項式は深さ n 以下の Young 図形 λ でパラメトライズされる。多項式を Laurent 多項式に拡張し, 変数 $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ の n 次対称群による入れ替えの対称性に加えて, 各変数 χ_i を逆数に置き換える変換に対する不変性を課した場合に, Macdonald 多項式に代わるものが Koornwinder 多項式であり, $P_\lambda(\chi)$ と書かれる。Macdonald 多項式の持つ基本的な性質が拡張されるだけでなく, Macdonald 多項式の場合が t, q という 2 つのパラメタを含んでいるのに対し, Koornwinder 多項式は 6 個のパラメタを含むという点で, 理論の本質的な拡張になっている。

Koornwinder 多項式は, 可換な差分作用素の族を同時対角化する基底という条件で特徴づけられる。本論文では 6 つあるパラメタのうち t, q に対して, $t^{k+1}q^{r-1}=1$ という特殊化を考えている。このような特殊化をすると, 差分作用素の固有値どうしの間で互いに一致するものが現れ, そのときに半単純性が崩れる場合がある。すなわち自明でない Jordan block が現れる。これは, 対応する Koornwinder 多項式においてパラメタの有理式である係数が極を持つことに対応している。すなわち, P_λ の中には特殊化したときに意味を失うものがある。

多項式環のイデアルは掛け算作用素による不変性が条件であるが, 差分作用素と掛け算作用素は交換しないので, 差分作用素によって不変な自明でないイデアルの存在は自明ではない。言い替えると, Koornwinder 多項式 (あるいは Macdonald 多項式) による基底を持つようなイデアルが, いつ存在するかという問題は, 対称多項式の理論における新しいタイプの問題である。Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhin は, パラメタの上記の特殊化の下で次のような零点条件で特徴づけられるイデアルを考えた。

$$\chi_{i+1} = tq^{s_i}\chi_i \quad s_i \geq 0, s_1 + \dots + s_{k+1} = r-1$$

これは wheel condition と呼ばれる。

本論文の主要な結果は, BC 型の対称性を満たす Laurent 多項式の空間で, $t^{k+1}q^{r-1}=1$ の場合に上記の wheel condition によってイデアルを定義すると, その基底が Koornwinder 多項式によって構成できるという結果である。イデアルの基底を構成する Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ は

$$\lambda_i - \lambda_{i+k} \geq r$$

という条件で特徴づけられる。

以上の結果は A 型の場合と平行であるが、本論文における証明方法は Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhin とは全く異なる。その証明の基本となるのは双対性という等式である。

$$\frac{u_{\mu}^*(P_{\lambda})}{u_0^*(P_{\lambda})} = \frac{u_{\lambda}(P_{\mu}^*)}{u_0(P_{\mu}^*)}$$

ここで u_{μ} は Young 図形 μ によって決まる変数のある特殊化である。また、 $*$ がついているものはパラメタの involution に付随する変換を表す。

証明は 3 つの内容からなる。第一に、条件を満たす Young 図形 λ に対応する P_{λ} に対して今考えているパラメタの特殊化をしたときに、係数が極を持たないことを示す必要がある。第二に、さらに wheel 条件に現れる変数の特殊化をしたときに、多項式自体が零点を持つことを示す必要がある。最後に、このような Koornwinder 多項式が考えているイデアルを張っていることを示す必要がある。

最初の 2 点に双対性が用いられる。特殊化 u_0 に関しては因数分解した形で明示公式が存在するので、多項式 P_{λ} の係数が、 u_{μ}^* という特殊化をしたとき極あるいは零点を持つかどうかは、 P_{μ}^* の係数が極も零点も持たないように u を選んでおけば、双対公式を使って判定できる。多項式自体の零点についても同様である。最後の部分の証明は次元の勘定をする。有限次元となるようにイデアルの適当な同次成分を考えると、その双対空間の単項的基底が構成できるので、それを Young 図形の個数と比較することによって証明が完結する。

論文審査の結果の要旨

2 重アフィンヘッケ環の多項式表現の既約性についての研究は、申請者等の研究によって大きく発展した。本論文はその基石となった重要な論文である。主要定理は、 A 型の Macdonald 多項式に対する Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhin による結果の類似を BC 型の Koornwinder 多項式の場合に証明したものであるが、Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhin の証明は ad hoc で、 BC 型への拡張が困難であるばかりでなく、その後の発展にはつながらないものであった。申請者が、双対性を鍵とする証明を与えたことはその後の発展の鍵になったもので大いに評価される。よって、博士（理学）の学位論文として十分と考える。

以下捕捉として、本論文以降の研究の進展について述べる。申請者の当初の研究では、6 個あるパラメタに対して、 $t^{k+1}q^{r-1}=1$ よりもさらに特殊化した状況を考えていた。この状況では、余計な特殊化をしているため、wheel 条件を満たす多項式自身が、極をもってしまふ。その状況を乗り越えるために、申請者は双対性を利用して多項式の修正を行なうという手法を考えた。申請論文は、余計な特殊化がない場合に、双対性を用いて Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhin による結果を拡張したものである。

Veselov と Sergeev は wheel 条件を 2 重に課した場合にも、Macdonald 多項式による基底の構成ができるか、という問題を提起した。この問題は申請者が考えた修正された多項式を使うことによって肯定的に解決された。この問題がきっかけとなって、申請者は、wheel 条件を複数個課すことによってイデアルの列を作ることによって成功する。これと前後して、Cherednik は 2004 年の京都滞在中に、Macdonald 多項式からなるような基底を持つイデアルの存在を問う問題に対する正しい定式化は、2 重アフィンヘッケ環の多項式表現においてパラメタを特殊化したときの既約性を問うことであるという指摘を行なった。さらに Cherednik は、既約性判定の鍵となるものは intertwining operator であるとの注意をしている。彼は 2007 年に京都滞在中にこのアイデアを実行に移し、reduced なルート系に対応する 2 重アフィンヘッケ環に対する多項式表現の既約性の判定条件を与える論文を書き上げている。一方申請者は、この Cherednik の示唆を受けて、非対称 Macdonald 多項式を扱える形に A 型の理論を完成させた。榎本は申請者の構成したイデアルの列が、2 重アフィンヘッケ環の表現空間としての組成分列であることを証明している。他方申請者は、非対称 Koornwinder 多項式の場合を、 $CV C$ 型の 2 重アフィンヘッケ環の Laurent 多項式による表現（野海表現）の問題として捉え、intertwining operator を用いる解析を行なった。この場合は Cherednik の扱った場合からは、はずれている。2 重アフィンヘッケ環の生成元のうち、多項式環に可換な差分作用素としてはたらく Y 生成元たちを同時対角化するときの固有値が一致するという意味での、discriminant locus を決定し、各既約成分の generic point における、既約性と Y の半単純性を判定した。申請者の用いた手法は、

intertwining operator および非対称 Koornwinder 多項式を，極が消えるように線形結合によって修正したものを用いるというもので，修正された intertwining operator や非対称 Koornwinder 多項式をもとめる効率的な帰納的定義を与えた。これによってパラメタを特殊化したときの CVC 型の 2 重アフィンヘッケ環の多項式表現の構造が解明された。