

線型分類方式による誤確率の上限について

静岡大 工 西 晃央
多賀保志
大阪大 養 石井恵一

§1. 序

多次元母集団 π_1, π_2 に関して平均ベクトル μ_1, μ_2 ($\mu_1 \neq \mu_2$) 及び分散行列 Σ_1, Σ_2 は知られているとする. π_i の事前分布を π_i ($\pi_1 + \pi_2 = 1$, $\pi_i \geq 0$) とし観測ベクトル x の π_i への分類を考える. 分類方式: $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$ とは $\phi_i(x) \geq 0$, $\phi_1(x) + \phi_2(x) = 1$ なる可測関数であり, x を観測して $\phi_i(x)$ の確率で π_i へ分類する方式である. これらの全体を $\Phi = \{\phi\}$ と書く. 特に $\phi_i(x)$ が標本空間 R^k の半空間の定義関数であるとき線型分類方式と云い, その全体を $\Phi^l = \{\phi^l\}$ と書く. 平均ベクトル μ_i , 分散行列 Σ_i を持つ分布関数全体を $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\mu_i, \Sigma_i)$ と書く. $F = (F_1, F_2)$, $F_i \in \mathcal{F}_i$; $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ と略記する. π_i の真の分布が F_i であるとき, 分類方式 ϕ を用いたときの誤確率は容易に,

$$e(\phi, F) = \pi_1 \int \phi_2(x) dF_1 + \pi_2 \int \phi_1(x) dF_2$$

となる。Becker 及び Chernoff [4] は 1次元で事前分布が等しい場合に於ける、分布に依存する分類方式の誤確率の上限

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{\phi \in \Pi} e(\phi, F) = \left\{ 2 \left[1 + \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$$

を求めた。多次元で事前分布が必ずしも等しくないときは、

Ishii, Taga [1] による詳しい結果がある。本稿では分類方式を Π^d に制限した場合、分布に依存しない誤確率の上限 $\inf_{\phi \in \Pi^d} \sup_{F \in \mathcal{F}} e(\phi, F)$ について考察する。 $\phi_d(x)$ が半空間 $\{x \in \mathbb{R}^d \mid d'x \geq \varepsilon\}$ の定義関数のとき $\phi^{(d, \varepsilon)} = (\phi_1^{(d, \varepsilon)}, \phi_2^{(d, \varepsilon)})$ と表わすことにする。

§2. $\sup_{F \in \mathcal{F}} e(\phi^{(d, \varepsilon)}, F)$ の計算

$F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2$ は独立に動かしてよいから

$$(2.1) \quad \sup_{F \in \mathcal{F}} e(\phi^{(d, \varepsilon)}, F) = \pi_1 \sup_{F_1 \in \mathcal{F}_1} \int (1 - \phi_1^{(d, \varepsilon)}) dF_1 + \pi_2 \sup_{F_2 \in \mathcal{F}_2} \int (1 - \phi_2^{(d, \varepsilon)}) dF_2$$

分散行列 Σ_i が退化しなければ Ishii [2] Theorem 3.1 より

$$(2.2) \quad \sup_F \int (1 - \phi_1^{(d, \varepsilon)}) dF = \inf_F \left\{ \int g(x) dF_1 \mid g(x) \geq 1 - \phi_1(x), g(x) \text{ は 2 次関数} \right\}$$

となる。

補題 2.1. A $k \times k$. symmetric. p.s.d. のとき

$$x'Ax + b'x + \gamma \geq \exists \text{ const for } \forall x \in \mathbb{R}^k \iff b \in \mathcal{L}[A]$$

補題 2.2 A $k \times k$. symmetric. p.s.d. のとき. $D = \{x \in \mathbb{R}^k \mid d'x \geq \varepsilon\}$ に

対し $g(x) = (x-b)'A(x-b) + \gamma \geq I_D(x)$ for $\forall x \in \mathbb{R}^k$ ならば $g(x) \geq h(x) \geq I_D(x)$

($\forall x \in \mathbb{R}^k$) を満たす適当な放物柱 $h(x)$ が存在し、主軸に d を選べる。

証明は Appendix 参照

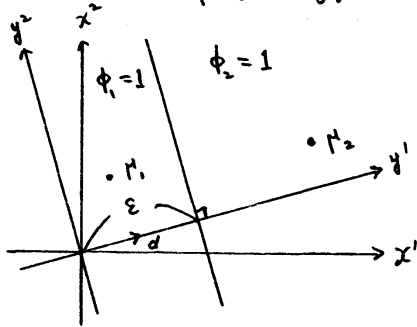
補題 2.1 より (2.2) の $g(x)$ は一般に $g(x) = (x-b)'A(x-b) + \gamma$ と表わ

すことが出来て (2.2) は以下のようになる。

$$(2.3) \quad \sup_{F \in \mathcal{F}(M_1, \Sigma_1)} \int (1 - \phi_1^{d, \varepsilon}(x)) dF_1(x) = \inf_{(x-b)'A(x-b) + \gamma \geq 1 - \phi_1^{d, \varepsilon}(x) = I_D(x)} \{ t A \Sigma_1 + (M_1 - b)'A(M_1 - b) + \gamma \}$$

さて $d'd = 1$ と正規化しておくと補題 2.2 より $\exists T = [d, t_1, \dots, t_R] \in O(R)$

$$T'AT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda > 0)$$



なる 2 次関数 $g(x) = (x-b)'A(x-b) + \gamma$ に制限してよい。

ところで直交変換 $X = TY$ によって

$Y \sim \mathcal{F}(T'M_1, T'\Sigma_1 T)$. 従って $b = Tc$

と表わせば $(x-b)'A(x-b) + \gamma = \lambda(y'-c')^2 + \gamma$.

半空間 $\{x \mid d'x \geq \varepsilon\}$ は半空間 $\{y \mid y' \geq \varepsilon\}$

に変換される。|Jacobian| = |det T| = 1 であるから、

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(M_1, \Sigma_1)} \int (1 - \phi_1^{d, \varepsilon}(x)) dF_1(x) = \sup_{F \in \mathcal{F}(T'M_1, T'\Sigma_1 T)} \int I_{\{y \mid y' \geq \varepsilon\}}(y) dF_1(y)$$

となる。(2.3) を右辺に適用して

$$(2.4) \quad \sup_{F \in \mathcal{F}(M_1, \Sigma_1)} \int (1 - \phi_1^{d, \varepsilon}(x)) dF_1(x) = \inf_{\lambda(y'-c')^2 + \gamma \geq I_{\{y \mid y' \geq \varepsilon\}}} \{ \lambda d' \Sigma_1 d + \lambda (d'M_1 - c')^2 + \gamma \}$$

右辺は簡単な計算によつて

$$= \begin{cases} \frac{d' \Sigma_1 d}{d' \Sigma_1 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} & : d'M_1 < \varepsilon \\ 1 & : d'M_1 \geq \varepsilon \end{cases}$$

となる。 $\mathcal{F}(M_2, \Sigma_2)$ に対しても同様にして

$$(2.5) \quad \sup_{F \in \mathcal{F}(M_2, \Sigma_2)} \int (1 - \phi_2^{d, \varepsilon}(x)) dF_2(x) = \begin{cases} \frac{d' \Sigma_2 d}{d' \Sigma_2 d + (\varepsilon - d'M_2)^2} & : d'M_2 < \varepsilon \\ 1 & : d'M_2 \geq \varepsilon \end{cases}$$

となる。(2.1), (2.4), (2.5) から次の定理を得る。

定理 2.1 (i) $d'M_1 < d'M_2$ の場合.

$$\sup_F e(\phi^{d,\varepsilon}, F) = \begin{cases} \pi_1 + \pi_2 \cdot \frac{d' \Sigma_2 d}{d' \Sigma_2 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} & ; d'M_1 \geq \varepsilon \\ \pi_1 \cdot \frac{d' \Sigma_1 d}{d' \Sigma_1 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} + \pi_2 \cdot \frac{d' \Sigma_2 d}{d' \Sigma_2 d + (d'M_2 - \varepsilon)^2} & ; d'M_1 < \varepsilon < d'M_2 \\ \pi_1 \cdot \frac{d' \Sigma_1 d}{d' \Sigma_1 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} + \pi_2 & ; d'M_2 \leq \varepsilon \end{cases}$$

(ii) $d'M_1 > d'M_2$ の場合.

$$\sup_F e(\phi^{d,\varepsilon}, F) = \begin{cases} \pi_1 + \pi_2 \cdot \frac{d' \Sigma_2 d}{d' \Sigma_2 d + (d'M_2 - \varepsilon)^2} & ; d'M_2 \geq \varepsilon \\ 1 & ; d'M_1 > \varepsilon > d'M_2 \\ \pi_1 \cdot \frac{d' \Sigma_1 d}{d' \Sigma_1 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} + \pi_2 & ; d'M_1 \leq \varepsilon \end{cases}$$

(iii) $d'M_1 = d'M_2$ の場合.

$$\sup_F e(\phi^{d,\varepsilon}, F) = \begin{cases} \pi_1 + \pi_2 \cdot \frac{d' \Sigma_2 d}{d' \Sigma_2 d + (d'M_2 - \varepsilon)^2} & ; d'M_2 > \varepsilon \\ \pi_1 \cdot \frac{d' \Sigma_1 d}{d' \Sigma_1 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} + \pi_2 & ; d'M_2 \leq \varepsilon \end{cases}$$

§3. 種々の結果

分類式 $\phi^{d,\varepsilon}$ に ε, d を固定し ε を動かして次式の計算

$$(3.1) \quad \bar{\Psi}(d) \equiv \inf_{\varepsilon} \sup_F e(\phi^{d,\varepsilon}, F)$$

を行う。 $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$ の場合は定理 2.1 より次式を得る。

$$(3.2) \quad \bar{\Psi}(d) = \min \left\{ \frac{1}{2}, \inf_{d'M_1 < \varepsilon < d'M_2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d' \Sigma_1 d}{d' \Sigma_1 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d' \Sigma_2 d}{d' \Sigma_2 d + (d'M_2 - \varepsilon)^2} \right) \right\}$$

$$(3.3) \quad \Psi^d(\varepsilon) \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{d' \Sigma_1 d}{d' \Sigma_1 d + (d'M_1 - \varepsilon)^2} + \frac{d' \Sigma_2 d}{d' \Sigma_2 d + (d'M_2 - \varepsilon)^2} \right\} \quad ; d'M_1 < \varepsilon < d'M_2$$

とおく。 Schwarz の不等式 から容易に次の補題は得られる。

補題 3.1 $A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ symmetric, p.d. $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ の constant vector に對し

$$\sup_{x \neq 0} \frac{x'b}{\sqrt{x'A x}} = \sqrt{b'A^{-1}b}$$

が成り立つ。sup を attain するベクトルは $x = \alpha A^{-1}b$ ($\forall \alpha > 0$) のみである。

case 1 $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ の場合

若干の計算により次式が成り立つ。

$$\Phi(d) = \min \left\{ \frac{1}{2}, \inf_{\varepsilon} \varphi^d(\varepsilon) \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \left(\frac{d'(M_2 - M_1)}{\sqrt{d' \Sigma d}} \right)^2 \leq 4 \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d'(M_2 - M_1)}{\sqrt{d' \Sigma d}} \right)^2} & ; > 4 \end{cases}$$

補題 3.1 より次の結果を得る。

定理 3.1 $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ のとき。

$$\inf_{\Phi^L} \sup_{\mathcal{F}} e(\Phi^L, F) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; (M_1 - M_2)' \Sigma^{-1} (M_1 - M_2) \leq 4 \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{4} (M_1 - M_2)' \Sigma^{-1} (M_1 - M_2)} & ; > 4 \end{cases}$$

左辺の $\inf$ を attain する Φ^L は π_i ($i=1, 2$) に多次元正規分布を仮定したときの判別関数、 $x' \Sigma^{-1} (M_1 - M_2) - \frac{1}{2} (M_1 - M_2)' \Sigma^{-1} (M_1 + M_2)$ に基づく分類式のみである。更に Mahalanobis 距離 $(M_1 - M_2)' \Sigma^{-1} (M_1 - M_2) > 4$ の場合には次のことが言える。

$$\inf_{\Phi^L} \sup_{\mathcal{F}} e(\Phi^L, F) = 2 \cdot \inf_{\Phi} \sup_{\mathcal{F}} e(\Phi, F)$$

case 2 π_i は未知で、一般には $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ の場合

$$e_i(\Phi^{d, \varepsilon}, F) \equiv \int (1 - \Phi_i^{d, \varepsilon}) dF_i \quad (i=1, 2) \text{ とおく。 } d \text{ を固定し}$$

ε を動かしたとき、minimax 的誤確率 $\inf_{\varepsilon} \max_i \sup_F e_i(\Phi^{d, \varepsilon}, F)$ は

$$\varepsilon^*(d) = \frac{(\delta_1 d' M_2 + \delta_2 d' M_1)}{(\delta_1 + \delta_2)} \quad (\delta_i^2 \equiv d' \Sigma_i d) \text{ で達成される。故に次}$$

式が得られる。

$$(3.4) \inf_d \inf_{\varepsilon} \max_i \sup_F e_i(\phi^{d, \varepsilon}, F) = \inf_d \frac{1}{1 + \left(\frac{d'(\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{d' \Sigma_1 d} + \sqrt{d' \Sigma_2 d}} \right)^2}$$

他方 $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$ のとき Issai, Taga [1] で次式が得られている。

$$(3.5) \inf_{\pi} \sup_F e(\phi, F) = \sup_F \inf_{\pi} e(\phi, F) = \frac{1}{2} \inf_d \frac{1}{1 + \left(\frac{d'(\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{d' \Sigma_1 d} + \sqrt{d' \Sigma_2 d}} \right)^2}$$

case 3 π_i は未知, $\Sigma_1 = \Sigma$, $\Sigma_2 = \alpha^2 \Sigma$ ($\alpha > 0$) の場合。

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \phi^{\varepsilon}(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0 \iff \alpha = 1 \iff \Sigma_1 = \Sigma_2 \text{ であるから } \alpha \neq 1 \text{ のとき}$$

$$\inf_{\pi} \sup_F \left(\pi_1 \int \phi_2^l dF_1 + \pi_2 \int \phi_1^l dF_2 \right) < \inf_{\pi} \sup_F \left(\frac{1}{2} \int \phi_2 dF_1 + \frac{1}{2} \int \phi_1 dF_2 \right) \text{ であ}$$

り等号が成立するのは $\inf_{\pi} \sup_F e(\phi^l, F) \leq 1/2$ 且つ $\Sigma_1 = \Sigma_2$ の場合に限る。所で (3.5), (3.4) から

$$(3.6) \inf_{\pi} \sup_F e(\phi, F) = \sup_F \inf_{\pi} e(\phi, F) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(1+\alpha)^2} (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)}$$

$$(3.7) \inf_{\pi} \max_i \sup_F e_i(\phi^l, F) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(1+\alpha)^2} (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)}$$

であり、共に α の単調増加関数である。更に (3.7) の $\inf$ を attain する ϕ^l は、 $x' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) - \frac{1}{1+\alpha} (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\alpha \mu_1 + \mu_2) \geq 0 \iff \phi_2^l(x) = 1$ に限る。

case 4 $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$, n 個の独立な標本 $x_1, x_2, \dots, x_n$

がすべて Π_1 の一方から得られている場合.

μ_1 の代りに $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$, Σ の代りに $\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}$ で置き換えればよい.

定理 3.2

$$\inf_{\mathbb{R}^l} \sup_{\mathcal{F}} e(\phi^l(x_1, \dots, x_n), F) = \begin{cases} 1/2 & : (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) \leq \chi_n^2 \\ \frac{1}{1 + \frac{n}{4} (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)} & ; > \chi_n^2 \end{cases}$$

左辺の $\inf$ を attain する ϕ^l は Π_1, Π_2 に多次元正規性を仮定するときの分類方式 $\bar{x}' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) - \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 + \mu_2) \geq 0 \Leftrightarrow \phi_2^l(x_1, \dots, x_n) = 1$ に限る.

case 2, case 3. でも同様の考察が出来る.

Appendix (補題 2.2 の証明) A は symmetric, p.s.d だから $\exists T \in O(k)$

$$T'AT = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0, \quad 1 \leq r = \text{rank}(A) \leq k$$

とできる. $T = [t_1, \dots, t_k]$ とおく.

(I) $d \in \mathcal{L}[t_1, \dots, t_r]$ の場合. $d = s_1, s_2, \dots, s_r$ に適当に選んで $s_i' s_j = \delta_{ij}$, $\mathcal{L}[s_1, \dots, s_r] = \mathcal{L}[t_1, \dots, t_r]$ とできる. $S = [s_1, \dots, s_r, t_{r+1}, \dots, t_k]$

とおく. $S'AS = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. B は $r \times r$, symmetric, p.d. である. $\therefore$

$\therefore x = Sy$ と変換する. $b = Sp$ とおけば, $g(x) = (y-p)' S'AS(y-p) + y'b$

$y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{1 \times k}^T$, $p = \begin{pmatrix} \delta \\ \epsilon \end{pmatrix}_{1 \times k}^T$ とおくと $g(x) = (u-\delta)' B(u-\delta) + \gamma$ となる.

$u = (u^1, u^2, \dots, u^r)'$ で, $u^i = \eta$ (constant) の下で $(u-\delta)' B(u-\delta) + \gamma$ の最小値

を求める. $u = \begin{pmatrix} \eta \\ u_2 \end{pmatrix}_{1 \times r}^T$, $\delta = \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}_{1 \times r}^T$, $B = \begin{pmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とおく. B_{22} は $(r-1) \times (r-1)$.

symmetric p.d. であり, $Q(u_2|q) \equiv (q - g', (u_2 - g_2)') \begin{pmatrix} b'' & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q - g' \\ u_2 - g_2 \end{pmatrix} + \gamma$
 $= (u_2 - g_2)' B_{22} (u_2 - g_2) + 2(q - g') B_{12} (u_2 - g_2) + b'' (q - g')^2 + \gamma$
 $= (u_2 - g_2 - (q - g') B_{22}^{-1} B_{21})' B_{22} (u_2 - g_2 - (q - g') B_{22}^{-1} B_{21}) - (q - g')^2 B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} + b'' (q - g')^2 + \gamma$
 となる. $\therefore Q(q) \equiv \min_{u_2} Q(u_2|q) = (b'' - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}) (q - g')^2 + \gamma \geq I_D$ となる.
 $\therefore \because |B| = |B_{22}| \cdot (b'' - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}) > 0, |B_{22}| > 0$ より, $b'' - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} > 0$.

(II) $d \notin \mathcal{L}[t_1, \dots, t_r]$ の場合, $x = Tz, b = Tg$ と変換する. $f(x) \equiv Q(x)$
 $= (z - g')' \Lambda (z - g) + \gamma = \sum_{i=1}^r \lambda_i (z^i - g^i)^2 + \gamma$ となる. $S = [d, *, \dots, *] \in O(k)$
 を任意に 1 つ定めると適当な $Q \in O(k)$ により $S = TQ$ となる.
 さて, $x = Sy$ と変換すると, $Tz = x = Sy = TQy$ 従って $Tz = Qy$. 即ち $y = Q'z$ である. $\therefore y' = \sum_{j=1}^k g_j z^j$ ($Q = (g_{ij})$). $\therefore \because S = TQ$ より,
 $d \equiv s_1 = \sum_{j=1}^k g_{j1} t_j$ である. $d \notin \mathcal{L}[t_1, \dots, t_r]$ より $\exists j_0 \geq r+1$ に対して $g_{j_0,1} \neq 0$ である. さて $y' = \gamma$ (constant) の下で $Q(z)$ の最小値を求める.
 $q = \sum_{j=1}^k g_{j1} z^j (= y')$ が z に対する制約条件である. 特別な場合として, $z^1 = g^1, \dots, z^r = g^r, z^{r+1} = \dots = z^{j_0-1} = z^{j_0+1} = \dots = z^k = 0$ とおけば制約式は, $q = \sum_{j=1}^r g_{j1} g^j + g_{j_0,1} z^{j_0}$. 即ち $z^{j_0} = \frac{1}{g_{j_0,1}} (q - \sum_{j=1}^r g_{j1} g^j)$ である.
 この z に対して $Q(z) = \gamma$ であるから $\min_{y'=q} f(x) = \gamma$ である. 所で, $x = Sy$ より $y = S'x, \therefore y' = s_1'x = d'x$ である.

(I) の場合, $S'AS = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $b'' = s_1' A s_1 = d' A d$, 従って $b = Sp = S \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$. よって $g' = S' b$ より $g' = s_1' b = d' b$ である. 以上から,

$$h(x) = \begin{cases} (d' A d - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}) (d'(x-b))^2 + \gamma & : \text{(I) の場合} \\ \gamma & : \text{(II) の場合} \end{cases}$$

とあけぱよい。(証系)

参考文献

- [1] Isii, K., Taga, Y. (1974), "Mathematical programming approach to a minimax theorem of statistical discrimination applicable to pattern recognition". IFIP Conference of Optimization Techniques in Novosibirsk.
- [2] Isii, K. (1964), "Inequalities of the types of Chebyshev and Cramér-Rao and mathematical programming". Ann. Inst. Stat. Math., Vol.16.
- [3] 多賀. 西. 石井 (1975), "統計的判別法について" 教研講究録 231
- [4] Chernoff, H. (1971), "A bound on the classification error for discriminating between populations with specified means and variances", Studi di probabilitā, statistica e ricerca operativa in onore di Giuseppe Pompilj.