

Integer Solutions of Resultant Inequalities

a brief survey around results of Evertse

Noriko HIRATA-KOHNO

Department of Mathematics
College of Science and Technology
Nihon University
Suruga-dai, Kanda
Chiyoda, Tokyo 101-8308
JAPAN

本稿では、Resultant equations もしくは Resultant inequality と呼ばれるディオファントス不定方程式 (不等式) についての、最近の J. H. Evertse などによる結果の、簡単な Survey を試みたいと思う。関連する自身の結果およびその周辺については、津田塾大学第4回整数論シンポジウム報告集にも述べたので、ここでは重複を避け、Resultant equations というものの一般論と、その整数解を求めることが Roth 型のディオファントス近似に帰着される理由について述べたい。

Definition

$f(X), g(X)$ を $\mathbb{Z}[X]$ の元とする。

$$f(X) = a_0 X^r + a_1 X^{r-1} + \cdots + a_r = a_0 \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i),$$

$$g(X) = b_0 X^t + b_1 X^{t-1} + \cdots + b_t = b_0 \prod_{j=1}^t (X - \xi_j)$$

(ただし $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$) と書くとき、 f と g の Resultant とは、サイズ $r+t$ の次の行列式である。

$$R(f, g) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_r & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_r & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_r \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_t & & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_t & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_t \end{pmatrix}$$

ここで $R(f, g) = a_0^t b_0^r \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^t (\alpha_i - \xi_j)$ であるので、 f と g が共通根を持つときに限り $R(f, g) = 0$ となる。 $R(f, g)$ をさらに書き換えると

$$R(f, g) = a_0^t \prod_{i=1}^r \left(b_0 \prod_{j=1}^t (X - \xi_j) \Big|_{X=\alpha_i} \right) = a_0^t \prod_{i=1}^r g(\alpha_i)$$

であることに注意する。

Mahler measure を定義する。 $\mathbb{C}$ 上の多項式 $f(X) = a_0 \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$ に対し

$$M(f) := |a_0| \prod_{i=1}^r \max(1, |\alpha_i|)$$

とおく。代数的数 β に対してはその $\mathbb{Z}$ 上の最小多項式の Mahler measure を β の Mahler measure と定め、 $M(\beta)$ と書く。

$h(\beta)$ を通常の logarithmic projective height とするとき、

$$h(\beta) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]} \log M(\beta)$$

が知られているので、 $H(\beta) := \exp(h(\beta))$ に対しては、あるいはクラシカルな高さ (β の最小多項式の係数の絶対値の最大値) に対しては、

$H(\beta) \asymp M(\beta)$ 、 $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ となっている。

$f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ を degree r の多項式とし、固定する。正整数 t も固定する。 $f(X)$ は与えられた多項式、 $g(X)$ を未知多項式、すなわち、 $g(X)$ の係数 $b_0, b_1, \dots, b_t$ を未知整数とみなす。

κ を正実数とする。次のディオファントス不定不等式を Resultant inequality と呼ぶ。

$$(1) \quad 0 < |R(f, g)| < M(g)^{r-\kappa}$$

E. Wirsing [Wi] は、 f が重根を持たないとき、仮定

$$\kappa > 2t \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2t-1} \right)$$

のもとで、(1) の解 $g(X)$ は有限個であることを示した。W. M. Schmidt [S1] は、 f が重根を持たず、さらに次数 t 以下の irreducible factor を $\mathbb{Z}[X]$ に持たないならば、仮定 $\kappa > 2t$ のもとで、(1) の解 $g(X)$ は有限個であることを証明した。さらに、 f が重根を持たないとき、仮定 $\kappa > 2t$ のもとで、(1) の解 $g(X)$ が有限個であることは、Schmidt の部分空間定理の応用により得られる M. Ru-P. M. Wong の定理から次のようにして示されることが [E1] に述べられている。

Ru-Wong の定理 [R-Wo]

$q \geq 2n-1$ とする。 $L_1, \dots, L_q$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の n 変数 1 次形式で、一般の位置にあるものとする。このとき $\varepsilon > 0$ に対し、次の不定不等式をみたす、 $L_1, \dots, L_q$ の零点以外の整数解 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ は有限個である：

$$\prod_{i=1}^q \frac{|L_i(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} < \frac{1}{|\mathbf{x}|^{2n-2+\varepsilon}}.$$

ただし $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し、 $|\mathbf{x}| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ とする。

Ru-Wong から (1) の有限性を導く証明

[E1] にも言及されており、もともと [S1] の議論を用いているのだが、 $r < 2t+1$ のときには、筆者は [E2] に注意された。

$B = (b_0, b_1, \dots, b_t) \in \mathbb{Z}^{t+1}$ を $g(X)$ の未知係数からなるベクトルとおき、 $L_i(B) = \alpha_i^t b_0 + \alpha_i^{t-1} b_1 + \cdots + b_t$ ($1 \leq i \leq r$) とする。つまり、 $\alpha_i^t, \alpha_i^{t-1}, \dots, 1$ たちは、与えられた L_i の係数であると見なす。 $q = r$ とす

る。このとき、 $L_i (1 \leq i \leq r)$ が一般の位置にあることは、 f が重根を持たないので、Van der Monde 行列式

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1^t & \cdots & \cdots & \alpha_1 & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot \\ \alpha_t^t & \cdots & \cdots & \alpha_t & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

よりわかる [E2]。

$R(f, g) = a_0^t L_1(B) \cdots L_r(B)$ であるから、 $q = r \geq 2(t+1) - 1$ ($n = t+1$) のとき、つまり $r \geq 2t+1$ のときには、Ru-Wong の上述の定理の不等式において ε のかわりに ε' をとりなおした

$$\prod_{i=1}^r \frac{|L_i(\mathbf{x})|}{|L_i| \|\mathbf{x}\|} < \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2n-2+\varepsilon'}}$$

(ここで、 $|L_i|$ は、 L_i の係数ベクトルのユークリッドノルムとする) を考えることによって有限性は同じであることから、(1) は有限個の解を持つことが確かめられる。

$$\frac{|L_i(\mathbf{x})|}{|L_i| \|\mathbf{x}\|} \leq 1$$

であることに注意すると、 $r < 2t+1$ に対しては、不等式

$$\prod_{i=1}^r \frac{|L_i(\mathbf{x})|}{|L_i| \|\mathbf{x}\|} < \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2n-2+\varepsilon'}}$$

の解は、

$$\prod_{i=1}^{2t+1} \frac{|L_i(\mathbf{x})|}{|L_i| \|\mathbf{x}\|} < \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2n-2+\varepsilon'}}$$

の解の部分集合であるから、有限個となり、解の個数は同じ、もしくは少なくなる [E2]。

(1) についての quantitative result としては、J. -H. Evertse の結果 [E1] があるが、Gap Principle の確立のために、 $g(X)$ には、より強い条件 irreducible であることを課し、また、仮定 $\kappa > 2t(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2t-1})$ であるときのみに限っている。したがって κ については Schmidt、Ru-Wong の条件よりも強い。

Roth 型の拡張のディオファントス近似から、(1) の有限性を導く

さて、ここで Roth 型の拡張ともいえる次のディオファントス近似 (2) を考えて、以下に (1) の有限性が (2) から導かれることを示そう。

$|x, y| = \max(|x|, |y|)$ という記号を定める。ある正実数 $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ と $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \overline{\mathbf{Q}}$ (これは、Resultant Inequality に出てくる α_i とは限らない) および、未知数として $\mathbf{Q}$ 上 t 次の代数的数 ξ (この conjugates を $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(t)}$ と書く) に対してディオファントス近似不等式

$$(2) \quad |\alpha_i - \xi^{(i)}| < \frac{1}{M(\xi)^{\varphi_i}} \quad (1 \leq i \leq t)$$

を考える。

Wirsing [Wi] は、(2) が、

$$(3) \quad \max_I (\#I)^2 > 2t \left(\sum_{i \in I} \varphi_i^{-1} \right)$$

(max は、 $\{i \in \{1 \dots t\} : \varphi_i \neq 0\}$ のすべての non-empty subsets を走る) を満たすときに、代数的数の解 ξ は有限個であることを示した。Evertse は、この定量的結果を与えた [E1]。この (2) の不等式の解の有限性から、(1) の解の有限性が出ることを説明したい [E1]。

$$(4) \quad \frac{|R(f, g)|}{M(f)^t M(g)^r} = \prod_{i=1}^t \prod_{j=1}^r \frac{|\alpha_j - \xi^{(i)}|}{|1, \alpha_j| |1, \xi^{(i)}|}$$

である。次数 t の algebraic number ξ に対し、 $\mathbf{Q}$ 上の conjugates $\xi^{(1)} \dots \xi^{(t)}$ が順序

$$\min_{1 \leq j \leq r} \frac{|\alpha_j - \xi^{(1)}|}{|1, \alpha_j|} \leq \dots \leq \min_{1 \leq j \leq r} \frac{|\alpha_j - \xi^{(t)}|}{|1, \alpha_j|}$$

を満たすとする。

α_{j_i} を各 $1 \leq i \leq t$ に対し

$$\frac{|\alpha_{j_i} - \xi^{(i)}|}{|1, \alpha_{j_i}|} = \min_{1 \leq j \leq r} \frac{|\alpha_j - \xi^{(i)}|}{|1, \alpha_j|}$$

となる f の根とする (ここで α_{j_i} たちは、 t 個になった)。

三角不等式より $j \neq j_i$ において

$$\frac{|\alpha_j - \xi^{(i)}|}{|1, \alpha_j| |1, \xi^{(i)}|} \geq \frac{|\alpha_{j_i} - \alpha_j|}{2|1, \alpha_{j_i}| |1, \alpha_j|}$$

が成り立つことと、discriminant の定義 $D(f) = a_0^{2r-2} \prod_{1 \leq p < q \leq r} (\alpha_p - \alpha_q)^2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (f は重根なし) に注意すると、

$$\begin{aligned} \prod_{j \neq j_i} \frac{|\alpha_{j_i} - \alpha_j|}{2|1, \alpha_{j_i}| |1, \alpha_j|} &\geq \prod_{1 \leq p < q \leq r} \frac{|\alpha_p - \alpha_q|}{2|1, \alpha_p| |1, \alpha_q|} \\ &= \frac{|D(f)|^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{r(r-1)}{2}} M(f)^{r-1}} \end{aligned}$$

だから、 $D(f)$ 、 $M(f)$ 、 r と t で書ける定数 C に対して

$$\frac{|R(f, g)|}{M(f)^t M(g)^r} \geq C^{-1} \prod_{i=1}^t \frac{|\alpha_{j_i} - \xi^{(i)}|}{2|1, \alpha_{j_i}| |1, \xi^{(i)}|}$$

となる。 $M(g) = M(\xi)$ なので、(4) の 1 から r までの積の中の各分数は 2 以下であることに注意すると、(1)(2) より、ときたい不等式は、定数 C' に対して

$$\prod_{i=1}^t \frac{|\alpha_{j_i} - \xi^{(i)}|}{2|1, \alpha_{j_i}| |1, \xi^{(i)}|} < \frac{C'}{M(\xi)^\kappa}$$

となるが、Evertse の combinatorical lemma [E1] を用いると

$$\frac{|\alpha_{j_i} - \xi^{(i)}|}{2|1, \alpha_{j_i}| |1, \xi^{(i)}|} \leq \frac{1}{M(\xi)^{\varphi_i}}$$

に分けられる正実数 φ_i で、諸条件をみたすものが存在することがわかる。このことから、(1) の解は、(2) (の左辺を変形したものだが、 φ_i より少し小さい φ'_i を取り直せばよい) の解に含まれる。

References

[E1] J. -H. Evertse, *The number of algebraic numbers of given degree approximating a given algebraic number*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 247, ed. Y. Motohash (1997), Cambridge, pp 53-83.

[E2]-, *personal communication*, December, 1998.

[R-Wo] M. Ru-P. M. Wong, *Integral points of $\mathbf{P}^n \setminus \{2n+1 \text{ hyperplanes in general position}\}$* , Invent. Math. 106 (1991), 195-216.

[S1] W. M. Schmidt, *Inequalities for Resultants and for Decomposable Forms*, Proceedings of the Conference : Diophantine Approximation and its Applications, ed. C. Osgood, Academic Press (1973), pp 235-253.

[S2] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math. 785 (1980), Springer.

[Wi] E. Wirsing *On approximations of algebraic numbers by algebraic numbers of bounded degree*, Proc. Symp. Pure Math. 20, ed. D. J. Lewis, AMS (1971), pp 213-248.