

Ⅱ 種超伝導体中の Flux Line の形成.

大阪市立大, 理, 亀 高 惟 倫

先づ問題と結論及びその物理的背景について書く。非線型放物型方程式に対して特異境界値, 初期値問題を考える。

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{v^2}{r^2} u + (1-u^2)u \\ 0 \leq u(r, t) \leq 1 & (r, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(r, 0) = u_0(r) & r \in (0, \infty) \end{cases}$$

$v > 0$ は問題の定数 $\chi - \tau$, 初期値 $u_0(r)$ は $0 \leq u_0(r) \leq 1$ $r \in (0, \infty)$ であり連続関数とする。対応する定常問題は、

$$(2) \begin{cases} w'' + \frac{1}{r} w' - \frac{v^2}{r^2} w + (1-w^2)w = 0 & r \in (0, \infty) \\ 0 \leq w(r) \leq 1 & (1 = \frac{d}{dr}) \end{cases}$$

であり、2、非線型な Sturm-Liouville の特異境界値問題となる。非線型問題であり、逐次近似で線型問題を解く事に帰着する。それは次の (3), (4) である。

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \left(\mu + \frac{\nu^2}{r^2}\right) u + F(r, t) & (r, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) : \text{bounded} \\ u(r, 0) = u_0(r) & r \in (0, \infty) \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

$$(4) \begin{cases} w'' + \frac{1}{r} w' - \left(\mu + \frac{\nu^2}{r^2}\right) w + F(r) = 0 & r \in (0, \infty) \\ w(0) = 0, \quad w(\infty) : \text{bounded} \end{cases}$$

(3), (4) に対し境界点 $r=0$, $r=\infty$ は特異点と取り、2 "3" がこの事情を詳しくいえる次の様である。まず Feller と McKean は境界点を regular, exit, entrance, natural の4種に分類したか、これに従うと $r=0$,

$r=\infty$ は natural (境界条件は“この近傍で有界に留る”) である。この際は無関係だがついでに言、2 点と Weyl の分類では $r=0, \infty$ 共に limit point case. (4) に対し Poincaré の言葉でいうと $r=0$ は確定特異点、 $r=\infty$ は1級不確定特異点である。この事(2)の解の詳しい性質に反映する。以上のような意味で非線形問題 (1), (2) に対しとも特異境界値問題という言葉を使え。

主要な結論は

定理 1 (2) は唯一つの非自明解 $w(r)$ を持つ。これは

$$(i) \quad w(r) \in C^2(0, \infty)$$

$$(ii) \quad 0 < w(r) < 1 \quad r \in (0, \infty)$$

$$(iii) \quad 1 - w(r) = O(r^{-2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

$$(iv) \quad w(r) = u_0(\nu) r^\nu + O(r^{\nu+2}) \quad \text{as } r \rightarrow 0$$

$$u_0(\nu) = \frac{1}{2\nu} \int_0^\infty (1 - w^2(s)) w(s) s^{1-\nu} ds$$

$$(v) \quad w'(r) > 0 \quad r \in (0, \infty)$$

$$(vi) \quad 0 < \nu \leq 1 \quad \text{or} \quad w''(r) < 0 \quad r \in (0, \infty)$$

(vii) $\nu = 1, 2, 3, \dots$ なる (2) は $u_0(\nu) r^\nu + u_1 r^{\nu+1} + \dots$ の形の非自明解を持つがこれは $r \rightarrow 0$ のとき $w(r)$ の漸近級数である。

を満たす。証明は [1] にある。

定理 2 (1) は唯一つの大域解を持つ。 $u_0(r)$ ともなる。

この解 $u(r, t)$ は $t \rightarrow \infty$ と可なり $r \in [0, \infty)$ 上の compact 一様に $w(r)$ に収束する。 $w(r)$ は定理 1 の (1), (2) の唯一つの非自明解。

これはこの結論の意味する所は素題にかかっている通りであるが、詳しくいうと次の通り。先ず超伝導現象をかいまみて紹介する。これは 1911 年 K. Onnes が自ら発見した。

ハリウム凝化装置を用い、低温における水銀の電気抵抗を観
 察中に、ある臨界温度 T_c 以下で電気抵抗が突然ゼロになる事
 を発見した事に端を発する。すなわちある種の金属及び合
 金はある臨界温度 T_c を越え、温度を下けたとき常伝導状態か
 ら超伝導状態に移る。これは熱力学第二法則に相転移であり、
 超伝導状態の電気抵抗 0 の他に完全反磁性 (Meissner 効果)
 等の、いちにちしい性質が特徴付けられ、一言でいうと量子効
 果のマクロな出現という事になる。この量子効果の
 マクロな出現を最もよく表わしているのがⅡ種超伝導体中
 の Flux Line である。これは次の様な現象である。ある
 種の超伝導体 (Ⅱ種超伝導体) は、ある臨界値 H_c よりも
 弱い磁場をかけると Meissner 効果が少し破れて、磁場が磁束
 が量子化された磁束線の三角格子という形で超伝導体中にし
 み込めという現象がある。一本の磁束線 (Flux Line) を注
 目してみよう。これは永久電流の渦でとり囲まれた渦糸で
 もあるが渦糸の中心では完全に常伝導状態にあり中心から
 離れれば超伝導状態に徐々に移行する、十分離れれば完
 全に超伝導状態になる。この様子を数量化するため
 に中心からの距離 r に対し超伝導の度合いを表わすパラメ
 ター $\psi(r)$ を r に対しプロットしてみればよい。この
 時の $\psi(r)$ の変化を記述する局所方程式 (常微分方程式) とその

境界条件が 1957 年 A.A. Abrikosov [2] に於て導かれた。
可なり (2) である。 $w(r)$ は図 1 に示したようにふるま
うが奇数のため $\nu=1$ の場合の (エネルギーの獲得計算から
 $\nu=1$ のものばかりが実現する、なお実現しないものは $\nu=$
 $1, 2, 3, \dots$ に対応する (2) の解は 4 であり、この事が磁場の
量子化という事象に対応する) 数値計算の結果 (Ginzburg と
Pitaevskii に於て) を示したとおり。

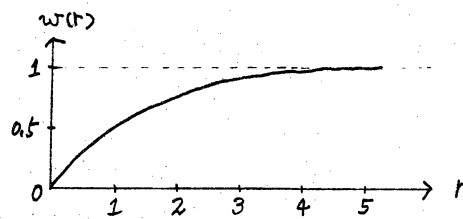


図.1 Ginzburg - Pitaevskii に於て $\nu=1$ の (2) の解 $w(r)$ の
数値計算 [3]

ここに戻り、2 超伝導の基礎方程式 (いわゆる G-L eq.)
は 1950 年 Ginzburg - Landau [4] に於て導かれた。
これは $|u|^2$ が超伝導の度合いを表わす ($|u| \leq 1$ であ
り、 $|u|=0$ の所が常伝導状態の所、 $|u|=1$ の所が完全に
超伝導状態の所を表わすものとされたい) する複素数値
函数 u と磁場のベクトルポテンシャル $A = (A_1, A_2, A_3)$
の満たす準線型楕円型偏微分方程式系である。この事は
Ginzburg - Landau の order parameter と呼ぶ。 Abrikosov

はこの G-L 方程式から出発して (2) を導いたのである。

→ 1966年 Abrahams - Tsumeto [5] は非常問題を与え、Ginzburg-Landau の order parameter $u(x,t)$ の定常時間依存方程式を導いた。これは $(T_c - T)/T_c \ll 1$ の仮定の下すなわち臨界温度以下であり、臨界温度に近い所という仮定の下では次の様な非線形拡散方程式である。

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1 - |u|^2) u$$

次の様に変数分離された (5) の解を与える。

$$(6) \quad u = u(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) = u(r_{\perp}, \theta, t) \\ = u(r, t) e^{i\omega\theta} \quad (\omega > 0)$$

この時 $u(r, t)$ の満たす方程式が可なり (1) である。(2) の解 $w(r)$ に対し $w(r) e^{i\omega\theta}$ は (5) の定常解でもある事に注意しよう。従って、2 Abrikosov の方程式 (2) は

Abrahams - Tsumeto の方程式 (5) の定常方程式の一つとして導かれる事に注意して置く。以上の背景の説明が明らかになれば、たまたま定理 1 の意味する所は、(2) は常伝導状態に対応する自明な解 $w \equiv 0$ と Flux line に対応する非自明解 $w(r)$ を持つ二つの解がある。又定理 2 の意味する所の初期時刻 $t=0$ で Flux Line の芽が少しでもあれば、時

間がたつにつれて u は完全な Flux Line (2) の特自明解) に整形されてしまう。どこにも Flux Line のまっかたけがない ($u_0(r) \equiv 0$) ならばもちろん何も起らない ($u(r, t) \equiv 0$)。もう一度結論をくり返すと、(1) は 2 つの定常解 0 (定常導状態) と $w(r)$ (Flux Line) を持ちこた以外に定常状態はなく、 u のうち上に述べた意味で、定常導状態は不安定、Flux Line は安定ということが数学的に証明出来るモデルの一つである。

定理 2 の詳しい証明はいずれ発表したいと思ふ、2 冊が、こゝでほんの少しだけ述べた。 (1) にあつて $r=0$, $r=\infty$ が natural という事情から $L>0$ とおいて

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{v^2}{r^2} u + (1-u^2)u & (r, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & t \in (0, \infty) \\ u(r, 0) = u_0(r) & r \in (0, L) \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} w'' + \frac{1}{r} w' - \frac{v^2}{r^2} w + (1-w^2)w = 0 & r \in (0, L) \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0 \\ 0 \leq w(r) \leq 1 & r \in (0, L) \end{cases}$$

という問題と同様に考える。(7), (8) にあつて $r=L$ は regular であつて境界条件として特に Dirichlet 条件を付け

たものと考えたい。 (1), (2) と同時に (7), (8) の結論を
 $L \rightarrow \infty$ としたものを合わせ考えると定理 2 の証明が成
 立つのであるが、 $\therefore$ である。 (1), (2) (7), (8) に対応する基本
 解と Green 函数が次の様に explicit に求まる事を述べようだけ
 にする。

$$(9) \quad e^{-\mu t} U(r, s, t) = e^{-\mu t} \frac{1}{2t} I_\nu\left(\frac{rs}{2t}\right) e^{-\frac{r^2+s^2}{4t}} \quad (\mu > 0)$$

ただし $I_\nu(x)$ は ν 次零形 Bessel 函数の 1 つ。

が (1) に対応する基本解であり。

$$(10) \quad G(r, s; \mu) = \begin{cases} I_\nu(\sqrt{\mu} r) K_\nu(\sqrt{\mu} s) & 0 < r < s \\ I_\nu(\sqrt{\mu} s) K_\nu(\sqrt{\mu} r) & 0 < s < r \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

ただし $K_\nu(x)$ も零形 Bessel 函数の 1 つであり、 $I_\nu(x)$

と共に零形 Bessel 方程の基本解系を成す。

が (2) に対応する Green 函数である。

$$(11) \quad G_L(r, s; \mu) = G(r, s; \mu) - \frac{G(r, L; \mu) G(s, L; \mu)}{G(L, L; \mu)}$$

が (8) に対応する Green 函数である。上式右辺第 2 項が補
 正函数である。その Laplace 逆変換 ($\mu > 0$ とする) を

$U_L^0(r, s, t)$ とすると (9) に対応する基本解 $e^{-\mu t} U_L(r, s, t)$ は

$$\begin{aligned}
 (12) \quad U_L(r, s, t) &= U(r, s, t) - U_L^c(r, s, t) \\
 &= U(r, s, t) - \frac{1}{L^2} U_1^c\left(\frac{r}{L}, \frac{s}{L}, \frac{t}{L^2}\right)
 \end{aligned}$$

補正函数 $U_1^c(r, s, t)$ が詳しくわかれなから U が U_L に近づくにつれて $G(r, 1; \mu) G(s, 1; \mu) / G(1, 1; \mu)$ の Laplace 変換である事から、一般化された Abel の積分方程式の解である。したが、一般化された後述、2 境界連続核を持つ 2 種 Volterra 型積分方程式に帰着する。したが、2 補正函数 $U_1^c(r, s, t)$ の U_L の Resolvent 核を得、2 explicit に表わす事が出来、この事から必要の情報が全て得られる。

参考文献

- [1] Kametaka, Y. : On a nonlinear Bessel equation,
Publ. RIMS Kyoto Univ. 8 (1972) 151-200
- [2] Abrikosov, A. A., : On the magnetic properties of superconductors of the second group, Soviet Physics JETP 5 (1957) 1174-1182
- [3] Ginzburg, V. L. and L. P. Pitaevskii : On the theory of superfluidity, Soviet Physics JETP 7 (1958) 858-861
- [4] Ginzburg, V. L., and L. D. Landau : On the theory of superconductivity (in Russian) Zh. Exper. Teor. Fiz. 20 (1950) 1064-1082
- [5] Abrahams, E. and T. Tsumeto : Time variation of the Ginzburg-Landau order parameter, Phys. Rev. 152 (1966) 416-432