

代数曲線に附随する二，三の解析的構造

本稿は，数理解析研究所の事業の一つとして1964年7月6，7，8日に京都大学で行った講義“超アーベル函数へのステップ”と，そのための予備講義との内容をまとめたものである。まとめるに当つては適当に内容を加えまたは削つたが，主に大学院初級の人を対象にした予備講義（第一章および附録）と，第二，三章とでは多少色合いがちがつてしまつた。

第一章では，代数曲線上のアーベル積分について復習し，その理論即ちアーベル函数の理論が，この代数曲線上の複素直線バンドルの族のパラメーター空間における函数論に，他ならないことを示す。

第二章では，複素多様体の変形・解析的ファイバーバンドルの変形についての，小平・スペンサーの理論を紹介する。〔6〕，〔8〕我々に特に必要なのは§7であつて，第二章の記述全体が§7の定理7.1乃至7.4のためのものである。これらの定理によつて，複素多様体または解析的バンドルの変形族のパラメーター空間に，ある条件の下には複素多様体の構造が入り，この族が解析的な変形族となることが示される。

第三章では，第二章の結果を（主として代数曲線上の）バンドルの族に適用する。§8では Picard 多様体に対し §7 の定理を適用する。§9では複素直線上のアフィン変換群を構造群とするバンドルの族（基底空間は代数曲線）を論ずる。§11は代数曲線の基本群の，既約ユニタリー表現に対応するバンドル族の理論で，M. S. Narasimhan と，C. S. Seshadri の結果〔12〕の紹介である。これは A. Weil が *Généralisation de fonctions abéliennes* (J. Math. Pures Appl. Vol. 17, 1938) において扱つた場合に相当するもので，このバンドル族のパラメーター空間が解析空間としてコンパクト化され，そこに興味ある函数論が展開されうらば，それこそ超アーベル函数論の名にふさわしいものであらう。今の所まだまだそれには至つていない。僅に一つのステップを踏み出した所といえよう。附録として外微分式，調和微分式に関する必要な概念と結果を掲げたが，層に関することは既知とした。これらの詳細は秋月〔1〕又は de Rham〔15〕とWeil〔16〕などから知りうる。

第一章 代数曲線とヤコビ多様体

§ 1 閉リーマン面とその普遍被覆面

閉リーマン面，即ち複素一次元の連結複素多様体 Γ を考えよう。これに対してよく知れている二，三の事実をあげる。その殆んどは岩沢 [5] にみられる。（ Γ はコンパクト）

定理 1.1 Γ 上の有理型函数の全体 K は，複素数体 $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} \ni a \mapsto$ 定数 a に等しい函数) 上の一変数代数函数体をなす。即ち K は定数でない元 z をふくみ， $[K : \mathbb{C}(z)] < \infty$ である。

定理 1.2 K の生成元の系 $z_1, \dots, z_N$ を適当にとれば， $\Gamma \ni x \mapsto (1 : z_1(x) : \dots : z_N(x)) \in P^N(\mathbb{C})$ によつて， Γ は N 次元複素射影空間内に一対一双正則に写像される。従つて Γ は射影空間内の代数曲線とひとしい解析的構造をもつ。

可附号閉曲面の位相幾何からわかるように， Γ の位相的性質はその Genus g によつてきまる。

$g=0$ のとき， Γ はリーマン球面に他ならない。このとき K は有理函数体である。

$g=1$ のとき Γ の普遍被覆面 $\tilde{\Gamma}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ であり，基本群 Π は $\mathbb{C}$ 上に平行移動の群として作用する。従つて Γ は複素円環面に他ならない。 Γ 上の有理型函数とは，($\mathbb{C} = \tilde{\Gamma}$ 上では) 二重周期の有理型函数，即ち楕円函数に他ならない。

$g \geq 2$ のとき， $\tilde{\Gamma}$ は単位円の内部 $\{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\}$ と解析的に同型であり， Π の元は ζ に対しては一次分数変換として作用する。

定理 1.3 Γ の基本群 Π は， $2g$ 個の生成元 $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ で生成され，ただ

$$1 \text{ つの関係 } e = \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) (= a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots \dots \dots$$

$a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1})$ によつてきめられる群である。即ち Π を $a_1, \dots, b_g$ で生成される

自由群, N は $\Pi a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ で生成される正規部分群であるとする, $\Pi \cong F/N$.

系: Γ の genus が g ならば, Γ の 1 次元 Betti 数は $2g$ である。

閉リーマン面上の函数論では, 微分という概念が大切な役目をはたした。 Γ 上の微分 ω とは Γ 上の解析的な 1 次の微分式のことである。(附録 § § A, B 参照) Γ を座標近傍 $\{U_j\}$ で覆い, U_j での解析的局所座標を z_j とすれば, U_j では $\omega = \varphi_j dz_j$, (φ_j は U_j での有理型函数) であつて, $U_j \cap U_k$ では $\varphi_j = \varphi_k \cdot \frac{dz_k}{dz_j}$ となつてゐる。考える点 x が U_j 内にあるとき, φ_j が x において正則なら ω は x において正則であるという。 φ_j が x において 0 または極をもつとき, その位数, x における留数も局所座標に無関係にきまる。

各点で正則な微分は第 1 種であるといわれる。また (慣用には一致しないかも知れないが), Γ の各点で正則かまたは 1 位の極をもち, そのでの留数が整数であるような微分を第 3 種の微分という。

Proposition 1.4 第 3 種微分の極の数は有限で, その留数の総和は 0 にひとしい。

$\tilde{\Gamma}$ を Γ の普遍被覆面とし, $\pi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ をその写像とする。 Π は $\tilde{\Gamma}$ に右から作用するとする。 ω が第 1 種微分であるとき

$$f(\tilde{x}) = \int_{\tilde{0}}^{\tilde{x}} \pi^* \omega \quad (\tilde{x} \text{ は } \tilde{\Gamma} \text{ の動点, } \tilde{0} \text{ は定点})$$

とおくと, $f(\tilde{x})$ は $\tilde{\Gamma}$ 上の正則函数であつて,

$$f(\tilde{x}\sigma) = f(\tilde{x}) + \omega(\sigma). \quad (\omega(\sigma) \text{ は } \tilde{x} \text{ に無関係})$$

がなりたつ。即ち f は加法的函数である。 $\omega(\sigma)$ は σ のきめる homology class における ω の積分 (ω の周期) であり,

$$\omega(\sigma\tau) = \omega(\sigma) + \omega(\tau)$$

がなりたつ。即ち $\Pi \ni \sigma \rightarrow \omega(\sigma) \in \mathcal{C}$ は Π の表現である。逆に $\tilde{\Gamma}$ 上の加法的正則函数の微分は, Γ 上の第 1 種微分となる。

定理 1.5 Γ の genus が g ならば, 第 1 種微分の全体は $\mathbb{C}$ 上に g 次元の vector space をなす。 $\Pi \rightarrow \mathbb{C}$ の表現はすべて上の $\omega(\sigma)$ と $\overline{\omega(\sigma)}$ との結合によつてえられる。

同様に 第 3 種微分 ω に対し,

$$v(\tilde{x}) = \exp \left(\int_{\tilde{0}}^{\tilde{x}} \pi^* \omega \right)$$

を考える。ここに $\tilde{0}$ も積分の道も, ω の極をさけてとるのである。この v は $\tilde{\Gamma}$ 上の有理型函数 ($\neq 0$) で

$$v(\tilde{x}\sigma) \equiv \chi(\sigma) v(\tilde{x})$$

をみたす。即ち v は乗法的函数である。 $\chi(\sigma) = \exp \left(\int_{\sigma} \omega \right)$ であつて χ は $\Pi \rightarrow \mathbb{C}^*$ の表現である。逆に $\tilde{\Gamma}$ 上の乗法的函数 v をとると, $d \log v$ は Γ 上の微分であつて, 第 3 種である。第 3 種微分 ω に対し, 適当な第 1 種微分を加えると, ω の極・留数は不変のまま, その周期がすべて純虚数になるようにできる。従つて第 3 種微分に対し, $\Pi \rightarrow U(1)$ の表現 χ を対応させることができる。

定理 1.6 すべての表現 $\Pi \rightarrow U(1)$ が, 乗法函数の multiplier としてえられる。

第 3 種微分 ω の極のうち, 留数の値が正なるものを $y_1, \dots, y_k$, そこでの留数を $m_1, \dots, m_k$ とし, 留数が負なるものを $z_1, \dots, z_l$, そこでの留数を $n_1, \dots, n_l$ とする。そのとき, 乗法的函数 $v(\tilde{x}) = \exp \left(\int_{\tilde{0}}^{\tilde{x}} \pi^* \omega \right)$ は, $\pi(\tilde{y}) = y_j$ なる

点 $\tilde{y}$ では m_i 位の零点を, $\pi(\tilde{z}) = z_j$ なる点 $\tilde{z}$ では n_j 位の極をもつ。それで Γ 上の因子 $D = \sum_i m_i y_i - \sum_j n_j z_j$ を v の因子という。prop. 1.5 により D の次

数 $n(D) = \sum m_i - \sum n_j$ は 0 である。

定理 1.7 Γ 上の次数 0 の因子 D に対し, D を因子とする乗法関数が, 零でない定数因数を除き, 一つだけ存在する。

*) Γ の点で生成される自由アーベル群の元を Γ の因子という。

§ 2. ヤコビ多様体・ピカル多様体

genus $g (\geq 1)$ の代数曲線 Γ を考える。 Γ 上の第 1 種微分で, $\mathbb{C}$ 上に独立なもの一組 $\omega_1, \dots, \omega_g$ をとる。一方 Γ の一次元 (整係数) ホモロジー群の基底 $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ をとる。 ω_a の γ_j における周期を ξ_{aj} とすると, $(n, 2n)$ 一行列 $E = (\xi_{aj})$ がえられる。これを $\{\omega_a\}$ の周期行列という。 E の列ベクトルを, $\mathbb{C}^g$ のベクトルとみれば, E は $\mathbb{C}^g$ 内の $2g$ 個のベクトルをあたえる。これで生成される $\mathbb{C}^g$ の部分群をも E とかくことにする。

Proposition 2.1 E は $\mathbb{C}^g$ 内で discrete な, rank $2n$ の部分群である。従つて $J = \mathbb{C}^g / E$ は複素円環体である。

定理 2.2 J は複素射影空間内の代数多様体と一対一, 双正則な対応をなす。

定義 J を Γ のヤコビ多様体という。

prop. 2.1 定理 2.2 を証明するには, 附録を援用する。まず $\{\omega_a\}$ の周期行列を E とすれば, $\{\bar{\omega}_a\}$ の周期は行列 $\bar{E}$ をなす。ところが $\omega_1, \dots, \omega_g, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_g$ は Γ 上の 1 次調和微分式の基底をなす。 (§ D の (b), 代数曲線においては, 任意の Hermitian metric が Kähler であり, 1 次調和微分式は metric によらずきまつている。) 従つて de Rham の定理により, $\det \begin{pmatrix} E \\ \bar{E} \end{pmatrix} \neq 0$ でなければならない。これで Prop. 2.1 がわかる。(定理 1.5 もこれと同内容であつた。)

つぎに定理 2.2 を示すには, $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ が $KI(\gamma_i \circ \gamma_{g+j}) = -KI(\gamma_{g+j} \circ \gamma_i) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, g$) をみたすものと仮定してよい。

それは $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ の生成元のとりかえによつて実現でき, それによつて部分群 E は変らない

からである。附録 § A の記号 θ を使えば、

$$\xi_{aj} = \int_{r_j} \omega_a = KI (r_i \circ \theta(\omega_a)) .$$

従つて

$$\theta(\omega_a) = - \sum_{i=1}^n \xi_{a, n+i} r_i + \sum_{j=1}^n \xi_{a, j} r_j .$$

そこで関係式

$$0 = \int_{\Gamma} \omega_a \wedge \omega_\beta = KI (\theta(\omega_a) \circ \theta(\omega_\beta)) ,$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Gamma} (\sum_a v_a \omega_a) \wedge^* (\overline{\sum_a v_a \omega_a}) = \sqrt{-1} \sum_{a, \beta} v_a \bar{v}_\beta \int \omega_a \wedge \bar{\omega}_\beta \\ &= \sqrt{-1} \sum v_a \bar{v}_\beta KI (\theta(\omega_a) \circ \theta(\bar{\omega}_\beta)) . \end{aligned}$$

を $\xi, \bar{\xi}$ でかいてみれば、

$$EJ E^t = 0 , \quad -\sqrt{-1} EJ E^t > 0$$

がえられる。§ F の定理により、 J は射影空間内に一対一、双正則に写像できる。

J の性質を一、二挙げると、

定理 2.3 o を Γ の定点とすると、写像 $\lambda: \Gamma \ni x \rightarrow \mu(x) = \left(\int_0^x \omega_a \right) \bmod E$

$\in J$ は Γ から J 内への正則な写像である。 Γ から任意の複素円環体 T 内への任意の解析的写像 μ は、 $\mu(x) = \rho \circ \lambda(x) + \mu(0)$, ρ は $J \rightarrow T$ の (複素リ一群としての) 準同型写像、とかける。

定理の後半は、 $T = \mathcal{C}^q / D$ とかき、 $\mathcal{C}^q$ の座標を $u_1, \dots, u_q$ とするとき、 $\mu^*(du_\beta)$ が Γ 上の第一種微分になることからわかる。

定理 2.4 Γ 上の次数 0 の因子の群を $\widehat{\mathcal{G}}_a$ とし、 $\widehat{\mathcal{G}}_a$ から J への写像 ϕ

$$\widehat{\mathcal{G}}_a \ni D = \sum y_j - \sum z_j \rightarrow \phi(D) = \left(\sum_j \int_{z_j}^{y_j} \omega_a \right) \bmod E$$

を考えると、これは $\widehat{\mathcal{G}}_a$ から J 上への準同型で、その Kernel は $\widehat{\mathcal{G}}_l = \{D \mid D = (f), f \text{ は } \Gamma \text{ 上の有理関数}\}$ に他ならない。 (f) は関数 f の因子である。（§ 1 での乗法関数の因子と同じように理解される。）

この定理の内容は代数函数論におけるアーベル定理に他ならない。

この J に別の解釈を与えることを述べたいのであるが (§ 3)、そのために n 次元射影的代数多様体に拡張しておく方が都合がよい。

X^n を複素射影空間内の代数的多様体とし、附録 § D で導入した標準的な Kähler metric を入れる。そこでのように $\theta(\mathcal{Q}) = Y$ とおく。

$H_1(X, \mathbb{R})$ の基底 $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}$

$H_{2n-1}(X, \mathbb{R})$ の基底 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2q}$

を、それぞれ整係数サイクルの類からとり、 $KI(\gamma_i, \Gamma_j) = \delta_{ij}$ であるようにとる。

X 上の型 $(1, 0)$ の調和微分式の基底を $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ とすると、

$\varphi_1, \dots, \varphi_q, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_q$ は 1 次調和微分式の基底、

$^*\varphi_1, \dots, ^*\varphi_q, ^*\bar{\varphi}_1, \dots, ^*\bar{\varphi}_q$ は $(2n-1)$ 次調和微分式の基底である

(§ D)。

そこで $\{\varphi_a\}, \{^*\varphi_a\}$ の、 $\{\gamma_j\}, \{\Gamma_j\}$ に関する周期行列をそれぞれ E, E'

とする。即ち

$$\xi_{aj} = \int_{\gamma_j} \varphi_a, \quad \xi'_{aj} = \int_{\Gamma_j} ^*\varphi_a$$

定理 2.5 複素円環体 $\mathcal{A} = \mathcal{C}^q / \mathcal{E}$, $\mathcal{P} = \mathcal{C}^q / \mathcal{E}'$ は射影的代数多様体である。

(証明) 代数曲線の場合と同様にして, $\theta(\varphi_\alpha) = \sum_j \xi_{\alpha j} \Gamma_j$ であることがわかる。

$$\text{一方 } \varphi_\beta = -\sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} L^{n-1} \varphi_\beta \text{ から}$$

$$\begin{aligned} \theta * \varphi_\beta &= -\sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_j \xi_{\beta j} Y^{n-1} \circ \Gamma_j \\ &= -\sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j,k} \xi_{\beta j} C_{jk} \gamma_k. \end{aligned}$$

ここに $C_{jk} = KI(Y^{n-1} \cdot \Gamma_j \cdot \Gamma_k)$ で, これは整数, かつ $C_{jk} = -C_{kj}$ である。

しかも各のおのの γ_j に対し $\theta^1(\gamma_j)$ が $(2n-1)$ 次調和微分式で代表され, 後者は

$L^{n-1} \varphi$, $L^{n-1} \bar{\varphi}$ の 1 次結合から, γ_j は $Y^{n-1} \circ \Gamma_k$ の 1 次結合となる。これから $C = (C_{jk})$ は正則な行列であることを知る。さて

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X \varphi_\alpha \wedge * \varphi_\beta = -\sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} KI \left(\sum_i \xi_{\alpha i} \Gamma_i \circ \sum_j \xi_{\beta j} C_{jk} \gamma_k \right) \\ &= -\sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} (\mathcal{E} C \mathcal{E})_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

および, $\varphi = \sum u_\alpha \varphi_\alpha$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int \varphi \wedge \bar{\varphi} = \sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum K I \left(\sum_i \xi_{\alpha i} \Gamma_i \circ \sum_{j,k} \xi_{\beta j} C_{jk} \gamma_k \right) \\ &\quad \times u_\alpha \bar{u}_\beta = -\sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\alpha, \beta} (\mathcal{E} C^t \bar{\mathcal{E}})_{\alpha\beta} u_\alpha \bar{u}_\beta \end{aligned}$$

から, E は C を principal matrix とする Riemann 行列である。

同様に $\xi'_{aj} = \int_{\Gamma_j} * \varphi_a$ を計算すれば, $E' = \sqrt{-1} \frac{1}{(n-1)!} EC$ がえられる。

従つて E' は C^{-1} (の適当な整数倍) を principal matrix とする Riemann 行列である。

定義 $A, \mathcal{P}$ をそれぞれ X の Albanese 多様体, Picard 多様体という。

$\mathcal{P}$ の定義は X 上の metric のとり方によるように見えるが, 実は X の複素構造だけからきまるのである。それはつぎの prop. 2.6 からわかるが, Weil [16] に従えばもつと elegant であろう。ここでは微分式の周期という初等的な考えを生かすために, このような記述をした。

X の次元 n が 1 のときは, $A, \mathcal{P}$ は J と一致するが, 一般には両者は違う円環体 (互に双対的な円環体) である。そして定理 2.3 は A に対し, 定理 2.4 は $\mathcal{P}$ に対して拡張される。

Proposition 2.6 X 上の $(0, 1)$ 型調和微分式の空間を $\bar{A}$ とかき,

$$D = \left\{ \bar{\psi} \in \bar{A} \mid \int_{\gamma} (\bar{\psi} - \psi) \equiv 0 \pmod{\sqrt{-1} \mathbb{Z}} \text{ for } \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z}) \right\}$$

とおけば, $\mathcal{P} \cong \bar{A}/D$ (複素円環体として同型) である。

(証明) 従来の記号をそのまま使うことにする。 $\bar{A}$ の基底として $\sqrt{-1} \bar{\varphi}_1, \dots,$

$\sqrt{-1} \bar{\varphi}_q$ をとり, $\bar{\psi} = \sqrt{-1} \sum_a \bar{t}_a \bar{\varphi}_a$ が D に属する条件を書きあらわしてみる。

$\psi = \sqrt{-1} \sum_a \bar{t}_a \varphi_a$ であるからこの条件は,

$$\int_{\gamma_j} (\bar{\psi} - \psi) = \sqrt{-1} \sum_a (\bar{t}_a \xi_{aj} + t_a \bar{\xi}_{aj}) \equiv 0 \pmod{\sqrt{-1} \mathbb{Z}},$$

即ち

$$(t_1 \dots t_q \bar{t}_1 \dots \bar{t}_q) \begin{pmatrix} \bar{E} \\ E \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$$

ところが定理 2.5 の証明に出てきたように,

$$\begin{pmatrix} \bar{E} \\ E \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} {}^t E & {}^t \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} H \\ \sqrt{-1} \bar{H} & 0 \end{pmatrix}, \quad (H > 0)$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} \bar{E} \\ E \end{pmatrix}^{-1} = C \begin{pmatrix} {}^t E & {}^t \bar{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \bar{H}^{-1} & 0 \\ 0 & +\sqrt{-1} H^{-1} \end{pmatrix}$$

となる。従つて上の条件をみたす行ベクトル $(t, \bar{t})$ は, この式の右辺の行ベクトルの整係数一次結合に他ならない。列ベクトル ${}^t(t_1, \dots, t_q)$ についていえば, それは

$-\sqrt{-1} H^{-1} \cdot {}^t E C = (n-1)! H^{-1} \cdot {}^t E$ の列ベクトルの整係数結合ということになる。
 $(n-1)! H^{-1}$ は複素ベクトル空間 $\mathcal{C}^q$ での複素同型をあらわすにすぎないから $\mathcal{P} \cong \bar{A}/D$ をうる。

§ 3. 複素直線バンドルと Picard 多様体

$\mathcal{C}^* = GL(1, \mathcal{C})$ を構造群とし, $\mathcal{C}$ をファイバーとする解析的なファイバーバンドルを複素直線バンドルという。代数多様体 X の基本群 Π から $\mathcal{C}^*$ への表現 χ があるときは, これに対応して複素直線バンドルがつぎのように定まる: $\tilde{X}$ を X の普遍被覆空間とすると $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ は, X 上 Π を構造群とする主バンドルである。 $\tilde{X} \times \mathcal{C}$ において, $(\tilde{x}\sigma, \xi) \sim (\tilde{x}, \chi(\sigma)\xi)$ によつて同値関係を入れ, これによる商空間を B とすると, B は X 上の複素直線バンドルとなる。これを表現 χ に対応するバンドルという。当然 $\pi^* B$ は $\tilde{X}$ 上の直積バンドルである。

一般に X が多様体, Π が (discrete な又は Lie-) 群で, $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ が X 上の Π -主バンドル, G が別に与えられた群なるとき, X 上の G -主バンドル F で $\pi^* F = \tilde{X} \times G$ なるものは, “ $\tilde{X} \times \Pi \rightarrow G$ の factor” の同値類と一対一に対応する。factor とは $\tilde{X} \times \Pi \rightarrow G$ の写像 f であつて

$$f(\tilde{x}, \sigma\tau) = f(\tilde{x}, \sigma) \cdot f(\tilde{x}\sigma, \tau)$$

をみたすもののことである。二つの factors f, g が同値であるとは, $\tilde{X} \rightarrow G$ の写像 φ があつて,

$$g(\tilde{x}, \sigma) = \varphi(\tilde{x})^{-1} f(\tilde{x}, \sigma) \varphi(\tilde{x}\sigma)$$

となることである。

factor f が与えられたとき、 $\tilde{X} \times G$ 内で同値関係 $(\tilde{x}, \xi) \sim (\tilde{x}\sigma, f(\tilde{x}, \sigma)^{-1}\xi)$ を考え、その商空間を F とすると、 F は X 上の G -主バンドルとなり、 $\pi^* F = \tilde{X} \times G$ となる。この構成によつて、上の主張がなりたつことは容易にわかる。ここにバンドルを複素解析的なものとするならば、 f や φ もすべて複素解析的な写像とすればよいのである。

特に factor f が $\tilde{x}$ に無関係ならば、 f は $\Pi \rightarrow G$ の準同型である。上記基本群の表現に対応するバンドルはこの場合の例である。

そこで射影的代数多様体 X 上で基本群 Π の表現 $\Pi \rightarrow \mathcal{C}^*$ を考える。 $\mathcal{C}^*$ は可換であるから、 χ は $\Pi / [\Pi, \Pi] = H_1(X, \mathbb{Z})$ から $\mathcal{C}^*$ への表現と考えてよい。

$H_1(X, \mathbb{Z})$ の torsion 部分上では trivial であるような表現を考える。このような表現は special であるという。 χ が special なら X は適当な第一種 1 次微分 $\bar{\omega}, \theta$ を使つて、

$$\chi(\gamma) = \exp \left(2\pi \int_{\gamma} (\bar{\omega} + \theta) \right)$$

とかける。 $\tilde{X}$ 上の正則函数 $\varphi(\tilde{x}) = \exp \left(2\pi \int_{\tilde{0}}^{\tilde{x}} (\theta') \right)$ によつて、 χ を同値

な factor に変換すると、 χ は表現 $\exp \left(2\pi \int_{\gamma} \bar{\omega} \right)$ とも、ユニタリー表現

$$\chi'(\gamma) = \exp \left(2\pi \int_{\gamma} (\bar{\omega} - \omega) \right)$$

とも同じ複素直線バンドルを定め、ことなるユニタリー表現はことなるバンドルを定めることがわかる。

これから、考えている種類のバンドルは $\bar{A}/D \cong \mathcal{P}$ と自然な一対一の対応をなしていることがわかる。即ち、 X の Picard 多様体とは、 X の基本群の $\mathcal{C}^*$ 内への special な表現に対応するバンドルの族を parametrize して、そのパラメーター空間に複素構造を入れたものに他ならないことがわかる。(この parametrization の自然さについ

ては § 8 で論ずることにする。)

附記 すべての表現に対応するバンドルの族が $\mathcal{P}$ であるかのような錯覚におちいつたので、講義でそのように話してしまつた。(ここと違つた扱いをしたので、誤りが目立たなかつたのである。)

special な表現は、すべての表現の群の中で有限位数の部分群をなすから、すべての表現に対応するバンドルの族は、有限個の $\mathcal{P}$ の直和集合で parametrize されるわけである。

X が代数曲線の場合は $H_1(X, \mathbb{Z})$ に torsion がないから、special と non-special との区別はおこらない。

第二章 複素構造の変形

§ 4. 定義, 基本補題

微分多様体 $\mathcal{V}$, M と、写像 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ とがあつて、つぎの条件がなりたつとする。

- (i) $\tilde{\omega}$ は M 上への C^∞ 写像
- (ii) $\tilde{\omega}$ の Jacobian の rank はつねに $m = \dim M$ にひとしい。
- (iii) M の任意の点 t に対しその近傍 U があつて、

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & X \times U \\ \tilde{\omega} \downarrow & \xrightarrow{id} & \downarrow \\ U & & U \end{array}$$

が可換となるような diffeomorphism ϕ がある。ここに X は一つの微分多様体である。この際 $t \in M$ に対し $V_t = \tilde{\omega}^{-1}(t)$ が $\mathcal{V}$ の閉部分多様体で X に diffeomorphic なことは明らかである。 X がコンパクトなときは、(i) (ii) および (iii)' : $\tilde{\omega}$ は proper から (iii) が導かれる。

以下この章では M は連結であるとする。

定義 4.1 上の条件をみたす $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ において, さらにつぎの条件がなりたつとき,
 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ は M をパラメーター空間とする複素多様体の可微分 (変形) 族であるという。

(a) M の各点 t に対し, $V_t = \tilde{\omega}^{-1}(t)$ は複素多様体である。

(b) $\mathcal{V}$ の各点 p に対し, その近傍 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}$ における複素数値関数 $z^1, \dots, z^n$ および実数値関数 $t^1, \dots, t^m$ があつて

$(\operatorname{Re} z^\alpha, \operatorname{Im} z^\beta, t^\lambda)$ は $\mathcal{U}$ における C^∞ 局所座標

$(z^1, \dots, z^n)$ は $V_t \cap \mathcal{U}$ における V_t の解析的局所座標

$(t^1, \dots, t^m)$ は $\tilde{\omega}(\mathcal{U})$ 上の函数で, そこでの M の局所座標

である。

実際 $\{V_t\}_{t \in M}$ は一つの微分多様体 X に入れた複素構造の一系列である。 (z^α, t^λ) を admissible な局所座標系ということにする。

定義 4.2 二つの変形族 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M, \tilde{\omega}': \mathcal{V}' \rightarrow M'$ において,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{V}' \\ \tilde{\omega} \downarrow & & \downarrow \tilde{\omega}' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array}$$

が可換であるような diffeomorphisms Φ, φ があつて, Φ は V_t を $V'_{\varphi(t)}$ 上に解析的同型に写すならば, $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ は同値な族であるという。

定義 4.3 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ と $V_{t_0} \rightarrow t_0$ との間に

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & V_{t_0} \\ \tilde{\omega} \downarrow & & \downarrow \tilde{\omega} \\ M & \xrightarrow{\text{const. map}} & t_0 \end{array} \quad (\text{可換})$$

なる C^∞ 写像 Φ があつて, 各 V_t が V_{t_0} に解析的同型に写されるならば, $\mathcal{V} \rightarrow M$ は trivial な族だという。

定義 4.4 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$, $\tilde{\omega}': \mathcal{V}' \rightarrow M'$ において,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{V}' \\ \tilde{\omega} \downarrow & & \downarrow \tilde{\omega}' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array} \quad (\text{可換})$$

であるような C^∞ 写像 Φ, φ があつて $V_t \cong V'_{\varphi(t)}$ (解析的) であるとき, $\mathcal{V} \rightarrow M$ は写像 $\varphi: M \rightarrow M'$ によつて $\mathcal{V}' \rightarrow M'$ から induce される変形族であるという。

$\mathcal{V}, M, \tilde{\omega}, \Phi, \varphi$ 等を複素多様体と解析的写像のカテゴリーで考えるとき, 上と同様にして, 解析的な変形族, 解析的に同値な変形族, 解析的に trivial な変形族などの概念がえられる。

定義 4.5 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ なる manifolds と写像とがあつて,

$\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ は複素多様体の C^∞ 変形族 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ は C^∞ ファイバー・バンドルで, 構造群とファイバーとは複素解析的, $t \in M$ に対しその上の部分 $B_t \rightarrow V_t$ は解析的ファイバー・バンドルとなつているとき, この系は $(\mathcal{V} \rightarrow M \text{ 上の})$ 解析的ファイバー・バンドルの C^∞ 変形族であるという。

$\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ を複素多様体の C^∞ 変形族とする。(以下, ファイバーを除いては, すべてコンパクトな複素多様体の族を考える。) $\mathcal{V}$ の接バンドル $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ は, 各 V_t にそつての接ベクトルのバンドル $\mathcal{F}_1$ と, $\mathcal{T}(M)$ の逆像 $\tilde{\omega}^* \mathcal{T}(M)$ とから, extension をしてえられる:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{V}) \rightarrow \tilde{\omega}^* \mathcal{T}(M) \rightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

各 V_t が複素多様体だから, $\mathcal{F}_1$ は holomorphic な接ベクトルのバンドル $\mathcal{F}$ と,

anti-holomorphic なものとの直和にわかれる。 $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ の中で, $\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\lambda}$ の一次結合である接ベクトルの全体 $\mathcal{E}$ をとつて,

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\omega}^* \mathcal{T}(M) \rightarrow 0$$

なる exact sequence ができる。

admissible coordinates $(z_j^\alpha, t_j^\lambda)$ ($\mathcal{U}_j$ において) を使つて書けば, $\mathcal{E}$ のベクトルは $\sum_\alpha \theta_j^\alpha \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum_\lambda v_j^\lambda \frac{\partial}{\partial t_j^\lambda}$ であらわされ, $v_j^\lambda = 0$ なるベクトルが $\mathcal{F}$ に属する。

$\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ では

$$(4.2) \quad \begin{cases} z_j^\alpha = g_{jk}^\alpha(z_k, t_k) \\ t_j^\lambda = t_{jk}^\lambda(t_k) \end{cases} \quad (g \text{ は } z \text{ につき正則})$$

であるから, (θ_j, v_j) と (θ_k, v_k) との関係は

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} \theta_j^\alpha \\ v_j^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial z_k^\beta} & \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} \\ 0 & \frac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k^\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^\beta \\ v_k^\mu \end{pmatrix}$$

で与えられる。

バンドルの変形族 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ に対してもこれを記述するのに都合のよい接バンドルを考えよう。そのため $\mathcal{B}$ を, 対応する principal bundles の族 $\mathcal{P}$ でおきかえて $\mathcal{P} \xrightarrow{p} \mathcal{V} \xrightarrow{\tilde{\omega}} M$ を考える。

変形族 $\mathcal{P} \rightarrow M$ に対して (4.1) を書けば

$$0 \rightarrow (\mathcal{P}/M) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{P}) \rightarrow (\tilde{\omega} \circ p)^* \mathcal{T}(M) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

がえられる。一方 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$ においてファイバーにそっての接ベクトルを考えれば

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}/M) \rightarrow p^* \mathcal{F}(\mathcal{V}/M) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

がえられる。

$\mathcal{P}$ は G を構造群とする主バンドルであるから, G は $\mathcal{P}$ 上に右から作用しており, その作用は faithful で, $\mathcal{P}$ の各のファイバー上で transitive である。そこで $\mathcal{E}(\mathcal{P}) \ni (x, v), (x', v')$ に対し

$$(x, v) \sim (x', v') \iff \exists g \in G, \begin{cases} x' = xg \\ v' = dg \cdot v \end{cases}$$

(dg は g の作用に伴う, 接空間の写像) によつて $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ に同値関係を入れると, これによる商空間 $\mathcal{R} = \mathcal{E}(\mathcal{P})/G$ は $\mathcal{P}/G = \mathcal{V}$ 上のベクトル・バンドルとなる。この際

$\mathcal{F}(\mathcal{P}/M)$, $\mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V})$ も G で不変で, 上の同値関係により $\mathcal{V}$ 上のベクトル・バンドル $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ を生ずる。 $\mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V})$ は $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$ の各ファイバー ($\cong G$) 上では, 左不変 holomorphic vector field (即ち G の Lie algebra $\mathfrak{g}$) をファイバーとする直積バンドルに

なっている。これを G の元 g でうつすことを考えると、 $\mathcal{F}(P/V)$ 上では $dg = Ad(g^{-1})$ となる。従つて $\mathcal{L}$ は、 $\mathcal{F}$ をファイバーとし、作用 Ad によつて、 $P \rightarrow V$ に associate された、 $(V$ 上の) バンドルである。

$(\tilde{\omega} \circ p)^* \mathcal{F}(M)/G$ は明らかに $\tilde{\omega}^* \mathcal{F}(M)$ に他ならない。従つてつぎの commutative exact diagram をうる。

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \tilde{\omega}^*(M) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{R} & \rightarrow & \tilde{\omega}^*(M) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{L} & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

admissible coordinate system $\{\mathcal{U}_j\}$ に関して、バンドル $\mathcal{R}$ を local product representation で表わしておこう。 $\mathcal{U}_j$ 上で $\mathcal{P}$ は直積だとする： 即ち $p^{-1}(\mathcal{U}_j) \rightarrow \mathcal{U}_j \times G$ 。そうすれば $p^{-1}(\mathcal{U}_j)$ の点は座標 (z_j, t_j, g_j) で与えられる。

$$\mathcal{U}_j \times G \ni (z_j, t_j, g_j) \sim (z_k, t_k, g_k) \in \mathcal{U}_k \times G$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_j^\alpha = g_{jk}^\alpha(z_k, t_k) \\ t_j^\lambda = t_{jk}^\lambda(t_k) \\ g_j = G_{jk}(z_k, t_k) g_k. \end{cases}$$

G 上の左不変 Maurer-Cartan forms の基底 $(\omega^1, \dots, \omega^N)$ とそれに双対的な $\mathcal{F}$ の基底 $(l_1, \dots, l_N)$ とをきめておく。 $(N = \dim_G G)$

$$\mathcal{U}_j \times G \text{ の接ベクトル } l_a, \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t_j^\lambda} \text{ と, } \mathcal{U}_k \times G \text{ の接ベクトル } l_b, \frac{\partial}{\partial z_j^\beta}, \frac{\partial}{\partial t_k^\mu}$$

との間は、上の関係により

$$\begin{cases} l_a = l_a \\ \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} = \sum_a \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial z_k^\beta} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum \langle G_{jk}^* \omega^a, \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \rangle (ad(\bar{g}_k^{-1}) l_a) \\ \frac{\partial}{\partial t_k^\mu} = \sum_\lambda \frac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k^\mu} \frac{\partial}{\partial t_j^\lambda} + \sum_\alpha \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum \langle G_{jk}^* \omega^a, \frac{\partial}{\partial t_k^\mu} \rangle (ad(\bar{g}_k^{-1}) l_a) \end{cases}$$

によつて結びつけられる。これは一つの函数 $F(z_j, t_j, g_j) = F(g_{jk}(z_k, t_k),$

$t_{jk}(t_k), G_{jk}(z_k, t)g_k)$ に接ベクトルを作用させればわかる。従つて, $\mathcal{E}(\mathcal{P}/M)$

のベクトル $\sum_a u_j^a l_a + \sum_\alpha \theta_j^\alpha \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum_\lambda v_j^\lambda \frac{\partial}{\partial t_j^\lambda}$ の成分については transition relation

$$\begin{pmatrix} u_j^a \\ \theta_j^\alpha \\ v_j^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_N & ad(g_k^{-1}) \langle G_{jk}^* \omega^a, \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \rangle & ad(g_k^{-1}) \langle G_{jk}^* \omega^a, \frac{\partial}{\partial t_k^\mu} \rangle \\ 0 & \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial z_k^\beta} & \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} \\ 0 & 0 & \frac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k^\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^b \\ \theta_k^\beta \\ v_k^\mu \end{pmatrix}$$

がなりたつ。^{*)} $\mathcal{R} = \mathcal{E}(\mathcal{P}/M) / G$ は, $\mathcal{P}$ の点 $y_j = \phi_j^{-1}(z_j, t_j, e)$ と y_k

$= \phi_k^{-1}(z_k, t_k, e) = y_j \cdot G_{jk}(z, t)$ とにおけるベクトルを同一視してえられるのであつ

た。従つて $\mathcal{R}$ は transition matrix

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} Ad(G_{jk}) & Ad G_{jk} \langle G_{jk}^* \omega^a, \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \rangle & ad G_{jk} \langle G_{jk}^* \omega^a, \frac{\partial}{\partial t_k^\mu} \rangle \\ 0 & \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial z_k^\beta} & \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} \\ 0 & 0 & \frac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k^\mu} \end{pmatrix}$$

) $G_{jk}^ \omega$ は, $G_{jk}: U_j \cap U_k \rightarrow G$ における ω の逆像をあらわす。

によつて与えられる。 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ がどのように与えられるかは、これからすぐ判る。

変形族におけるコホモロジーを微分式特に調和微分式であらわす必要がある。

$\bar{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ があるとき、既出のバンドル $\mathcal{F}$ に双対的な $\mathcal{F}^*$ およびそれに複素共役な $\overline{\mathcal{F}}^*$ を考え、それらの外積バンドル $(\wedge^r \mathcal{F}^*) \wedge (\wedge^s \overline{\mathcal{F}}^*) = \mathcal{F}^*(r, s)$ を考える。

定義 4.6 $\beta \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ が $\mathcal{V}$ 上の解析的ベクトル・バンドルの族であるとき、 $\beta \otimes \mathcal{F}^*(r, s)$ の C^∞ -section を、 $\mathcal{V}$ 上ファイバーにそつての、型 (r, s) の $(C^\infty-)\beta$ -微分式という。 β が $\mathcal{C}$ をファイバーとする直積バンドルの時、単に(ファイバーにそつての)微分式という。

(4.1)に双対的なバンドルの exact sequence を考えれば、ファイバーにそつての β -微分式とは、 $\mathcal{V}$ 上の通常の意味での微分式を modulo dt で考えたものに他ならない。あるいは t をパラメーターとする V_t 上の B_t -微分式の族に他ならない。

各ファイバー上では微分式に対し、 d_t, d'_t, d''_t なる演算が定義されており、 d''_t は β_t -微分式に対しても意味がある。 $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in M}$ がファイバーにそつての微分式 [β -微分式] ならば、 $\{d_t \varphi_t\}_{t \in M}, \{d'_t \varphi_t\}_{t \in M}, \{d''_t \varphi_t\}_{t \in M}$ [β -微分式については $\{d''_t \varphi_t\}_{t \in M}$ だけ]も、 $\mathcal{V}$ 上ファイバーにそつての微分式 [β -微分式]であつて、それぞれ $d\varphi, d'\varphi, d''\varphi$ であらわされる。

型 (r, s) の $C^\infty \beta$ -微分式の $(\mathcal{C}-)$ 加群を $A^{r,s}(\beta)$ とかく。また β の C^∞ 切断面で、各 V_t 上では正則なもの芽からなる層を $\mathcal{O}(\beta)$ とかく。 V_t の上への“restriction r_t ”を考えると、 $A^{r,s}(\beta) \longrightarrow A^{r,s}(B_t), \mathcal{O}(\beta) \longrightarrow \Omega(B_t)$ なる写像がえられる。ここで後者の restriction とは、“函数の restriction をとつてその芽を考える”という意味であつて、 r_t は層の restriction map ではない。

以下でもこの意味の restriction を考える。

$\{\sum_s A^{r,s}(\beta), d''\}$ は chain complex をなす。そのコホモロジーに関して Dolbeault の定理 (附録 § E) の拡張がなりたつ。即ち

補題 4.1

$$\begin{array}{ccc}
H^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}(\beta)) & \cong & H^q(\sum_s A^{0,s}(\beta), d'') \\
\downarrow & & \downarrow \tau_t \\
H^q(V_t, \Omega(B_t)) & \cong & H^q(\sum A^{0,s}(B_t), d_t'')
\end{array}$$

なる commutative diagram がなりたつ。

つぎに $\mathcal{V}$ 上に metric を導入する: $\mathcal{E}$ の構造群を $U(m) \times O(m)$ に reduce させると, それは $\mathcal{V}$ 上の Riemann metric で, 各 V_t 上では Hermitean なるものをきめたことになる。これによつて V_t 上の微分式 φ_t, ψ_t に対し $*$, 内積 $(\varphi_t, \psi_t)_{V_t}$ が定義される。 $\mathcal{V}$ 上のファイバーにそつての微分式 $\varphi = \{\varphi_t\}$ に対して $*\varphi = \{*\varphi_t\}$ はやはり $\mathcal{V}$ 上の微分式で, φ, ψ の内積は $(\varphi, \psi) = \int_M (\varphi_t, \psi_t)_{V_t} dM$ (dM は M 上の体積要素) によつて定義される。 β -微分式の場合も B_t 上の metric を t について C^∞ になつて, 附録 § E と同様にして内積を定義する。

β -微分式に対して d'' の形式的な adjoint を $\mathcal{A}$ とかく。(即ち $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_t\}$ で, $\mathcal{A}_t$ は附録 § D, § E のように定義される)。今は各の V_t がコンパクトな場合を考えているから, は真の意味で d'' の adjoint になる。

$$\square = d' \mathcal{A} + \mathcal{A} d' \quad (= \{\square_t\}, \square_t = d_t' \mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t d_t')$$

に関して調和微分式の理論を考えたい。

各の V_t 上では型 (r, s) の B_t -調和微分式の加群 $\mathcal{H}_t(r, s)$ は有限次元であつて, B_t -微分式の Hilbert 空間において $\mathcal{H}_t(r, s)$ への射影作用素 $H_t(r, s)$ と Green の作用素 $G_t(r, s)$ とがあつて

$$\varphi_t = H_t(r, s) \varphi_t + \square_t G_t(r, s) \varphi_t$$

なる分解がなりたつ。(附録 § E)。問題は $\varphi = \{\varphi_t\}$ が C^∞ β -微分式の時, $\{H_t \varphi_t\}, \{G_t \varphi_t\}$ が t に関して C^∞ になるかどうかである。

基本補題 4.2 $\dim \mathcal{H}_t(r, s)$ が t に無関係ならば,

$\varphi = \{\varphi_t\}$ が型 (r, s) の $C^\infty \beta$ -微分式 なるとき $H_t(r, s) \varphi_t, G_t(r, s) \varphi_t$ も t に関し C^∞ になる。

補題 4.3 $\dim \mathcal{H}_t(r, s)$ が t に無関係なとき、型 (r, s) の β -微分式に対する作用素 $H(r, s), G(r, s)$ があつて、 C^∞ 微分式を C^∞ 微分式にうつし、

$$\square H(r, s) \varphi = 0$$

$$\varphi = H(r, s) \varphi + \square \cdot G(r, s) \varphi$$

となる。

注意: φ が C^∞ であれば既出の $(\varphi, \varphi) = \int_M (\varphi_t, \varphi_t) dM$ が収束しなくても、 $H(r, s), G(r, s)$ は定義されている。 H, G の存在を示すには、 M 上でコンパクトな台をもつ 1 の分割 $1 = \sum \rho_i$ を考えておいて、 $\sum_i H(\rho_i \varphi) = H\varphi$ 、 $\sum_i G(\rho_i \varphi) = G\varphi$ とおけばよい。

補題 4.4 同じ仮定の下に $\mathcal{H}(r, s) = \{ \varphi \in A^{r, s}(\beta) \mid \square \varphi = 0 \}$ とおけば、

$$\mathcal{H}(r, s) \cong H^s(\sum_q A^{r, q}(\beta), d'')$$

$$r_t \downarrow$$

$$r_t \downarrow$$

$$\mathcal{H}_t(r, s) \cong H^s(\sum_q A^{r, q}(B_t), d_t'')$$

なる commutative diagram がなりたち、 r_t は surjective である。

補題 4.5 同じ仮定の下に、 $\mathcal{H}_t(r, s)$ の基底が、(与えられた t_0 の近傍で) t に関し C^∞ にとれる。 $\bigcup_{t \in M} \mathcal{H}_t(r, s)$ は M 上の C^∞ ベクトル・バンドルをなし、 $\mathcal{H}(r, s)$ の元はその C^∞ cross section に他ならない。

これらは補題 4.3 からすぐ出てくる。基本補題 4.2 の証明は Kodaira-Spencer [7] にまかせる。なおそこにおける重要な結果を二、三引用しておく。

基本補題 4.6 $t_0 \in M$ に対し、その近傍において、

$$\dim H^q(V_t, \Omega(B_t)) \leq \dim H^q(V_{t_0}, \Omega(B_{t_0}))$$

がなりたつ。

基本補題 4.7 $\dim H^1(V_t, \Omega(B_t))$ が t に無関係なら、 $\dim H^0(V_t, \Omega(B_t))$

も t に無関係である。

複素解析的な変形族の場合には、つぎの事実がなりたつ。(Kodaira-Spencer [6],
定理 18,

基本補題 4.8 $\beta \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ が解析的ベクトル・バンドルの複素解析的な変形族なるとき,
 $\dim H_t^0(V_t, \Omega(B_t))$ が t に無関係ならば, $H_t^0(V_t, \Omega(B_t))$ の基底が (与えられ
た t_0 に対しそのある近傍で) t に関し正則になるようにとれる。

§ 5 Fundamental sheaves, local triviality

変形族 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ があるときバンドルの列

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\omega}^* \mathcal{F}(M) \rightarrow 0$$

を考える。 $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ の C^∞ -cross section で、各 V_t 上では正則になるものの芽が作る層を Θ, Ψ とする。 $\Lambda = \Psi / \Theta$ とおくと、

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow \Psi \rightarrow \Lambda \rightarrow 0$$

は exact である。

T_M を、 M の接バンドル $\mathcal{T}(M)$ の C^∞ cross section の芽の層とする。これは M 上の層であるが、 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ における T_M の逆像を T とする。 T は Λ の subsheaf とみられ、ファイバー V_t 上では “constant である” ような、 V_t への normal vector field の芽の層とみてよい。 $\Psi \rightarrow \Lambda$ における T の逆像を Π とすると、層の完全列

$$(5.1) \quad 0 \rightarrow \Theta \rightarrow \Pi \rightarrow T \rightarrow 0$$

がえられる。これを $\mathcal{V} \rightarrow M$ に対する fundamental sheaves の完全列という。

局所座標系 $(z_j, t_j), (z_k, t_k) \dots$ に関して書けば、 Π の元は $\sum \theta_j^\alpha (z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$
 $+ \sum \nu_j^\lambda (t_j) \frac{\partial}{\partial t_j^\lambda}$ であらわされ、座標のとりかえに関し成分は (4.3) によつて変換される。即ち

$$\begin{cases} \theta_j^\alpha(z_j, t_j) = \sum_{\beta} \frac{\partial g_{jk}^\alpha(z_k, t_k)}{\partial z_k^\beta} \theta_k^\beta(z_k, t_k) + \sum_{\mu} \frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} v_k^\mu(t_k) \\ v_j^\lambda(t_j) = \sum_{\mu} \frac{\partial t_j^\lambda}{\partial t_k^\mu} v_k^\mu(t_k) \end{cases}$$

このような特別な形の vector field を考える理由はつぎのとおりである。

Proposition 5.1 $\pi \in \Gamma(\mathcal{V}, \Pi)$ が与えられたとき, N を M 内で relatively compact な開集合とすると, $\varepsilon > 0$ と, $-\varepsilon < s < \varepsilon$ に対して定義された diffeomorphism $\exp(s\pi) : \mathcal{W}^{-1}(N) \xrightarrow{\text{into}} \mathcal{V}$ とがあつて, $\exp(s\pi)$ は一つのファイバー $V_i(t \in N)$ を一つのファイバー $V_f(t, s)$ に biregular に写像し, $\frac{d}{ds}(\exp(s\pi)(x)) = \pi(\exp(s\pi)(x))$ である。

(証明) 有限個の relatively compact な admissible coordinate neighbourhoods $\{\mathcal{U}_j\}$ で $\mathcal{W}^{-1}(\bar{N})$ をおおうことができる。さらに $\mathcal{U}_j \supset \bar{\mathcal{U}}'_j \supset \mathcal{U}_j$, $\bigcup_j \mathcal{U}'_j \supset \mathcal{W}^{-1}(\bar{N})$ であるような $\{\mathcal{U}'_j\}$ がとれる。

$\mathcal{U}_j$ で微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} z_j^\alpha(s) = \theta_j^\alpha(z_j(s), t_j(s)) \\ \frac{d}{ds} t_j^\lambda(s) = v_j^\lambda(t_j(s)) \end{cases}$$

を考える。ここに $(\theta_j^\alpha, v_j^\lambda)$ は π の成分である。

$\varepsilon > 0$ を十分小さくとればこの微分方程式は, 初期条件 $(z_j^\alpha(0), t_j^\lambda(0)) = (\zeta_j^\alpha, \tau_j^\lambda) \in \mathcal{U}'_j$ の下には, $-\varepsilon < s < \varepsilon$ に対して一意的な解 $(z_j(s, (\zeta, \tau)), t_j(s, (\zeta, \tau)))$ をもち, $(z_j(s, (\zeta, \tau)), t_j(s, (\zeta, \tau))) \in \mathcal{U}_j$ となる。

微分方程式の性質からつぎのことがいえる:

- (i) 解は (ζ_j, τ_j) に関して C^∞ である。
- (ii) $t_j^\lambda(s, (\zeta, \tau))$ は ζ に無関係である。

(iii) $z_j^\alpha(s, (\zeta, \tau))$ は ζ について正則である。

$$(iv) \quad z_j^\alpha(s, (g_{jk}(\zeta_k, \tau_k), t_{jk}(\tau_k))) \\ = g_{jk}^\alpha(z_k(s, (\zeta_k, \tau_k)), t_k(s, \tau_k)), \\ t_j^\lambda(s, t_{jk}(\tau_k)) = t_{jk}^\lambda(t_k(s, \tau_k)).$$

これによつてファイバーを保存する C^∞ 写像 $\exp(s\pi)$ が定義されることがわかる。

$s=0$ で $\exp(s\pi)$ は恒等写像だから, $|s|$ が十分小さければ $\exp(s\pi)$ は diffeomorphism である。

主バンドルの変形族 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ が与えられたときも, (4.4) の cross section の芽 (のあるもの) のなす層の diagram

$$(5.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Theta & \rightarrow & \Pi & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \Sigma & \rightarrow & \Gamma & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & E & & E & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \text{exact} \\ \text{commutative} \end{array} \right)$$

がえられる。ここに Θ, Π, T は (5.1) におけるものであり, E, Σ はそれぞれ $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ の differentiable cross section で各 V_t 上で正則であるものの芽の層である。 Γ は縦の列が exact になるように決める。横列も自然に exact になる。この diagram をバンドルの変形族の fundamental diagram という。

(5.1), (5.2) を V_t の上へ restrict することができる。この場合 restriction r_t とは, V_t 上で 0 になる sections の芽を modulo にして考えるという意味である。 V_t 上の restriction を, 添字 t をつけて, Θ_t, Σ_t 等とあらわす。 Θ_t は V_t 上の接ベクトルの holomorphic field の芽の層に他ならない。

$\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ なる写像があるとき, $\mathcal{V}$ 上の sheaf $\mathcal{S}$ に対し, その direct images と

よばれる M 上の sheaves $\mathcal{W}_q(\mathcal{S})$ (又は $\mathcal{H}^q(\mathcal{S})$) が定まる。即ち M の開集合 U に対して $H^q(\mathcal{W}^{-1}(U), \mathcal{S})$ を対応させると明らかな restriction により presheaf ができる。それである sheaf を $\mathcal{S}$ の q -th direct image というわけである。

$$0 \rightarrow \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'' \rightarrow 0$$

が $\mathcal{V}$ 上の exact sequence of sheaves であるとき,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{S}'') \\ \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathcal{S}') \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathcal{S}'') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

なる exact sequence が生ずる。

これを複素多様体の変形族 $\mathcal{W}: \mathcal{V} \rightarrow M$ に対する fundamental sheaves (5.1) に適用すると,

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow \Pi \rightarrow T \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

から,

$$(5.3) \quad \rho: \mathcal{H}^0(T) \rightarrow \mathcal{H}^1(\Theta)$$

なる sheaf homomorphism がえられる。 $\mathcal{H}^0(T)$ は M 上の differentiable tangent vector fields の芽の層 T_M に他ならない。

V_t 上への restriction によつて

$$(5.4) \quad \rho_t: (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \Theta_t)$$

がえられる。 $(T_M)_t$ は t における M の接空間である。

定理 5.2 $\rho: T_M \rightarrow \mathcal{H}^1(\Theta)$ が $t=0$ ($\in M$) で 0 写像であれば, 変形族 $\mathcal{V} \rightarrow M$ は locally trivial である。則ち 0 の近傍 U があつて, $\mathcal{W}^{-1}(U) = \mathcal{V}|_U$ が trivial である。

(証明) T_M は M 上の C^∞ 函数芽の層に関して finitely generated である。従つて, 0 で $\rho=0$ ならば, その適当な近傍 U で $\rho=0$ である。

U で局所座標 $(t^1, \dots, t^m)$ をとる。 $v = \frac{\partial}{\partial t^1}$ は U 上の C^∞ vector field だから, $\rho=0$ のため $\pi \in H^0(\mathcal{V}/U, \Pi)$ で v は Π の像となる。

$\exp(s\pi)^{-1}$ により, $U_s = \{(t) \in U \mid t^1 = s\}$ は U_0 上に C^∞ に写され, 各 fibre は biregular に対応する。(以上の構成では, 必要に応じて U を小さくとりかえるのであつた。) 次元に関する帰納法により定理が証明される。

定理 5.2' $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ が複素解析的変形族なるとき $\rho: T_M \rightarrow \mathcal{H}^1(\theta)$ が $t=0$ で 0 写像なら, $\mathcal{V} \rightarrow M$ は $t=0$ の近傍で解析的に trivial である。

上の定理では sheaf の準同型 ρ が 0 写像であるということが条件であつた。各の V_t 上への restriction $\rho_t: (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \theta_t)$ を考えると, $\rho=0$ at $t=0$ なら $t=0$ の近傍で $\rho_t=0$ だが, 逆は直ちにはいえない。

定義 5.1 変形族 $\mathcal{V} \rightarrow M$ が regular であるとは, $\dim H^1(V_t, \theta_t)$ が $t \in M$ によらず一定であることをいう。

Proposition 5.3 $\mathcal{V} \rightarrow M$ が regular な変形族ならば, すべての t に対し ρ_t が 0 写像のとき, $\mathcal{V} \rightarrow M$ は M の各点で locally trivial である。

Proposition 5.4 $H^1(V_0, \theta_0) = 0$ ならば, V_0 をふくむ任意の変形族は, V_0 において locally trivial である。

以上は補題 4.5, 基本補題 4.6 と定理 5.2 とから直ちに出る。同じく §4 の基本補題から出るつぎの命題は, 後に利用する機会がある。

Proposition 5.5 変形族 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ が regular で, M 上の C^∞ tangent vector field $v(t) = \sum_{\lambda} v^\lambda(t) \frac{\partial}{\partial t^\lambda}$ に対し, $\rho_t(v(t)) = 0$ ($\forall t \in M$) がなりたつとする。Admissible coordinate systems (z_j, t) in $\mathcal{U}_j$ を使つて $\rho_t(v(t))$ は $Z^1(\{\mathcal{U}_j\}, \theta_t)$ の cocycle $\{\theta_{ij}(t)\}$, $\theta_{ij}(t) = \sum_{\alpha} (v(t) g_{ij}^\alpha(z_j, t)) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$ で与えられるが, 仮設の下に cochain

*) M は十分小さくて, 一つの局所座標系 (t) が M 全体で使えるとして述べる。

$\{\theta_i(t)\} \in C^0(\{\mathcal{U}_j\}, \theta_t)$ が,

$$(5.5) \quad \begin{cases} \delta\{\theta_i(t)\} = \{\theta_{ij}(t)\} \\ \theta_i(t) = \sum \theta_i^\alpha(z_i, t) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \\ \theta_i^\alpha(z_i, t) \text{ は } t \text{ について } C^\infty \end{cases}$$

であるように、とれる。

バンドルの変形族 $\rho: \mathcal{V} \rightarrow M$ があるとき, fundamental diagram (5.2) から, direct images の間の commutative diagram

$$(5.6) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & \uparrow & & & \\ \rightarrow & \mathcal{H}^0(H) & \rightarrow & T_M & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{H}^1(\theta) & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{H}^0(\Gamma) & \rightarrow & T_M & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{H}^1(\Sigma) & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & \searrow \tau & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathcal{H}^0(E) & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathcal{H}^1(E) & \rightarrow \end{array}$$

ができる。(τ については後出, Prop. 5.7 の後). η が前の ρ と同じ役割を果たす, 即ち

定理 5.6 $t=0$ において η が 0-写像ならば, 0 の適当な近傍 U があつて, U 上では $\rho|U \rightarrow \mathcal{V}|U \rightarrow U$ が trivial である。

補足 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(V_t, \Sigma_t)$ が t によらないなら, すべての t に対し $\eta_t = 0$ から, M の各点で $\rho: \mathcal{V} \rightarrow M$ が locally trivial となる。

Proposition 5.7 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(V_t, \Sigma_t)$ が t によらず一定なとき, M の C^∞ tangent vector field $v(t)$ が各 t に対し $\rho_t(v(t)) = 0$ をみたすならば, $\eta_t(v(t))$ を代表する 1-cocycle $\{\theta_{ij}(t)\} \in Z^1(\{\mathcal{U}_j\}, \Sigma_t)$, (t に関し C^∞), に対し $\delta\{\theta_i(t)\} = \{\theta_{ij}(t)\}$ なる 0-cochain $\{\theta_i(t)\}$ が t に関して C^∞ であるようにとれる。

特に定まった複素多様体上のバンドルの変形族の場合、即ち $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ において、 $\mathcal{V}$ が trivial な族 $= V \times M$ である場合について考えると、当然 ρ は 0 であつて、(5.6) に破線で示した写像 τ が定まり、上の結果で η を τ でおきかえてよいことになる。

τ を定義するには、 $\mathcal{V} = V \times M$ のため $\Pi \cong \Theta \oplus T$ なる canonical decomposition があることを使う。これによつて $T \subset \Pi$ とみてよい。そこで fundamental diagram (5.2) における写像 $\Gamma \rightarrow \Pi$ における T の逆像を $\Gamma' (\subset \Gamma)$ とすれば、(5.2) から commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & 0 & \rightarrow & T & \rightarrow & T & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & \Gamma' & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & E & \rightarrow & 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

がえられる。これによつて定義される写像 $T_M \rightarrow H^1(E)$ を τ とおけばよい。 $\mathcal{R}$ の transition matrix (4.5) を見れば、 $\frac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} = 0$ のため、 $\mathcal{R}$ のベクトル $(u_j^a, \theta_j^\alpha, v_j^\lambda)$ において、 $\theta_j^\alpha = 0$ なるものが subbundle をなす。この subbundle に対応する Γ の subsheaf が Γ' なのである。

§ 6 変形族の存在について

V を与えられたコンパクトな複素多様体とすると、 V を一つのメンバーとするどのような変形族が存在するか？ いいかえれば、 V の underlying manifold に、 V のに近い別の複素構造がどれくらい入れうるか？ ということは、変形の理論においては基本的な問題である。しかしこの問題はひどく難しいし、本稿の主目的とは離れているので、ここでは最も基本的な結果 (Kodaira-Nirenberg-Spencer [9]) を引用するだけにする。

V_0 をコンパクト複素多様体、 Θ_0 を接バンドルの正則な cross sections の芽の層

とする。 θ_o は Lie algebra の層であるため、コホモロジー加群 $\sum_{q=0}^{\infty} H^q(V_o, \theta_o)$ はいわゆる graded Lie algebra の構造をもつ。即ち

$$H^p(V_o, \theta_o) \times H^q(V_o, \theta_o) \rightarrow H^{p+q}(V_o, \theta_o)$$

$$(f, g) \longrightarrow [f, g]$$

なる bilinear map が存在して

$$\begin{cases} [f^p, g^q] = (-1)^{pq+1} [g, f] \\ (-1)^{pr} [[f^p, g^q], h^r] + (-1)^{qp} [[g, h], f] + (-1)^{r^2} [[h, f], g] = 0 \end{cases}$$

がなりたつ。 $(f^p$ によつて f が H^p の元であることを示す)。

我々に必要な部分： $H^1 \times H^1 \rightarrow H^2$ だけをみると、 V_o の開被覆 $\{U_j\}$ に関する θ_o -valued 1-cocycles $\{\theta_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}$ に対し、

$$[\theta, \varphi]_{ijk} = \frac{1}{2} \{ [\theta_{ij}, \varphi_{jk}] + [\varphi_{ij}, \theta_{jk}] \}$$

とおくと、これは 2-cocycle をなし、そのコホモロジー類は θ, φ のそれによつて決まる。これが $[\theta, \varphi]$ の定義である。

Proposition 6.1 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ が変形族で $V_o = \tilde{\omega}^{-1}(o)$ がその一つのメンバーであるとき、 $\rho_o((T_M)_o) \ni \theta_o, \varphi_o$ ならば $[\theta_o, \varphi_o] = 0$ である。

(証明) $(T_M)_o$ の元 v_o に対し、点 0 で値が v_o であるような M 上の vector field を v とする。 $(M$ は必要に応じていくらでも小さくとり直す)。 $\rho(v) = \theta$ とする。admissible coordinate neighbourhoods $\{\mathcal{U}_j\}$ による適当な $\mathcal{V}$ の被覆をとると、各 $\mathcal{U}_j$ 上で $\pi_j \in \Gamma(\mathcal{U}_j, \Pi)$ があつて、 $v = j(\pi_j)$ となる。 $(j$ は fundamental sequence (5.1) における $\Pi \rightarrow T$ の写像である)。そして θ は cocycle $\{\theta_{ij}\}, \theta_{ij} = \pi_j - \pi_i$ によつて定められる。

$$\mu_{ij} = [\pi_i, \pi_j] \in \Gamma(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j, \Pi) \text{ とおくと, } j^*[\pi_i, \pi_j] = [j^*\pi_i, j^*\pi_j]$$

$=\{v, v\}=0$ のため, $\mu_{ij} \in \Gamma(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j, \Theta)$. 従つて $\mu = \{\mu_{ij}\} \in C^1(\{\mathcal{U}_j\}, \Theta)$.

$$\begin{aligned} \{\delta\mu\}_{ijk} &= [\pi_j, \pi_k] - [\pi_i, \pi_k] + [\pi_i, \pi_j] \\ &= [\theta_{ij}, \pi_k] + [\pi_i, \pi_j] \\ &= [\theta_{ij}, \pi_k] - [\theta_{ij}, \pi_j] + [\pi_j, \pi_j] \\ &= [\theta_{ij}, \theta_{jk}]. \end{aligned}$$

従つて $[\theta, \theta] = 0$ となる. V_o へ制限して $[\theta_o, \theta_o] = 0$.

$\theta_o, \varphi_o \in \rho_o(T_{M_o})$ のとき, $[\theta_o + \varphi_o, \theta_o + \varphi_o] = 0$ から, $[\theta_o, \varphi_o] = 0$ がえられる。

注意 実際 $H^1(V_o, \Theta_o)$ の二元 θ, φ で $[\theta, \varphi] \neq 0$ となることがある。

定理 6.2 コンパクトな複素多様体 V_o が $H^2(V_o, \Theta_o) = 0$ をみたし, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(V_o, \Theta_o) = m$ ならば, $\mathbb{C}^m$ における原点 0 の近傍 M と, 複素解析的変形族 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ とがあつて,

- (a) $\tilde{\omega}^{-1}(0)$ は与えられた V_o に他ならず,
- (b) $\rho_t: (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \Theta_t)$ は各 $t \in M$ に対し bijective である.
- (c) $\mathcal{V} \rightarrow M$ は, M の各点で complex analytically complete である.

最後の主張の意味はつぎのようである。

$\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ を複素解析的な変形族で, $O' \in M$ に対し $V_{O'}' = V_t$ であるとする, M における O' の近傍から M 内への正則な写像 h があつて, $h(O') = t$, そして, $\mathcal{W}$ は $V_{O'}'$ の近傍では h によつて $\mathcal{V}$ から induce される。

$H^2(V_o, \Theta_o) = 0$ なる V_o に対しては, これは完全な結果だといえよう。

§ 7 変形族における複素構造

C^∞ 変形族 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ が与えられたとき, ある条件の下には parameter space M に複素構造が入ることがあり, $\mathcal{V} \rightarrow M$ が解析的変形族になることがある。この § ではこの種の問題を論ずる。

定理 7.1 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ がコンパクトな複素多様体の regular な C^∞ 変形族で, M の各点 t に対しつぎの条件がなりたつとする。

(i) $\rho_t: (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \Theta_t)$ は injective である。

(ii) $\rho_t((T_M)_t)$ は $H^1(V_t, \Theta_t)$ の $\mathbb{C}$ -subspace である。

このとき M には複素構造があつて, 任意の解析的局所座標系 $\tau^1, \dots, \tau^m$ に対して

$\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}^\nu}\right) = 0$ となる。このような複素構造はたゞ一つ決まる。

定理 7.2 regular な C^∞ 変形族 $\tilde{\omega}: \mathcal{V} \rightarrow M$ において M が複素構造をもち, 任意の解析的座標 $t^1, \dots, t^m$ に対し, M の各点で $\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\nu}\right) = 0$ だとする。このとき M の任意の点 t に対しその近傍 U があり, $\mathcal{V}|_U$ 上に複素解析的変形族の構造 (CAF 構造) で, 各 V_t および M の複素構造と両立するものが入る。

定理 7.3 前定理の条件の上に, さらに $H^0(V_t, \Theta_t) = 0$ for all $t \in M$ なる条件があれば, 前定理にいう CAF 構造は一意的である。従つて $\mathcal{V} \rightarrow M$ 全体が複素解析的変形族となる。

注意 $H^0(V_t, \Theta_t) = 0$ とは, V_t が正則な自己同型の連続群をもたないことを意味する。

バンドルの変形族に対しても同種の定理がなりたつ。

定理 7.1' $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ が, コンパクトな複素多様体上の解析的バンドルの C^∞ 変形族で, $\dim H^1(V_t, \Sigma_t)$ が t によらず一定であるとする。 M の任意の点 t に対し

(i) $\eta_t: (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \Sigma_t)$ は injective

(ii) $\eta_t((T_M)_t)$ は $H^1(V_t, \Sigma_t)$ の $\mathbb{C}$ -subspace

ならば, M はその解析的局所座標 $\tau^1, \dots, \tau^m$ に対し $\eta_t \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}^\nu} \right) = 0$ となるような, ただ一つの複素構造をもつ。

定理 7.2' $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow M$ は解析的バンドルの C^∞ 変形族で $\dim H^1(V_t, \Sigma_t)$ は定数であるとする。 M が複素構造をもち, 解析的局所座標に対して $\eta_t \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}^\nu} \right) = 0$ が M の各点 t でなりたつならば, M の任意の点に対し, 適当なその近傍 U があつて, $\mathcal{P}|_U$ 上に $P_t \rightarrow V_t$ や M の複素構造と両立する CAF 構造が入る。

定理 7.3' 前定理の条件の上に, さらに $H^0(V_t, \Sigma_t) = 0$ がなりたつていれば, 前定理にいう CAF 構造は一意的に従つて $\mathcal{P}$ 全体で定義される。

定理 7.4 一定の複素多様体上のバンドルの変形族 $\mathcal{P} \rightarrow V \times M \rightarrow M$ を考える場合には, 定理 7.1' ~ 7.3' において Σ_t を Θ_t で, η_t を τ_t で, おきかえてえられる命題がなりたつ。

以下定理 7.1 ~ 7.3 を証明する。その他ののはこれらの変形にすぎない。

(定理 7.1 の証明)

仮定から M が偶数次元 ($2m$ 次元) であることは明らかである。 M の座標近傍 U をとり, U 上に複素数値局所座標 $t^1, \dots, t^m$ を入れる。((t) の実部, 虚部が U 上の C^∞ 局所座標であるようにする。) 一方 $H^1(V_t, \Theta_t)$ の C 上の基底 $\beta_1(t), \dots, \beta_k(t)$ を, (例えば β を調和微分式によつて代表させて) t に対し C^∞ であるようにとる。

Regularity からこれは可能である。そうすると,

$$\rho_t \left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) = \sum_s a_\lambda^s(t) \beta_s(t)$$

$$(a_\lambda^s, b_\lambda^s \text{ は } t \text{ の } C^\infty \text{ 関数})$$

$$\rho_t \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda} \right) = \sum_s b_\lambda^s(t) \beta_s(t)$$

とかける。今 $\rho_t \left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) \quad \lambda = 1, 2, \dots, m$ が $\rho_t((TM)_t)$ の $\mathbb{C}$ -basis

をなすようにとつておくと,

$$\rho_t \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\mu} \right) = \sum_{\lambda=1}^m h_{\bar{\mu}}^\lambda(t) \rho_t \left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) \quad (h \text{ は } C^\infty \text{ 函数})$$

とかける。そこで

$$\omega^\lambda = dt^\lambda + \sum_{\bar{\mu}} h_{\bar{\mu}}^\lambda(t) d\bar{t}^{\bar{\mu}} \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

とおき、これによつて、(即ち、これらの Pfaff 形式が型 (1.0) の微分式の基底をなすと定めて) U に複素構造 (AC 構造) を入れる。この入れ方は要するに $\rho_t((T_M)_t)$ の複素構造を $(T_M)_t$ にうつすということに他ならないから、locally に定義した AC 構造は実は M 全体で定義されている。

この AC 構造の積分条件は

$$d\omega^\lambda \equiv 0 \quad (\omega^1, \dots, \omega^n).$$

であるが、AC 構造の入れ方から積分条件は各点ごとに任意の複素数値局所座標系について示せば十分である。それ故与えられた点 t_0 において $h_{\bar{\mu}}^\lambda(t_0) = 0$ と仮定してよい。そうすると証明すべき式は

$$\left(\frac{\partial h_{\bar{\mu}}^\lambda}{\partial \bar{t}^\nu} \right)_{t=t_0} - \left(\frac{\partial h_{\bar{\nu}}^\lambda}{\partial \bar{t}^\mu} \right)_{t=t_0} = 0$$

となる。

Admissible coordinate (z_j, t) と、その間の変換式 $z_j^\alpha = g_{jk}^\alpha(z_k, t)$ を利用する。((t) は共通であるとしてよい。)

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{jk}^\alpha |_{\bar{\mu}}(z_k, t) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}^\mu} g_{jk}^\alpha(z_k, t) \\ \theta_{jk}^\alpha |_{\bar{\mu}}(z_k, t) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}^\mu} g_{jk}^\alpha(z_k, t) \\ \theta_{jk}^\alpha |_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(z_k, t) = \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^\mu \partial \bar{t}^\nu} g_{jk}^\alpha(z_k, t) \end{array} \right.$$

とおく。(明示した変数を独立変数として考えている。)

$\rho_t \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\mu} \right) = \sum_\lambda h_{\bar{\mu}}^\lambda(t) \rho_t \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda} \right)$ のため, これらを表わす

1-cocycles $\{\theta_{jk}|\bar{\mu}\}, \{\theta_{jk}|\lambda\}$ に対して

$$(*) \quad \theta_{jk}^\alpha|\bar{\mu}(z_k, t) = \sum_\lambda h_{\bar{\mu}}^\lambda(t) \theta_{jk}^\alpha|\lambda(z_k, t) \\ + \sum_\beta \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \varphi_k^\beta|\bar{\mu}(z_k, t) - \varphi_j^\alpha|\bar{\mu}(z_j, t)$$

なる関係をみたす 0-cochain $\{\varphi_j|\bar{\mu}\}$ がある。変形族が regular であるから,

Prop. 5.5. により $\varphi_j|\bar{\mu}$ は t について C^∞ であるようにとれる。

(*) に対して z_k, t を独立変数として $\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\nu}$ を施し, $t=t_0$ とおく。記号

$$\begin{cases} \varphi_j^\alpha|\bar{\mu}\bar{\nu}(z_j, t) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}^\nu} \varphi_j^\alpha|\bar{\mu}(z_j, t) \\ h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}^\nu} h_{\bar{\mu}}^\lambda(t) \end{cases}$$

を用いると

$$\theta_{jk}^\alpha|\bar{\mu}\bar{\nu} = \sum_\lambda h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^\lambda \theta_{jk}^\alpha|\lambda + \sum_\beta \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \varphi_k^\beta|\bar{\mu}\bar{\nu} - \varphi_j^\alpha|\bar{\mu}\bar{\nu} \\ + \sum_\beta \varphi_k^\beta|\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} (\theta_{jk}^\alpha|\bar{\nu}) - \sum_\beta \theta_{jk}^\beta|\bar{\nu} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \varphi_j^\alpha|\bar{\mu}.$$

一方 (*) において $t=t_0$ とおくと

$$\theta_{jk}^\alpha|\bar{\nu}(t_0) = \sum_r \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^r} \varphi_k^r|\bar{\nu} - \varphi_j^\alpha|\bar{\nu}.$$

従つて $t=t_0$ で

$$\frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \theta_{jk}^\alpha|\bar{\nu} = \sum_r \frac{\partial^2 z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta \partial z_k^r} \varphi_k^r|\bar{\nu} + \sum_r \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^r} \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \varphi_k^r|\bar{\nu}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum \frac{\partial z_j^r}{\partial z_k^\beta} \frac{\partial}{\partial z_j^r} \varphi_j^\alpha | \bar{\nu} \\
\therefore \theta_{jk}^\alpha | \bar{\mu} \bar{\nu} &= \sum_\lambda h_{\bar{\mu} \bar{\nu}}^\lambda \theta_{jk}^\alpha | \lambda + \left\{ \sum_\beta \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \varphi_k^\beta | \bar{\mu} \bar{\nu} - \varphi_j^\alpha | \bar{\mu} \bar{\nu} \right\} \\
& + \sum \frac{\partial^2 z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta \partial z_k^r} \varphi_k^\beta | \bar{\mu} \varphi_k^r | \bar{\nu} \\
& + \sum \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^r} \varphi_k^\beta | \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \varphi_k^r | \bar{\nu} - \sum \varphi_k^\beta | \bar{\mu} \frac{\partial z_j^r}{\partial z_k^\beta} \frac{\partial}{\partial z_j^r} \varphi_j^\alpha | \bar{\nu} \\
& - \sum \frac{\partial z_j^r}{\partial z_k^\beta} \varphi_k^\beta | \bar{\nu} \frac{\partial}{\partial z_j^r} \varphi_j^\alpha | \bar{\mu} + \sum \varphi_j^\beta | \bar{\nu} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \varphi_j^\alpha | \bar{\mu}
\end{aligned}$$

μ, ν を入れかえてひくと

$$0 = \sum_\lambda (h_{\bar{\mu} \bar{\nu}}^\lambda - h_{\bar{\nu} \bar{\mu}}^\lambda) \theta_{jk}^\alpha | \lambda + \left\{ \sum_\beta \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \zeta_k^\beta - \zeta_j^\alpha \right\}$$

となる。ここに $\zeta_j^\alpha = \varphi_j^\alpha | \bar{\mu} \bar{\nu} - \varphi_j^\alpha | \bar{\nu} \bar{\mu} + \sum_\beta \varphi_j^\beta | \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \varphi_j^\alpha | \bar{\nu} -$

$$\sum_\beta \varphi_j^\beta | \bar{\nu} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \varphi_j^\alpha | \bar{\mu}.$$

上式 { } 内は coboundary だから, これから

$$\sum_\lambda (h_{\bar{\mu} \bar{\nu}}^\lambda(t_o) - h_{\bar{\nu} \bar{\mu}}^\lambda(t_o)) \rho_{t_o} \left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) = 0$$

従つて

$$h_{\bar{\mu} \bar{\nu}}^\lambda(t_o) - h_{\bar{\nu} \bar{\mu}}^\lambda(t_o) = 0 \quad \text{である。}$$

定理 7.2 の証明のため, つぎの補題を使う。

補題 7.5 コンパクトな C^∞ 多様体 X 上に, 領域 D をうごくパラメータ s に関して C^∞ 又

は正則な AC 構造の族が与えられ、それぞれ積分可能とする。このとき X の十分細かい開被覆

$\{U_j\}$ (D の方も必要に応じ制限して) U_j における解析的局所座標 $\zeta_j^\alpha = \zeta_j^\alpha(z_j^1, \dots, z_j^n, s)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) が, s に関し C^∞ 又は正則であるようにとれる。

(証明) X の AC 構造は, U_j における型 (1.0) の微分式の基底 $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ を与えることによつて決められる。補題の条件は ω^α が (X の複素数値座標 (z_j) と s とについて書き表わした時) s について C^∞ 又は正則であることを意味する。

微分可能性については Newlander-Nirenberg [13] の最後の statement による。正則性については, $X \times D$ 上で AC 構造 $(\omega^\alpha, d s^\lambda)$ を考えれば, ω^α が s に関し正則なことから, この AC 構造が積分可能で, 正則局所座標 $(\zeta_j^\alpha(z_j, s), s^\lambda)$ をもつ。
 $d\zeta_j^\alpha = 0$ ($\omega^\beta, d s^\lambda$) から $\partial \zeta_j^\alpha / \partial \bar{s}^\lambda = 0$ がわかる。

(定理 7.2, 7.3 の証明)

小さな近傍 $U(CM)$ をとり, その上で考える。

$$\rho_t(\frac{\partial}{\partial t} \lambda) = 0 \text{ のため, } \frac{\partial}{\partial t} g_{jk}^\alpha(z_k, t) = \sum_\beta \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \varphi_{k\lambda}^\beta(z_k, t) - \varphi_{j\lambda}^\alpha(z_j, t)$$

であるような $\{\varphi_{j\lambda}^\alpha\}$ がとれる。これは z_j については当然正則だが, 変形族の regularity のため, t についても C^∞ ととれる。そこで

$$\varphi_j^\alpha = \sum_\lambda \varphi_{j\lambda}^\alpha(z_j, t) d\bar{t}^\lambda$$

とおけば

$$(7.1) \quad \sum_\lambda \frac{\partial g_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial \bar{t}^\lambda} d\bar{t}^\lambda = \sum_\beta \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \varphi_{k\lambda}^\beta - \varphi_{j\lambda}^\alpha$$

がなりたつ。そこで

$$(7.2) \quad \omega_j^\alpha = dz_j^\alpha + \varphi_j^\alpha$$

とおくと, $\omega_j^\alpha = \sum_\beta \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \omega_k^\beta + \sum_\lambda \theta_{jk}^\alpha |_\lambda d\bar{t}^\lambda$ がなりたつ。従つて

$$(7.3) \quad (\omega_j^1, \dots, \omega_j^n, dt^1, \dots, dt^m)$$

で決る $\mathcal{U}_j$ 上の AC 構造は, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ 上では $\mathcal{U}_k$ 上の同様な AC 構造と一致し, $\mathcal{V}|U$ 全体に AC 構造をあたえる。

この AC 構造が, 各 V_t および M の複素構造と両立することは明らかである。また後者の性質をもつ AC 構造は (7.1), (7.2) をみたすような ω_j^α によつて, (7.3) の形に与えられることもすぐわかる。

我々は (7.2) おける φ を適当に調節することによつて, (7.3) が積分可能になることを

示そう。条件 (7.1) のため, φ の任意性は $\psi_j^\alpha(z_j, t) = \sum_{\beta} \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \psi_k^\beta(z_k, t)$ なる

ψ をとつて $\varphi_j^\alpha \rightarrow \varphi_j^\alpha + \psi_j^\alpha$ と変換するだけしかない。これによつて $H^0(V_t, \Theta_t) = 0$ のとき, CAF 構造の一意性がわかる。

証明は M の次元 m に関する帰納法による。

(a) $m=1$ のときには, 積分条件は trivially になりたつ。

(b) $m-1$ のとき定理がなりたつとして, m のときを考える。 t^m をパラメーターとして固定して考えると, 帰納法の仮定により $\mathcal{V}|U_{t^m}$ (U_{t^m} は $t^m = \text{const}$ による U の断面) に CAF 構造が入る。それに関する admissible coordinates を

$(\zeta_j^\alpha, t^\lambda)_{\lambda=1, \dots, m-1}$ とすれば, ζ_j^α は C^∞ 変形族としてのものと admissible coord. $(z_j^\alpha, t^\lambda)_{\lambda=1, \dots, m}$ につき C^∞ である。そして

$$(7.4) \quad \zeta_j^\alpha = g_{jk}^\alpha(\zeta_k, t^1 \dots t^{m-1}, t^m),$$

ここに g_{jk}^α は $\zeta_k, t^1 \dots t^{m-1}$ について正則である。

$(\zeta_j, t^1 \dots t^m)$ は C^∞ 変形族としての admissible coordinate である。

これに関して (7.1) をみたす φ を作る。 $\varphi_{j\lambda}^\alpha = 0$ ($\lambda=1, \dots, m-1$) ととつてよい。

さらに

(§) φ_{jm}^α は $t^1 \dots t^{m-1}$ に関しては正則にとれる。

実際

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}^m} g_{jk}^\alpha (\zeta_k, t) = \sum_\beta \frac{\partial \zeta_j^\alpha}{\partial \zeta_k^\beta} \varphi_{km}^\beta - \varphi_{jm}^\alpha$$

に $\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda} (\lambda=1, \dots, m-1)$ を施すと, (7.4) が $t^1 \dots t^{m-1}$ につき正則なため,
 $(\zeta_j, t), (\zeta_k, t)$ のどちらを独立変数にとるかに関係なく, $\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda}$ の意味は定まる。)

$$\frac{\partial \zeta_j^\alpha}{\partial \zeta_k^\beta} \frac{\partial \varphi_{km}^\beta}{\partial \bar{t}^\lambda} - \frac{\partial \varphi_{jm}^\alpha}{\partial \bar{t}^\lambda} = 0 \quad \text{となる。即ち}$$

$$\Psi_\lambda = \left\{ \frac{\partial \varphi_{jm}^\alpha}{\partial \bar{t}^\lambda} \right\} \in H^0(V_t, \Theta_t)$$

変形族 $\mathcal{V} \rightarrow M$ の regularity と基本補題 4.7, 4.8 とから $H^0(V_t, \Theta_t)$ の基底

$(\Phi_1(t), \dots, \Phi_r(t))$ が, $t^1, \dots, t^{m-1}$ については正則, t^m についても C^∞ であるようにとれる。(必要なら U を小さくとり直す)。そこで

$$\Psi_\lambda(t) = \sum_\nu \alpha_{\nu\lambda}(t) \cdot \Phi_\nu(t) \quad \alpha_{\nu\lambda}(t) \text{ は } C^\infty$$

とかく。作り方から $\partial \Psi_\lambda / \partial \bar{t}^\mu = \partial \Psi_\mu / \partial \bar{t}^\lambda \quad (\lambda, \mu \leq m)$ だから,

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\lambda}}{\partial \bar{t}^\mu} = \frac{\partial \alpha_{\nu\mu}}{\partial \bar{t}^\lambda} \quad \text{がなりたつ。} U_t^m \text{ は } \mathbb{C}^{m-1} \text{ の poly-cylinder と考えて}$$

$$\text{よいから, } C^\infty \text{ 関数 } \beta_\nu(t) \text{ があつて, } \alpha_{\nu\lambda}(t) = \frac{\partial \beta_\nu(t)}{\partial \bar{t}^\lambda} \quad (1 \leq \lambda \leq m,$$

$$1 \leq \nu \leq r) \text{ となる。そうすると } \varphi_{jm}^\alpha \text{ を } \varphi_{jm}^\alpha - \sum_\nu \beta_\nu \Phi_{\nu j}^\alpha \text{ でおきかえれば (5) がな}$$

りたつ。

これができた以上 $(\omega^1, \dots, \omega^n, dt^1, \dots, dt^m)$ が積分可能なことは

(a) の場合同様自明である。

第三章 代数曲線上の解析的構成

§ 8 Picard 多様体再論

この§では、コンパクトなkahler 多様体 V のPicard 多様体 M を考える。 M が V 上のある種の複素直線バンドルの族のparameter space とみなしうることは、§ 3で見た所であるが、それに対し第二章の定理を適用したい。

$\tilde{V} = V$ の普遍被覆空間

$\pi = \tilde{V} \rightarrow V$ の被覆写像

$\bar{A} = \{ \bar{\alpha} \mid \alpha \text{ は } V \text{ 上の 1 次第一種微分式, } \bar{\alpha} \text{ はその共役} \}$

$D = \{ \bar{\alpha} \in \bar{A} \mid \int_{\gamma} (\bar{\alpha} - \alpha) \equiv 0 \pmod{2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}} \text{ for } \gamma \in H_1(V, \mathbb{Z}) \}$

とおくと、 $M = \bar{A}/D$ である。

V の基本群を Π とすれば、(M の基本群は D であるから) $X = V \times M$ の基本群は $\Delta = \Pi \times D$ である。そこで

$$f(\tilde{z}, \bar{\alpha}, \sigma, \bar{\delta}) = \exp \left\{ \int_{C(\sigma)} (\bar{\alpha} + \bar{\delta}) + \int_{\tilde{C}(\sigma)} \pi \bar{\delta} \right\}$$

とおくと、 f は $\tilde{X} \times \Delta \rightarrow \mathbb{C}^*$ の複素解析的な factor である。(ここに $\tilde{C}(\sigma)$ は $\sigma \in \Pi$ の定める V の 1 次元ホモロジー類である。) これに対して、 $V \times M$ 上の複素直線バンドル $\mathcal{B}$ ができる。 $\mathcal{B} \rightarrow V \times M \rightarrow M$ は M で parametrize された V 上の複素直線バンドルの解析的変形族とみてよい。

M の点 t (およびその上にある $\bar{A}$ の点 $\bar{\alpha}$) をきめれば、複素直線バンドル $B_t \rightarrow V$ は、 $f(\tilde{z}, \bar{\alpha}; \sigma, 0) = \exp \left(\int_{C(\sigma)} \bar{\alpha} \right)$ なる factor (実は $\Pi \rightarrow \mathbb{C}^*$ の表現) に対応するバンドルに他ならない。

第二章における formulation とあわせるため $\mathcal{B}$ を表わす transition function を求めておく：

$V \times M$ の十分細かい単純被覆 $\{\mathcal{U}_j\}$ をとり、 $(*)$ $\tilde{V} \times \bar{A} \rightarrow V \times M$ における $\pi^{-1}(\mathcal{U}_j)$ の連結成分の一つ $\tilde{\mathcal{U}}_j$ をきめる。 $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \ni (z, t)$ のとき、 (z, t) の逆像 $(\tilde{z}_j, \bar{\alpha}_j) \in \tilde{\mathcal{U}}_j$ と $(\tilde{z}_k, \bar{\alpha}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k$ との間には

$$\tilde{z}_k = \tilde{z}_j \cdot \sigma_{jk} \quad \overline{\alpha}_k = \overline{\alpha}_j + \overline{\varepsilon}_{jk}$$

なる関係があり、 σ_{jk} , ε_{jk} は j, k だけで決まる。

$\mathcal{B}$ の定義にあらわれる同値関係は

$$(\tilde{z}_j, \overline{\alpha}_j, \tilde{\xi}_j) \sim (\tilde{z}_k, \overline{\alpha}_k, \tilde{\xi}_k) \\ \iff \tilde{\xi}_k = f(\tilde{z}_j, \overline{\alpha}_j; \sigma_{jk}, \overline{\varepsilon}_{jk})^{-1} \tilde{\xi}_j.$$

であるから、 $\mathcal{B}$ は $\{\mathcal{U}_j \times \mathbb{C} \mid j=1, 2, \dots\}$ を

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_j = f_{jk}(z, t) \cdot \tilde{\xi}_k \\ f_{jk}(z, t) = f(\tilde{z}_j, \overline{\alpha}_j; \sigma_{jk}, \overline{\varepsilon}_{jk}) \end{cases}$$

によつて結びつけてえられる。

$t \in M$ とその上の $\overline{\alpha}$ とを決めて B_t について考える。 $U_j = \mathcal{U}_j \cap (V \times t)$ を V の開集合とみて、 U_j 内に定点 A_j を、また $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ なるとき、その中に定点 A_{jk} をとる。 $\tilde{A}_j = \pi^{-1}(A_j) \cap \tilde{\mathcal{U}}_j$, $\tilde{A}_{jk} = \pi^{-1}(A_{jk}) \cap \tilde{\mathcal{U}}_j$, $\tilde{A}'_{jk} = \pi^{-1}(A_{jk}) \cap \tilde{\mathcal{U}}_k$ とおく。

$$\int_{C(\sigma_{jk})}^{\alpha} \overline{\alpha} = \int_{\tilde{A}_{jk}}^{\tilde{A}'_{jk}} \overline{\alpha}, \quad \int_{A_j}^{A_k} \overline{\alpha} = \int_{\tilde{A}_j}^{\tilde{A}_{jk}} \overline{\alpha} + \int_{\tilde{A}'_{jk}}^{\tilde{A}_k} \overline{\alpha}$$

のため

$$\int_{A_j}^{A_k} \overline{\alpha} + \int_{C(\sigma_{jk})} \overline{\alpha} = \int_{\tilde{A}_j}^{\tilde{A}_k} \overline{\alpha} = \int_{\tilde{B}}^{\tilde{A}_k} \overline{\alpha} - \int_{\tilde{B}}^{\tilde{A}_j} \overline{\alpha}$$

($\tilde{B}$ は $\tilde{V}$ の定点) となる。これは B_t が transition function $\exp(\int_{C(\sigma_{jk})} \overline{\alpha})$ であっても、 $\exp(-\int_{A_j}^{A_k} \alpha)$ であっても、与えられることを示している。

さて変形族 $\mathcal{B}$ に定理 7.1' 7.2' を適用してみよう。考えている群は $\mathbb{C}^*$ であるから、その Lie algebra は $\mathbb{C}$ であり、adjoint operation は trivial である。従つて t の如何にかゝらず $\mathfrak{g} = \Omega(V \text{ 上の正則函数芽の層})$ である。 $\overline{A}$ の基底 $\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_q$ をとり、 $\overline{A}$ の元を $\overline{\alpha} = \sum t_\lambda \overline{\omega}_\lambda$ とあらわすと、 M の点 $t_0 = (t_{0\lambda})$ の近傍では $u_\lambda = t_\lambda - t_{0\lambda}$ が局所座標をなし、 M の接ベクトル $\frac{\partial}{\partial u_\lambda}$ に対して $\tau_{t_0}(\frac{\partial}{\partial u_\lambda})$ は 1-cocycle

$$\theta_{jk\lambda} = \frac{\partial}{\partial u_\lambda} \log \exp \left(\int_{A_j}^{A_k} \sum_\lambda (t_{0\lambda} + u_\lambda) \overline{\omega}_\lambda \right) = \int_{A_j}^{A_k} \overline{\omega}_\lambda$$

によつて与えられる。従つて τ_{t_0} は $(TM)_{t_0}$ を

$H^1(V, \mathcal{E})$ に isomorphic に写す。 $\tau_{t_0}(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}) = 0$ も明らかである。

どうせ β は複素解析族なのだから、定理 7.1' を適用するまでもないのだが、“Picard 多様体に与えた複素構造はこの意味で自然なものである”ということがこれから判る。

$H^0(V, \mathcal{E}) \cong \mathbb{C}^q$ のため、定理 7.3' は適用できない。

実は Picard 多様体の基本性質として、つぎの命題がなりたつ。

Proposition 8.1 $\beta' : V \times N \rightarrow N$ を V 上の複素直線バンドルの任意の変形族とする。このとき写像 $f : N \rightarrow M$ があつて、 N の任意の点 s に対して $B'_s = B'_{s_0} \otimes B_{f(s)}$ となる。(即ち本質的には β' は β によつて induce される。 f は β' とともに C^∞ 又は holomorphic である。

(証明) V の十分こまかい単純被覆 $\{U_j\}$ に関し B'_s の transition function を $g_{jk}(x, s)$ とする。 $g_{jl}(x, s) = g_{jk}(x, s) \cdot g_{kl}(x, s)$ のため

$$c_{jkl}(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} (\log g_{jk} + \log g_{kl} + \log g_{lj})$$

は整数であつて、cocycle $\in Z^2(\{U_j\}, \mathbb{Z})$ を定める。(そのコホモロジー類が B_{s_0} の Chern class である。 $c_{jkl}(s)$ は s に関し連続でなければならないから実は一定である。従つて $h_{jk}(x, s) = g_{jk}(x, s) g_{jk}(x, s_0)^{-1}$ で定められるバンドル $B'_s \otimes (B'_{s_0})^{-1}$ に対しては $\log h_{jk}(x, s)$ の分枝の適当なえらび方によつて

$$\log h_{jk} + \log h_{kl} + \log h_{lj} = 0$$

とできる。 C^∞ 函数による 1 の分割: $1 = \sum \varphi_j(x)$, φ_j の Carrier $\subset U_j$ をとつて

$\xi_k(x) = \sum_j \varphi_j(x) h_{jk}(x)$ とおくと、 $\xi_k(x)$ は U_k における C^∞ 函数であつて、

$$\xi_k(x) - \xi_j(x) = h_{jk}(x) \quad \text{in } U_j \cap U_k$$

従つて、 $d'' \xi_j(x) = d'' \xi_k(x)$ となり、 $\psi = d'' \xi_j$ は V 上で大域的に定義された d'' -closed な微分式である。調和微分式の理論により、

*) $U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_q} \neq \emptyset$ なら、この集合が一点に contractible なこと。 U_j が十分細いとはこの際 $\pi^{-1}(U_j)$ の連結成分が π によつて U_j に homeomorphic なことを意味する。(p.38 への註)

$$\psi = \bar{\alpha} + d''\beta, \bar{\alpha} \in \bar{A}, \beta \text{ は } V \text{ 上の } C^\infty \text{ 函数.}$$

写像 f を $N \ni s \rightarrow \bar{\alpha} \pmod{D} \in M$ と定めると, 一方では $B'_s \otimes (B'_{s0})^{-1} B_f(s)$

他方 $s \rightarrow g_{jk}(x, s) \rightarrow \xi_j(x, s) \rightarrow \psi \rightarrow \bar{\alpha}$ なる対応は, 最初の対応が C^∞ 又は正則であるに従って C^∞ 又は正則である ($\psi \rightarrow \bar{\alpha} = H\psi$ の対応は積分作用素である。 附録 § D)

注意 V 上のバンドルの "連続な変形族" を考えれば, それは M への連続写像 f によって induce されることもすぐわかる。

§ 9 代数曲線上のアフィン直線バンドルの族

1° アフィンバンドル. 複素直線 $\mathcal{C}$ に作用するアフィン変換の群を G とする G の元は, $A = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なる行列であらわされ, $\zeta \in \mathcal{C}$ に対して $\zeta \rightarrow b\zeta + c$ と作用する。代数曲線 Γ が与えられたとき, $\mathcal{C}$ をファイバー, G を構造群とする Γ 上の解析的バンドルの変形族と考えよう。

このような一つのバンドル E が, Γ の単純被覆 $\mathcal{U} = \{U_j\}$ に関し, transition matrices $\{A_{jk}\}$, $A_{jk} = \begin{pmatrix} b_{jk} & c_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられているとする。このとき $\{b_{jk}\}$ は Γ 上の複素直線バンドル B を定める。 $\{c_{jk}\}$ の方は

$$c_{jl} = c_{jk} + b_{jk}c_{kl}$$

なる関係をみたすから, 1-cocycle $\in Z^1(\mathcal{U}, \Omega(B))$ を与える。そのコホモロジー類

$r \in H^1(\Gamma, \Omega(B))$ が 0 ならば, E は正則な cross section をもち, 各ファイバー上で原点をその cross section の値へうつす平行移動を行うことによって, E は複素直線バンドル B に帰着する。 $r \neq 0$ の場合について考えると, 0 でない定数 d があつて, $r' = d \cdot r$ になるとき, そのときに限り, r と r' とは同一のバンドル E を定める。

何故なら transition matrices の系 $\left\{ \begin{pmatrix} b_{jk} & c_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ と $\left\{ \begin{pmatrix} b_{jk} & c'_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ とが同値であるためには U_j で正則な行列 $\begin{pmatrix} d_j & e_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ があつて, $U_j \cap U_k$ で

$$\begin{pmatrix} b_{jk} & c_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_j & e_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{jk} & c'_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k & e_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが必要かつ十分である。これから

$$\begin{cases} d_j = d_k \\ c_{jk} = d_j^{-1}(c'_{jk} - e_k + b_{jk}e_h) \end{cases}$$

$d_j = d_k = d$ は, Γ 全体での正則函数で 0 にならないから, 0 でない定数である。第二式は $r \Leftarrow d \cdot r$ をあらわす。

これから, 一つの B をきめれば, これに対応する E (で B に reduce できないもの) の全体は $\{H^1(\Gamma, \Omega(B)) - (0)\} / \mathbb{C}^*$ なる射影空間の点で, 自然に代表されることがわかる。

2° $H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$ の作るバンドル. Γ の Jacobi 多様体 J の点 t であらわされる複素直線バンドル B_t に対応し, しかも B_t に reduce しないような E について考える。

それらの全体をみるためには, $\bigcup_t H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$ を考察しなければならない。

Riemann-Roch の定理により (B_t の Chern class は 0 である。即ち B_t は degree 0 の因子で定められている)

$$\dim \mathcal{C}H^0(\Gamma, \Omega(B_t)) - \dim \mathcal{C}H^1(\Gamma, \Omega(B_t)) = -(g-1)$$

よつて $t=0$ (B_t が直積バンドル) のとき, $\dim \mathcal{C}H^1(\Gamma, \Omega(B_t)) = g$, 他のはときは $\dim \mathcal{C}H^1(\Gamma, \Omega(B_t)) = g-1$ となる。そこで $t_0 \neq 0$ なる点 t_0 の近傍で, $H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$ の基底を t について $\mathbb{C}^\infty$ になるようにとることを試みる。それには Γ に Kähler metric を入れ, B_t -valued 微分式の空間にも metric を入れて, 調和微分式を考える。

Γ 上の第一種微分の基底 ($\omega_1, \dots, \omega_g$) で, $\int_{\Gamma} \omega_\lambda \bar{\omega}_\mu = \delta_{\lambda\mu}$ をみたすものをつておく。 Γ の単純被覆 $\{U_j\}$ をとり, U_j 内に定点 a_j をきめると, B_t の transition function は

$$(9.1) \quad b_{jk}(t) = \exp \left(- \int_{a_j}^{a_k} \sum_{\lambda} (t_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda} - \bar{t}_{\lambda} \omega_{\lambda}) \right)$$

で与えられる。(§8における $\bar{A}$ の基底として $(\bar{\omega}_{\lambda})$ をとり $\bar{A}$ の座標 $(\bar{t}_{\lambda})$ によつて J の点 t をきめている)

$$(9.2) \quad \sigma_j(x) = \exp \left(\int_{a_j}^x \sum_{\lambda} (t_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda} - \bar{t}_{\lambda} \omega_{\lambda}) \right) \quad x \in U_j$$

とおけば

$$b_{jk}(t) = \sigma_j(x)^{-1} \sigma_k(x)$$

さて B_t -valued 微分式 $\{\psi_j\}$ $\psi_j = b_{jk}(t) \psi_k$ を考える。 $|b_{jk}| = 1$ だから, 内積は $\int_{\Gamma} \psi_j \wedge \bar{\psi}_j$ によつてきめればよい。 $\{\psi_j\}$ が型 $(1, 0)$ のとき $\{\varphi_j\}$, $\varphi_j = \psi_j^+ = -\sqrt{-1} \bar{\psi}_j$ (§E参照) を考えると, これは型 $(1, 0)$ の

B_{-t} - valued 微分式である。

$\{\psi_j\}$ が調和的であることは $\{\varphi_j\}$ が調和的であるのと同値で、それは $d''\varphi_j=0$ であらわされる。

$U_j \wedge U_k$ で $\varphi_j = b_{jk}(t)^{-1} \varphi_k$ だから、 $\sigma_j^{-1} \varphi_j = \sigma_k^{-1} \varphi_k$ 。これで決る Γ 全体での微分式を φ とおくと、条件 $d''\varphi_j=0$ は

$$(9.3) \quad d''\varphi + e\left(\sum_{\lambda} t_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda}\right) \varphi = 0$$

となる。ここに $e(\alpha)$ は、微分式 φ にその左から微分式 α をかけるという演算をあらわす。

今 $t_0 = (t_{0\lambda}) \in \bar{A}$ を、 J の 0 に対応しない定点とすれば、その近傍で (9.3) の解は t について正則であるようにとれる。 $\dim H^0(\Gamma, \Omega^1(B_t)) = g-1$ ($t \neq 0$) だから、このことは基本補題 4.8 として判っていることであるが、直接にみるにはつぎのようにすればよい：

Γ 上の微分式の線型空間において内積 $(\varphi, \varphi') = \int_{\Gamma} \varphi \wedge \bar{\varphi}'$ を考える。微分作用素 $d''(t_0) = d'' + e\left(\sum t_{0\lambda} \bar{\omega}_{\lambda}\right)$ およびその adjoint $\delta''(t_0)$ を考え、

$\square(t_0) = d''(t_0) \delta''(t_0) + \delta''(t_0) d''(t_0)$ を考えると、これに対しても調和微分式に関する基本定理 (§C) がなりたち、特に Green の作用素 $G(t_0)$ が存在する。

$$\tau_{\lambda} = t_{\lambda} - t_{0\lambda} \quad \text{とおくと、}$$

$$(9.4) \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-G(t_0) \delta''(t_0) e\left(\sum \tau_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda}\right) \right)^k \varphi(t_0)$$

で与えられる $\varphi(t)$ は (9.3) をみたす。ここに $\varphi(t_0)$ は $t=t_0$ に対する (9.3) の一つの解である。実際 $t_0 \neq 0$ (in J) のため、 $\square(t_0)$ についての型 (1.1) の調和微分式は 0 以外に存在しない。そこで (9.4) が十分小さな $|t|$ に対して都合のよい収束性をもつことを示せば、項別微分によつて (9.4) が (9.3) の解なることがわかる。収束性については略する。(Nakano [10] 参照)

$H^0(\Gamma, \Omega^1(B_{-t_0}))$ の基底 $\{\varphi^{(\mu)}(t_0)\}$ $\mu=1, \dots, g-1$ から出発して、(9.4) により $\{\varphi^{(\mu)}(t)\}$ を作れば、 t_0 の近傍では t について正則な $H^0(\Gamma, \Omega(B_{-t}))$ の基底の族がえられる。従つて $J' = J - (0)$ とおけば $\bigcup_{t \in J'} H(\Gamma, \Omega(B_{-t}))$ は J' 上の解析的ベクトル・バンドルをなす。 $(H^0(\Gamma, \Omega^1(B_{-t})))$ が t 上のファイバーである。 $\bigcup_{t \in J'} H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$ は、このバンドルに双対的なバンドルとして、やはり J' 上の解析的ベクトル・バンドルをなすはずである。基底の族 $\{\varphi^{(\mu)}(t)\}$ に対して

$h_{\mu\nu}(t) = (\varphi^{(\mu)}(t), \varphi^{(\nu)}(t))$ とおき, $\psi^{(\mu)}(t) = \sum_{\nu} h_{\mu\nu}(t) \varphi^{(\nu)}(t)$ を $H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$ の基底の族としてとるとよい。 $\{\varphi(t)\}$ の基底のとりかえが行列 $G(t)$ によつて行われるとき, $\{\psi(t)\}$ のとりかえは ${}^tG^{-1}$ によつて行われる。

$\bigcup_{t \in J} H^1(\Gamma, \Omega(B_t)) = Y'$ とかくことにする。

3° アフィン・バンドルの族 $H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$ の基底 $\{\psi^{(\mu)}(x, t)\}$ をきめると Y' の元 ψ は $\psi(x, t, s) = \sum_{\mu=1}^{g-1} s_{\mu} \psi^{(\mu)}(x, t)$ とかける。この $\psi \pmod{C^*}$ に対してアフィン・バンドル E が一つきまる。それは transition matrix では

$$(9.5) \quad A_{jk}(t) = \begin{pmatrix} b_{jk}(t) & c_{jk}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(9.5) \quad \begin{cases} b_{jk}(t) = \exp\left(-\int_{a_j}^{a_k} \Sigma(t_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda} - \bar{t}_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda})\right) \\ c_{jk}(t) = \int_{a_j}^{a_k} \exp\left(-\int_{a_j}^x \Sigma(t_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda} - \bar{t}_{\lambda} \bar{\omega}_{\lambda})\right) \psi(x, t, s) \end{cases}$$

で与えられる。 $W' = Y' - (0\text{-切断面})/C^*$ とおくと, このようにして複素多様体 W' で parametrize されたバンドルの変形族 $\mathcal{E}' \rightarrow \Gamma \times W'$ がえられた。

$(t, s) = u$ とかきあらわし, adjoint map によりこのバンドルに associate されたバンドルを考える。

G の一般の元を $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とかけば, G の左不変 Maurer-Cartan 微分式は

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dx & dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1}dx & x^{-1}dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる。 } \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で変形すると

$$\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1}dx & y^{-1}dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1}dx & ax^{-1}dy - bx^{-1}dx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。従つて Maurer-Cartan 微分式 (i.e. リー環の元の成分) を $\begin{pmatrix} x^{-1}dy \\ x^{-1}dx \end{pmatrix}$

とならべてかくことにすれば

$$ad \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従つて上の $E(u)$ に対し, § 5 によつてこれに対応する $\Xi(u)$ は transition matrix

$$\begin{pmatrix} b_{jk} & -c_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる } \mathbb{C}^2\text{-bundle の切断面芽の層である。}$$

この状態の下に $\tau_u \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau} \lambda} \right)$ を与えるコサイクル $\left\{ \begin{pmatrix} \xi_{jk} \\ \theta_{jk} \end{pmatrix} \right\}$ は (4.5) および § 5 によつて

つぎの式で与えられる。

$$(9.6) \quad \begin{cases} \xi_{jk} = \frac{\partial c_{jk}}{\partial \bar{\tau} \lambda} - c_{jk} \cdot b_{jk}^{-1} \frac{\partial b_{jk}}{\partial \bar{\tau} \lambda} \\ \theta_{jk} = b_{jk}^{-1} \frac{\partial b_{jk}}{\partial \bar{\tau} \lambda} \end{cases}$$

一方 0 次元コチエイン $\left\{ \begin{matrix} \eta_j \\ \varsigma_j \end{matrix} \right\}$ のコバウンダリーは

$$(9.7) \quad ad \left(A_{jk} \right) \begin{pmatrix} \eta_k \\ \varsigma_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta_j \\ \varsigma_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{jk} \eta_k - c_{jk} \varsigma_k - \eta_j \\ \varsigma_k - \varsigma_j \end{pmatrix}$$

そこで定理 7.2', 7.3' を $\mathcal{C}' \rightarrow \Gamma \times W'$ に適用する。まず 0-コチエインがコサイクルである条件をみると, 第一に $\varsigma_j = \varsigma_k = \varsigma$. これから ς は定数となる。

$\varsigma = 0$ なら $\{\eta_j\} \leftarrow H^0(\Gamma, \Omega(B_t))$ であつて ($t \neq 0$ のため) $\eta_j = 0$ である。

$\varsigma \neq 0$ なら全体を ς でわると, $\{(\eta_j/\varsigma_j)\}$ は $H^0(\Gamma, \Omega(E(u)))$ の元を与えることになる。 $E(u)$ が B_t に reduce しないからこのときも $\eta_j = 0$. 結局 $H^0(\Gamma, \Xi(u))$

$= 0$ Riemann-Roch の定理から $\dim H^0(\Gamma, \Sigma(u))$ は u に無関係に $2g-2$ となる。

そこでつぎには $\tau_u \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau} \lambda} \right) = 0$. $\tau_u \left(\frac{\partial}{\partial \bar{s} \mu} \right) = 0$ を各々の u について示せばよい。

後者の方は明らかである。前者については, (9.6) で与えられる $\begin{pmatrix} \xi_{jk} \\ \theta_{jk} \end{pmatrix}$ が, (9.7) の形に

(正則な η_j, ς_j を使つて) かけることを示せばよい。

$$\theta_{jk} = \int_{a_j}^{a_k} \omega_\lambda \quad \text{だから, } \varsigma_j = - \int_{a_j}^x \omega_\lambda \quad \text{とおけば第二成分については}$$

OKである。第1成分については、まず

$$(9.8) \quad \eta_j = - \int_{a_j}^x \sigma_j(y)^{-1} \left\{ \int_{a_j}^y \omega_\lambda \psi(y) + \frac{\partial \psi(y)}{\partial \bar{t}^\lambda} \right\} \\ + \int_{a_j}^x \sigma_j(y)^{-1} \psi(y) \times \int_{a_j}^x \omega_\lambda$$

とおけば、必要な関係式

$$(9.9) \quad b_{jk} \eta_k - \eta_j = \zeta_{jk} + c_{jk} \zeta_k \text{ がみたされることはすぐにわかる。}$$

この $\{\eta_j\}$ は正則ではないが、 η_j を $\eta_j + \sigma_j^{-1} \cdot f$ (f は Γ 上の C^∞ -函数) でおきかえても (9.9) はなりたつから、 f を適当にえらんで

$$d''(\eta_j + \sigma_j^{-1} f) = 0$$

がなりたつようにすればよい。 $d'' \eta_j = -\sigma_j(x)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}^\lambda}$ だから、この条件は

$$(9.10) \quad \{d'' - e(\sum t_\lambda \bar{\omega}_\lambda)\} f = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}^\lambda}$$

とかける。

以上は u をきめた上で考えるのであつた。従つて考えている t を t_0 ととつて ψ が (9.4)

以下によつてきめられていると考えてよい。そうすると $h_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} + O(t-t_0)^2$

となるから (9.10) の右辺で $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}^\lambda}$ は $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}^\lambda}\right)$ でおきかえてよい。 φ に対し (9.4)

を使うと

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}^\lambda}\right)_{t=t_0} = -G(t_0) \delta''(t_0) e(\bar{\omega}_\lambda) \varphi(t_0) = -\delta''(t_0) G(t_0) e(\bar{\omega}_\lambda) \varphi(t_0)$$

$\delta''(t_0) = - * \{d' - e(\sum \bar{t}_{0\nu} \omega_\nu)\} *$ である。(この点 Nakano [10] には符号の

誤りがある。) 従つて

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}^\lambda}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}^\lambda}\right)_{t=t_0} = \pm \sqrt{-1} \{d'' - e(\sum t_{0\nu} \bar{\omega}_\nu)\} * G(t_0) e(\omega_\lambda) \varphi(t_0)$$

であり, (9.10) は解 f をもつことがわかる。

これによつてつぎの定理が証明された。

定理 9.1 $\mathcal{E}' \rightarrow \Gamma \times W'$ に対し定理 7.2', 7.3' の条件がなりたつ。

従つて $\mathcal{E}' \rightarrow \Gamma \times \omega'$ は唯一つの CAF 構造をもつ。

4° W' のコンパクト化 $\bigcup_{t \in J} H^\circ(\Gamma, \Omega^1(B_{-t}))$ は, $t=0$ の所で特異性を示すので, J 上のベクトル・バンドルではない。しかし $t=0$ を中心とした J の quadratic transform $\tilde{J}$ を考えると, 自然な方法で $\bigcup_{t \in J} H^\circ(\Gamma, \Omega^1(B_{-t}))$ が $\tilde{J}$ 上の $\mathbb{C}^{g-1}$ バンドルに拡張できる。双対的に Y' も $\tilde{J}$ 上の $\mathbb{C}^{g-1}$ バンドル Y に拡張でき, W' は $W = Y - (0\text{-切断面})/\mathbb{C}^*$ なるコンパクト化をもつ。 W をパラメーター空間とするバンドルの C^∞ -変形族で $\mathcal{E}'$ の拡張であるものも直ちに作れるが, それが解析的変形族になるかどうか。筆者は知らない。これらの詳細は略する。

代数曲線のヤコビ多様体を, principally normalized であるアーベル多様体の変形族の中で考えたとき, $\tilde{J}$ 上のベクトル・バンドル Y がどんなアーベル多様体 (の quadratic transform) の上に拡張できるか, わかれば面白いかも知れない。

§ 10 基本群のユニタリ表現とバンドル族

この § では Narasimhan - Seshadri による結果 [12] を紹介する。 Γ を種数 g が 2 以上の代数曲線, Π を Γ の基本群とする。与えられた n に対し $\Pi \rightarrow U(n)$ の既約表現の全体 M_1 および表現としての同値性による同値類の全体 M は自然な方法で実解析多様体となる。 $M_1 \ni \rho, \rho'$ に対し, それらに対応する Γ 上の $\mathbb{C}^n$ -バンドル $W(\rho), W(\rho')$ がひとしいのは, ρ と ρ' とが表現として同値なときに限ることが云える。それ故, M をパラメーター空間とする Γ 上の $\mathbb{C}^g$ -バンドルの変形族 $\mathcal{P}$ ができる。これに対し定理 7.1', 7.2' が適用されて, M には自然な複素構造が入り, $\mathcal{P}$ には局所的に CAF 構造が入る。以上が結果の要約である。 $n=1$ のとき $M=J$ であつて, M 上の解析関数が即ちアーベル関数であつた。 $n>1$ のとき, M はコンパクトではないが, M をコンパクト化してその上に意味のある函数論が展開できるならば, おもしろいであろう。N-S 両氏により, (Projective invariant theory に関する Mumford の結果を利用して) M があるコンパクト化をもちそれが射影空間内の algebraic variety であることが示されている。しかしバンドルの変形族という意味と結びついたコンパクト化があるわけではない。

1° 記号 $\tilde{\Gamma}$ を Γ の普遍被覆リーマン面とする。 Γ の基本群 Π は, $2g$ 個の元 $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ によつて, 唯一つの関係 $\prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = e$ によつて生成される。即ち $\{e\} \rightarrow N \rightarrow F \xrightarrow{\eta} \Pi \rightarrow \{e\}$ (exact). ここに F は $a_1, \dots, b_g$ で生成される自由群であり, N は上式左辺で生成される F の正規部分群である。

$U(n)$ の $2g$ 個の直積を Ω とし, $(2i-1)$ 番目の factor への射影を p_i , $2i$ 番目の factor への射影を q_i とかく。 $\Omega \ni u \rightarrow f(u) = \prod_{i=1}^g p_i(u) q_i(u) p_i(u)^{-1} q_i(u)^{-1} \in S U(n)$ なる f を考えると, $\mathcal{R} = f^{-1}(e)$ は $\Pi \rightarrow U(n)$ の表現の全体を与えると考えてよい。($\mathcal{R}$ の元 u は表現 $\rho: \rho(a_i) = p_i(u), \rho(b_i) = q_i(u)$ に対応する。) 表現の全体に位相を入れるには, $U(n)^\Pi$ の部分空間と考えるのが自然だが, それは Ω の部分空間としての $\mathcal{R}$ の位相と同じである。

一般に Π が微分多様体 X の基本群で, $\rho: \Pi \rightarrow GL(V)$ が実ベクトル空間 V の自己同型群への表現であるとき, ρ に対応する X 上の C^∞ -ベクトルバンドルを $D(\rho)$ とかく。 X の普遍被覆空間を $\tilde{X}$ とするとき, $D(\rho)$ は $\tilde{X} \times V$ を同値関係 $(x, r, v) \sim (x, \rho(r)v)$ でわつてえられる。§8 でみたように, $D(\rho)$ を局所的に直積してあらわすとき, transition matrix が constant になるようにできる。従つて $D(\rho)$ -valued 微分式の加群 $A(D(\rho)) = \sum A^q(D(\rho))$ に対して外微分 d が定義され, $(A(D(\rho)), d)$ は cochain complex となる。 X が複素多様体で V が複素ベクトル空間のとき, ρ に対応する解析的ベクトルバンドルを $\mathcal{W}(\rho)$ とかく。

2° 群のコホモロジーと $A(D(\rho))$ のコホモロジー。 G が一つの群, M が左 G -加群であるとき, 群 G の M -valued コホモロジー群 $H^q(G, M)$ なるものが定義できる。差当り必要なところだけあげておくと,

$$C^0(G, M) = M, H^0(G, M) = Z^0(G, M) = \{m \in M \mid \sigma m = m\} = M^G,$$

$$C^1(G, M) = \{f \mid f \text{ は } G \rightarrow M \text{ の写像}\}, Z^1(G, M) = \{f \mid f(\sigma\tau) = \sigma f(\tau) + f(\sigma)\}$$

$$B^1(G, M) = \{f \mid f(\sigma) = \sigma m - m\}, H^1(G, M) = Z^1(G, M) / B^1(G, M)$$

である。

これに関してつぎの事実がなりたつ。

(a) F が $a_1, \dots, a_k$ で生成される自由群で, M が F -加群であるとき, $m_1, \dots, m_k \in M$ を任意に与えると, 1-cocycle $\delta \in Z^1(F, M)$ で $\delta(a_j) = m_j$ なるものが一つ, 唯一つ存在する。

(b) $F \xrightarrow{\eta} \Pi$ が代数曲線の基本群に関して既出の意味をもち、 ρ が $\Pi \rightarrow GL(V)$ の表現であるとき、 V は ρ によつて Π -加群とみられ、 $\rho \circ \eta$ によつて F -加群とみられる。

$Z = Z^1(F, V)$ の部分群、 $Z_1 = \{f \in Z \mid f(\prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 0 \ \forall \prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \in Z^1(\Pi, V)\}$ と同型である。

Proposition 10.1 X を連結、コンパクトな微分多様体、 Π をその基本群とし、 V 、 ρ 、 $D(\rho)$ が 1° における意味をもつとする。このとき $H^1(\Pi, V) \cong H^1(A(D(\rho)), d)$ である。

(証明) $\tilde{X} \rightarrow X$ の covering map を π とする。 $\pi^* D(\rho)$ は $\tilde{X}$ 上の直積バンドルである。 $D(\rho)$ の定義から、 $A^1(D(\rho)) \ni \varphi$ に対し、 $\tilde{\varphi} = \pi^* \varphi$ は $\tilde{X}$ 上の V -valued 1 次微分式で

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}r) = \rho(r)^{-1} \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \quad (\tilde{x} \in \tilde{X}), r \in \Pi$$

をみたすものとなる。(逆にこのような $\tilde{\varphi}$ は φ を定める。)

$d\varphi = 0 \iff d\tilde{\varphi} = 0$ であり、 $\tilde{X}$ は単一連結だから、このとき $\tilde{X}$ 上の関数 ψ があつて $\tilde{\varphi} = d\psi$ となる。 $\omega(\tilde{x}, r) = \psi(\tilde{x}r^{-1}) - \rho(r)\psi(\tilde{x})$ とおくと、 $\omega(\tilde{x}, r)$ は V -valued な関数で $d\omega = 0$ 。従つて $\omega(\tilde{x}, r)$ は $\tilde{x}$ に無関係に、 r だけで決まる V の元である。

$\omega(r)$ は $Z^1(\Pi, V)$ の元であつて、上の対応が $H^1(A(D(\rho)), d) \rightarrow H^1(\Pi, V)$ の同型対応を定める。その詳細は省略するが、上の対応が surjective になるという点についてだけ要点をのべる。

$\tilde{X} \supset U \supset Y$ 、 $\bar{U}$ はコンパクト、 Y は閉集合で $\pi(Y) = X$ なる $U \supset Y$ をとり、 $\tilde{X}$ 上の実数値 C^∞ 関数 h' で $h'(\tilde{x}) = 0$ for $\tilde{x} \in \tilde{X} - U$ 、 $h'(\tilde{x}) = 1$ for $\tilde{x} \in Y$ 、 $0 \leq h' \leq 1$ なる条件をみたすものとする。そこで $h(\tilde{x}) = h'(\tilde{x}) / \sum_{r \in \Pi} h'(\tilde{x}r)$ 、 $h^r(\tilde{x}) = h(\tilde{x}r)$ とおく。こうすれば $\{h^r(\tilde{x})\}_{r \in \Pi}$ は $\tilde{X}$ 上での微分可能な 1 の分割である。

そこで $\{\omega(r)\} \in Z^1(\Pi, V)$ に対して $\psi(\tilde{x}) = \sum_{\delta \in \Pi} h(\tilde{x}\delta) \omega(\delta)$ とおけば、 $\psi(\tilde{x}r^{-1}) = \omega(r) + \rho(r)\psi(\tilde{x})$ がなりたつて $d\psi = \tilde{\varphi}$ が $A^1(D(\rho))$ の閉微分式を与える。

3° ユニタリー表現とベクトル・バンドル

Proposition 10.2 X は連結、コンパクトな複素多様体とし、 Π 、 $\tilde{X}$ 、 π 、 V 、 ρ は 1° および前の Prop. と同様の意味をもつとする。ただし V は複素ベクトル空間で Hermitian

metric をもち, ρ は $\Pi \rightarrow U(V)$ の表現だとする。このとき $H^1(\Pi, V) = H^1(X, \Omega(W(\rho)))$ である。

(証明) 上の Prop. の場合と同様に $H^1(X, \Omega(W(\rho))) \ni \varphi$ は, $\tilde{\varphi} = \pi^* \varphi$ なる関係によつて, $\tilde{X}$ 上の V -valued な正則函数 $\tilde{\varphi}$ で, $\tilde{\varphi}(\tilde{x}r^{-1}) = \rho(r)\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ をみたすものと, 一対一の対応をなす。

V の基底を適当にとれば, $\tilde{\varphi}$ は $n (= \dim_{\mathbb{C}} V)$ 個の複素数値正則函数の組 ${}^t(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)$ となり $\rho(r)$ はユニタリー行列となる。従つて $\sum_j |\tilde{\varphi}_j(\tilde{x})|^2$ は X 上の函数となる。しかもこれは多重劣調和である。 X がコンパクトだから $\sum_j |\tilde{\varphi}_j(\tilde{x})|^2$ は定数でなければならない。そうすれば $\tilde{\varphi}_j$ 自身が定数でなければならない。

定理 10.3 X は連結, コンパクトな複素多様体とする。 X の基本群 Π の $U(n)$ 内への表現 ρ_1, ρ_2 があるとき

$$W(\rho_1) = W(\rho_2) \iff \rho_1 \sim \rho_2 \text{ (表現として同値) である。}$$

(証明) Π から $GL(n, \mathbb{C})$ への表現 R を $n \times n$ 行列 A に対し, $R(r)A = \rho_1(r)A \cdot \rho_2(r)^{-1}$ によつて定める。 $\text{tr}({}^t \overline{A}, A)$ が $R(r)$ で不変であるから, R はユニタリー表現である。ところで

$$W(\rho_1) = W(\rho_2) \iff \exists f: \tilde{X} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \text{ の正則写像で}$$

$$f(\tilde{x}r^{-1}) = \rho_1(r)f(\tilde{x})\rho_2(r)^{-1}$$

Prop. 10.2 によつて, このような f は constant matrix である。

注意 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ で ρ が既約のときを考えると, この定理の論法と Schur の補題とを用いて $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega(W(ad\rho))) = 1$ がでる。従つて $W(\rho)$ は indecomposable である。逆に ρ が可約なら $W(\rho)$ が decompose することは当然である。

Proposition 10.4 X は連結, コンパクトなケーラー多様体であるとし, $\pi, \tilde{X}$, Π の意味は前同様とする。 V は実ベクトル空間, $\tilde{V} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とする。 ρ が $\Pi \rightarrow O(V)$ ($= V$ の直交変換の群) の表現であるとき, ρ の $\mathbb{C}$ -linear な拡張は $\Pi \rightarrow U(\tilde{V})$ の表現である。このとき実ベクトル空間として

$$H^1(\Pi, V) \cong H^1(X, \Omega(W(\tilde{\rho})))$$

(証明) Prop. 10.1により, $H^1(\Pi, V) \cong H^1(A(D(\rho)), d)$ である。Xの Kähler metric と, $D(\rho)$ の transition matrix が直交変換であることを用い, $A^q(D(\rho))$ に内積を入れて考えると (§E と同様な考え) $H^1(A(D(\rho)), d)$ は 1 次 $D(\rho)$ -valued 調和微分式の空間 $H^1(D(\rho))$ と同型である。調和というのは, $\Delta = d\bar{\partial} + \bar{\partial}d$ に対してである。(transition matrix が constant であるため, ふつうの微分式に対すると同じ $d, \bar{\partial}$ が使える。) 複素数値微分式の空間 $\tilde{A}^1(D(\rho)) = A^1(D(\rho)) \otimes \mathbb{C}$ を考えると, $\tilde{A}^1(D(\rho))$ は型 $(1, 0)$ と型 $(0, 1)$ との部分空間の直和となり $\Delta = 2\Box\bar{\Box} = d''\bar{\partial}'' + \bar{\partial}''d''$ (§D 参照) のため調和微分式の空間も $H^1(\tilde{D}(\rho)) = H^1(1, 0)(\tilde{D}(\rho)) \otimes H^1(0, 1)(\tilde{D}(\rho))$ と直和にわかれる。 $H^{(0, 1)}$ は $H^1(X, \Omega(W(\tilde{\rho})))$ と同型であるから, Proposition が証明された。

4° 既約表現の空間 M_1 Γ は genus $g \geq 2$ の代数曲線, Π はその基本群とする。
その他今までの記号を用いる。

Proposition 10.5 ρ を $\Pi \rightarrow U(n)$ の表現とし, $U(n)$ のリ-環 $\tilde{\mathcal{U}}(n)$ を $ad\rho$ によつて Π -加群とみる。

このとき

$$\dim_{\mathbb{R}} H^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) = 2n^2(g-1) + 2 \dim_{\mathbb{R}} H^0(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n))$$

(証明) $W(ad\rho)$ によつて, $ad\rho$ に対応するファイバー $\mathcal{U}(n, \mathbb{C})$ のベクトルバンドルをあらわすと, $\mathcal{U}(n, \mathbb{C}) = \tilde{\mathcal{U}}(n) \otimes \mathbb{C}$ のため

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\Pi, \mathcal{U}(n, \mathbb{C})) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))),$$

$$\dim_{\mathbb{R}} H^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) = 2 \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho)))$$

ところで $W(ad\rho)$ に対し Hirzebruch の公式 (Hirzebruch [4], §21)

$$\chi(X_k, W) = \kappa_k [(e^{\delta_1} + \dots + e^{\delta_n}) \prod_{i=1}^k \frac{r_i}{1 - e^{-r_i}}]$$

を適用する。 $k=1, X_k = \Gamma, r_1 = -(2g-2)$ (fundamental class)

$\delta_1 + \dots + \delta_n = W(ad\rho)$ の第一-Chern class = 0 から

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))) = -n^2(g-1)$$

これから証明すべき等式がえられる。

Proposition 10.6 表現 ρ が既約 $\iff \dim_R H^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) = 2 \{ n^2(g-1) + 1 \}$

(証明) Prop. 10.5 により右辺の条件は $\dim H^0(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) = 1$ と同値である。

Schur の lemma により, これは ρ が既約なことと同値である。

$\Pi \rightarrow U(n)$ の表現の全体 $\tilde{\mathcal{U}} = f^{-1}(e)$ を考える。

$\mathcal{R}$ の一点 ρ における Ω の接空間を Ω_ρ とかく。写像 $f: \Omega \rightarrow SU(n)$ の微分 $(df)_\rho: \Omega_\rho \rightarrow s\tilde{\mathcal{U}}(n)$ を D_1 とかくと,

Proposition 10.7

$\text{Ker}(D_1) \cong Z^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n))$ なる自然な同型対応がある。

(証明) $SU(n)$ 上の右不変 Maurer-Cartan 微分式の (一次独立な) 一組を ω とすれば, Ω 上では $df \cdot f^{-1} = f^* \omega$ となる。そして $\text{Ker} D_1 = \{ v \in \Omega_\rho \mid df \cdot f^{-1}(v) = 0 \}$ $v \in \Omega_\rho$ は Ω 上の右 translation によつて $\tilde{\mathcal{U}}(n)$ の元の組 $(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)$ と同一視できる。これに対し $2^0(a)$ のように, 唯一つの元 $\delta v \in Z^1(F, \tilde{\mathcal{U}}(n))$ があつて, $\delta v(a_i) = A_i, \delta v(b_i) = B_i$ となる。

ところが, $df \cdot f^{-1}(v) = \delta v(\Pi(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}))$ なる関係式がなりたつ。なぜなら $\Phi = \Omega \times F \ni (u, r) \rightarrow u(r) \in U(n)$ なる写像を考えると, $\Phi(u, r_1 r_2) = \Phi(u, r_1) \cdot \Phi(u, r_2)$ 。これを微分すれば $(d\Phi \cdot \Phi^{-1})_\rho(v) = \psi(\psi$ は $F \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(n)$ の写像) がコサイクルであることがわかる。

$$d\Phi(\rho, a_1) \cdot \Phi(\rho_1, a_1)^{-1} = (d\rho_1 \cdot \rho_1^{-1})_\rho(v) = A_i$$

だから $\psi(a_i) = A_i$, 同様に $\psi(b_i) = B_i$ 従つて $\psi = \delta v$ である。

$\Phi(u, \Pi(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})) = f(u)$ から, $\delta v(\Pi(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})) = \psi(\Pi(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})) = df \cdot f^{-1}(v)$ がえられる。そうすれば, $2^0(b)$ により $\text{Ker}(D_1) = Z_1 = Z^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n))$ である。

定理 10.8 $\Pi \rightarrow U(n)$ の既約表現の全体 M_1 は Ω の部分多様体をなし, $\rho \in M_1$ における M_1 の接空間 $M_{1,\rho}$ は $Z^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n), \rho)$ と自然な同型対応をもつ。

(証明) $\dim_R Z^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) = \dim_C H^1(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) + (\dim_R \tilde{\mathcal{U}}(n)) - \dim_R Z^0(\Pi, \tilde{\mathcal{U}}(n)) = 2n^2 g - n^2 + \dim H^0(\Pi, \text{ad } \rho)$

従つて ρ が既約のとき $\text{Ker}(D_1)$ は可能な最小値をとる。(即ち f のヤコビアン の階数が最大, それは $n^2 - 1 = \dim SU(n)$ にひとしい。) 従つて定理がえられる。

注意 M_1 は空ではない。 $g \geq 2$ のときはユニタリー行列の既約な system $\alpha_1, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g$ を $\Pi(\alpha_i, \beta_i, \alpha_i^{-1}, \beta_i^{-1}) = e$ なるようにえらぶことは可能である。 M_1 はまたコンパクトではない。

5° 既約表現の同値類の空間 M $\Omega \ni u = (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g)$ に対し, $t \in U(n)$ を $u \rightarrow tut^{-1} = (tx_1t^{-1}, \dots, ty_gt^{-1})$ と作用させる。これで $U(n)$ の中心によるその剰余群 U_1 が Ω に作用することになる。 M_1 は U_1 で stable であつて, $(M_1 \ni u$ に対して $(x_1, \dots, y_g)$ が既約な行列の一系列をなすことから, U_1 は M 上には faithfully に作用する。従つて $M = M_1 / U_1$ は (実解析的) 多様体の構造をもち, $p: M_1 \rightarrow M$ は U_1 -主バンドルの構造をもつ。

Proposition 10.9 $p: M_1 \rightarrow M$, $p(\rho) = m$ なるとき定理 10.8 のように $M_1 p = Z^1(\Pi, \tilde{u}(n))$ とみれば

$$\text{Ker}(dp)\rho = B^1(\pi, \tilde{u}(n), \rho)$$

$$M_m \cong H^1(\pi, \tilde{u}(n), \rho) \quad \text{となる。}$$

(証明) $U(n) \ni t$ によつて $\rho = (x_1, \dots, y_g)$ は $(tx_1t^{-1}, \dots, ty_gt^{-1})$ へうつる。今 $t = \exp(\lambda Y)$ ($Y \in \tilde{u}(n)$) とすると,

$$\frac{d}{d\lambda} (tx_it^{-1}x_i^{-1})|_{\lambda=0} = Y - x_i Y x_i^{-1},$$

$$\frac{d}{d\lambda} (ty_it^{-1}y_i^{-1})|_{\lambda=0} = Y - y_i Y y_i^{-1}.$$

これは U_1 の作用による ρ の orbit の接ベクトルが (定理 10.8 の identification において) コバウンタリーであることを示す。 $\text{Ker } dp$ は orbit の接空間に他ならぬ。

6° バンドルの変形族 $\tilde{\Gamma} \times M_1 \times GL(n, \mathbb{C})$ において, 同値関係 $(\tilde{x}, \rho, g) \sim (\tilde{x}r, \rho, p(r)^{-1}g)$ を考え, これによる商空間を $\tilde{\mathcal{P}}_1$ とする。自然な射影 $\tilde{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \tilde{\Gamma} \times M_1$ なるによつて $\tilde{\mathcal{P}}_1$ は M_1 をパラメーター空間として $\tilde{\Gamma}$ の $GL(n, \mathbb{C})$ -主バンドルの族をなす。そして $M_1 \ni \rho$ に対し $\tilde{\mathcal{P}}_1$ の $\tilde{\Gamma} \times \rho$ 上の restriction $\tilde{\mathcal{P}}_1|_{\tilde{\Gamma} \times \rho}$ は ρ に対応する主バンドル

$P(\rho)$ に他ならない。

$\tilde{\Gamma} \times M_1 \times GL(n, \mathbb{C})$ には $U(n) \ni t$ の作用 $(\tilde{x}, \rho, g) \rightarrow (\tilde{x}, t\rho t^{-1}, tg)$ が定義され、これは上の同値関係と両立する。従つて $U(n)$ は $\tilde{\rho}_1 \rightarrow \Gamma \times M_1$ に作用し、それによる商空間としてバンドル $\tilde{\rho} \rightarrow \Gamma \times M$ がえられる。 $m \in M$ に対し $\tilde{\rho}|_{\Gamma \times m}$ は表現の同値類 m に対応する主バンドルであり、定理 10.3 により、 m が異なれば解析的バンドルとしても異なる。

Proposition 10.10 バンドルの変形族 $\tilde{\rho}_1 \rightarrow \Gamma \times M_1$ に対応する

$\tau_\rho: M_1 \rightarrow H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho)))$ は

$$M_1 \xrightarrow{\delta} Z^1(\Pi, \tilde{\alpha}(n), \rho) \xrightarrow{\eta} H^1(\Pi, \tilde{\alpha}(n), ad(\rho)) \xrightarrow{\kappa} H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho)))$$

の合成によつてえられる。ここに δ は Prop. 10.7, 定理 10.8 にいう同型, η は $Z^1 \rightarrow H^1$ の自然な surjection, κ は Prop. 10.4 にいう同型対応である。

(証明) Γ の開被覆 $\{U_j\}$ に関し、 $P(\rho)$ が transition matrix $\{g_{jk}\}$ で与えられるとする。この g_{jk} は §8 に示したように $g_{jk} = \rho(r_{jk})(r_{jk} \in \Pi)$ としてきめられる。 $M_1 \ni \rho$ に対し、 $\tau_\rho(v)$ は 1-cocycle $(vg_{jk}) \cdot g_{jk}^{-1}$ で与えられ、一方写像 δ は $\delta(v)(r) = d\Phi(\rho, r)\Phi(\rho, r)^{-1}(v)$ で与えられた。従つて $\delta(v)(r_{jk}) = (vg_{jk}) \cdot g_{jk}^{-1}$ である。こうしてきまるコホモロジー類を問題にしているのであるから、Prop. がなりたつ。

変形族 $\tilde{\rho} \rightarrow \Gamma \times M$ における (無限小変形写像) τ_m を考えるには、 $M \ni m$ の上にくる M_1 の点 ρ を考える。

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\Pi, \tilde{\alpha}(n), \rho) & \xrightarrow{\eta} & H^1(\Pi, \tilde{\alpha}(n), \rho) \xrightarrow{\kappa} H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))) \\ \parallel & & \parallel \\ M_1, \rho & \xrightarrow{dp} & M_m \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \tau_m \end{array}$$

なる commutative diagram がなりたち、 τ_m は R -同型になる。 m の上にくる二点 $\rho_1, \rho_2 \in M_1$ をとると、 $\rho_2 = t\rho_1 t^{-1}$ 。これに対応して $W(ad\rho_1)$ と $W(ad\rho_2)$ とが同型であり、 $H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho_i)))$ ($i=1, 2$) の間に $\mathbb{C}$ -同型がある。これによつて両者を同一視するとき、上の τ_m は ρ のとり方に無関係に定まつた写像となり、これが $\tilde{\rho} \rightarrow \Gamma \times M$ の τ_m を与えている。

これでわかるとおり、変形像 $\tilde{\rho} \rightarrow \Gamma \times M$ に定理 7.1', 7.2' が適用できる。

$H^0(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))) \cong \mathbb{C}$ のため、定理 7.3' は使えない。

定理 10.11 M には複素解析多様体の構造が入り，それに関し $p \rightarrow \Gamma \times M$ は局所的には CAF 構造をもつ。このような M の複素構造は唯一つである。

$M_1 \ni \rho \rightarrow \det(\rho) : \Pi \rightarrow \mathbb{C}^*$ の表現 $\det(\rho)(\gamma) = \det(\rho(\gamma))$ を考えると，これは M から Γ のヤコビ多様体 J への写像をひきおこす。 $M \rightarrow J$ は解析的なバンドルで，写像 $\mu : J \ni t \rightarrow \pi^t \in J$ による induced bundle $\mu^*(M)$ は直積 $M_0 \times J$ となる。 M_0 またはそのコンパクト化の性質がわかるとおもしろい。

§ A De Rham の定理

X を連結な微分可能多様体とする。 X の開集合 V における p 階 skew symmetric covariant tensor field を考える。それは局所座標 $x^1, \dots, x^n$ に関し成分 $\varphi_{i_1 \dots i_p}(x)$ をもつが、このとき表式

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (\wedge \text{は交代積})$$

は、局所座標のとり方に無関係な意味をもつ。この φ を、 V における p 次の (C^∞) 外微分式という。

X の接バンドルを T 、その dual を T^* とするとき、 p 次 C^∞ 外微分式とは、 $\bigwedge^p T^*$ の (C^∞) cross section のことだといつてもよい。

$A^p(V)$ によつて V における p 次 C^∞ 外微分式のなす R -ベクトル空間をあらわすと、

$$\text{外積 } \wedge, A^p(V) \times A^q(V) \rightarrow A^{p+q}(V)$$

$$\text{外微分 } d: A^p(V) \rightarrow A^{p+1}(V)$$

なる演算が定義できて、

$$(A, 0) \quad \varphi^p \wedge \psi^q = (-1)^{pq} \psi^q \wedge \varphi^p$$

0 次の微分式即ち函数 f に対して

$$(A, 1) \quad df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$(A, 2) \quad d(df) = 0$$

$$(A, 3) \quad d(\varphi^p \wedge \psi^q) = d\varphi^p \wedge \psi^q + (-1)^p \varphi^p \wedge d\psi^q$$

$$(A, 4) \quad d(d\varphi) = 0$$

がなりたつ。((1)~(3) は d を一意的にきめる)

そこで $A(X) = \sum_{q=0}^n A^q(X)$ ($n = \dim X$) に外微分 d を組合せて考えると、cochain complex になり、コホモロジー群

$$H^q(A(X), d) = d^{-1}(0) \cap A^q(X) / dA^{q-1}(X)$$

がえられる。これを q 次の de Rham 群とよぼう。($d\phi = 0$ なら ϕ は closed であるという。 $\phi = d\psi$ ならば ϕ は exact であるという)

$$\text{定理 A. 1} \quad H^q(A(X), d) \cong H^q(X, R)$$

右辺は実係数での X の q 次元コホモロジー群である。

外積によつて $H^*(A(X), d) = \sum H^q(A(X), d)$ に環の構造が入る。一方 $H^*(X, R) = \sum_q H^q(X, R)$ もカツプ積に環構造である。これに関して

$$\text{定理 A. 2} \quad H^*(A(X), d) \cong H^*(X, R) \quad (\text{環として同型})$$

証明には微分式芽の層 A^q を考えるとき,

$$0 \rightarrow R \rightarrow A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \rightarrow \dots$$

が constant sheaf R の fine resolution であることを使えばよい。上の列が exact であることは, Poincaré の lemma (の一つの形) である。

簡単のため X はコンパクトな可附号多様体だとして, この定理をいにかえる。

X の実係数 q 次元ホモロジー群 $H_q(X, R)$ は有限次元実ベクトル空間であり, (その次元数 $b_p = X$ の p 次元 Betti 数) $H^q(X, R)$ は H_q 上の実数値線型函数の空間に他ならない。定理 A. 1 でいう同型対応は, closed な微分式 ϕ^p に対し, $H_q(X, R)$ 上の函数

$$H_q(X, R) \ni z \rightarrow \int_{\zeta} \phi \in R$$

を対応させてえられている (ζ はホモロジー類 z を代表する一つのサイクルである。右辺が, $\phi \pmod{\text{exact}}$ の類と, $\zeta \pmod{\text{boundary}}$ の類とだけできまることは, Stokes の定理

$$\int_{\partial c} \phi = \int_c d\phi$$

からわかる)

$H_q(X, R)$ の一組の基底を (幾何学的意味の上から) 整係数サイクルのきめる類からえらんで $z_1, \dots, z_b$ とする。

$\sum c_j z_j$ をサイクル $\sum c_j z_j$ 上における ϕ の周期とよぶことにすると, 定理 A. 1 からつぎの (a), (b) がえられる。

(a) 任意に与えられた実数値 $\alpha_1, \dots, \alpha_b$ を $z_1, \dots, z_b$ の上での周期とする閉微分式 ϕ が存在する。

(b) 閉微分式 φ の, $z_1, \dots, z_b$ の上での周期がすべて 0 ならば, φ は exact である。

X が連結可附号なため, $H^n(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ である。そして $H^*(X, \mathbb{R})$ における積は,

$$H^q(X, \mathbb{R}) \times H^{n-q}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

なる dual pairing を与える。従つて $H^q(X, \mathbb{R})$ は $H^{n-q}(X, \mathbb{R})$ 上の線型函数の空間とみられ, 同型対応

$$\theta: H^q(X, \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-q}(X, \mathbb{R})$$

がえられる。 $H^*(X, \mathbb{R}) = \sum_q H^q(X, \mathbb{R})$ が環の構造をもつため, その θ による像として $H_*(X, \mathbb{R}) = \sum_q H_q(X, \mathbb{R})$ も環の構造が与えられる。 $H_p(X, \mathbb{R}) \times H_q(X, \mathbb{R}) \ni (z, \zeta) \rightarrow z \cdot \zeta \in H_{p+q-n}(X, \mathbb{R})$ また $H^n(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ なる上記同型対応に対応する写像 $H_0(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を, Kronecker Index といい, KI であらわす。

そうすれば定理 A. 2 は

$$(c) \quad \int_r \omega = \text{KI}(r \circ \theta(\omega))$$

$$(c') \quad \int_r \omega \wedge \psi = \text{KI}(r \circ \theta(\omega) \circ \theta(\psi)) = \int_{r \circ \theta(\omega)} \psi$$

などのような公式を与える。

§ B Dolbeault の定理

X を複素解析多様体とする。このときは解析的局所座標 $(z^1, \dots, z^m)$ に関して, p 次外微分式を

$$\varphi = \sum_{r+s=p} \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_r \\ \beta_1 < \dots < \beta_s}} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\beta_s}$$

とあらわし, 係数も複素数値函数を考えるのが自然である。(これは今まで考えた $A^p(V)$ に係数拡大 $\otimes \mathbb{C}$ を行い, basis をとりかえて書き表わしたにすぎない) 解析的座標の間の変換しか考えないから, 上式で (r, s) の与えられた値に対する項の和が, 一つの微分式をなす。従つて p 次微分式は, 型 (r, s) ($r+s=p$) の微分式の和に一意的にあらわされる。

即ち $A^p(V) = \sum_{r+s=p} A^{r,s}(V)$ 。

外微分 d は $d = \sum_i dx^i \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ($\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ は φ の各係数を $\frac{\partial}{\partial x^i}$ する意) とかけるが,

これも

$$d' = \sum_{\alpha} dz^{\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \quad d'' = \sum_{\alpha} d\bar{z}^{\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}}$$

と二つに分かれる。そして

$$d'^2 = 0, \quad d''^2 = 0, \quad d'd'' + d''d' = 0$$

d'' は微分式の加群, 層に対し $A^{r,s}(V) \rightarrow A^{r,s+1}(V)$, $A^{r,s} \rightarrow A^{r,s+1}$ と作用する。これに関して Poincaré の lemma の複素形がなりたつ。

Lemma $A^{r,s} \xrightarrow{d''} A^{r,s+1} \xrightarrow{d''} A^{r,s+2}$ は exact である。

従つて $\mathcal{Q}^r$ で正則な r 次微分式 (型 $(r, 0)$ で係数が正則函数) の芽の層をあらわすとき,

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}^r \rightarrow A^{r,0} \xrightarrow{d''} A^{r,1} \xrightarrow{d''} A^{r,2} \rightarrow \dots$$

が, $\mathcal{Q}^r$ の fine resolution を与えて, 次の Dolbeault の定理がえられる。

定理 B. 1 $H^q(\sum_s A^{r,s}(X), d'') \cong H^q(X, \mathcal{Q}^r)$.

X 上に解析的なベクトル・バンドル F が与えられたとき, F -valued 微分式に対してもこの定理が拡張できる。 X 上の解析的ベクトル・バンドル F は, 局所的に直積の形で与えればつぎのようにあらわされる。即ち, X の開被覆 $\{U_j\}$ と $U_j \cap U_k$ から $GL(q, \mathbb{C})$ への正則な写像 g_{jk} とがあつて, 各の U_j 上では $F \cong U_j \times \mathbb{C}^q$, $x \in U_j \cap U_k$ のとき $(x, \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C}^q$ と $(x, \xi_k) \in U_k \times \mathbb{C}^q$ とは,

$$\xi_j = g_{jk}(x) \cdot \xi_k$$

のとき, そのときに限り F の同一点をあらわす。(当然, $U_j \cap U_k \cap U_l$ では $g_{jl} = g_{jk} \cdot g_{kl}$)。

そうすると, 型 (r, s) の F -valued 微分式とは U_j における (r, s) -微分式 q 個の組 $\varphi_j = {}^t(\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jq})$ であつて, $U_j \cap U_k$ では $\varphi_j(x) = g_{jk}(x) \cdot \varphi_k$ をみたすものということになる。このような微分式の $\mathbb{C}$ -ベクトル空間を $A^{r,s}(F, X)$ とすると, d'' は $A^{r,s}(F, X) \rightarrow A^{r,s+1}(F, X)$ の微分作用素となる。即ち

$$A^{r,s}(F, X) \ni \varphi = \{\varphi_j\} \rightarrow d'' \varphi = \{d'' \varphi_j\} \in A^{r,s+1}(F, X).$$

Dolbeault の定理の拡張として

定理 B. 2 $H^q(\sum_s A^r, s(F, X), d'') \cong H^q(X, \Omega^r(F)).$

ここに $\Omega(F)$ は F の正則な切断面の芽の層をあらわす。

§ C 調和微分式

X をコンパクトな n 次元可附号多様体として、これに C^∞ 級の Riemann metric

$$ds^2 = \sum g_{ij} (dx^i dx^j)$$

を入れる。 $x^1, \dots, x^n$ は、考える座標近傍 U での局所座標で、考える X の符号づけにおいて、この順で正の座標系をなすものとする。

U で (必ずしも closed でない) 1 次微分式 $\omega_1, \dots, \omega_n$ を

$$ds^2 = \sum_{j=1}^n (\omega_j, \omega_j) \\ dv = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{体積要素})$$

となるようにとることができる。 p 次微分式 φ がこの ω に関して

$$\varphi = \sum_{i_1 \dots i_p} \varphi_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \\ \text{と書きあらわされるとき} \\ \varphi = \sum_{j_1 < \dots < j_{n-p}} \text{sgn} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p} \end{pmatrix} \varphi_{i_1 \dots i_p} \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-p}}$$

は、 $\{\omega_j\}$ のとり方に無関係に定まった微分式であり、 $*$ は $A^p(X)$, A^p を $A^{n-p}(X)$, A^{n-p} にうつす線型写像である。そこで $\varphi, \psi \in A^p(X)$ に対して

$$(\varphi, \psi) = \int_X \varphi \wedge * \psi$$

によつてその内積を定めると、これは正定値、対称な内積である。この内積に関する作用素 d の adjoint を δ とする。即ち $\varphi \in A^{p-1}(X)$, $\psi \in A^p(X)$ に対し、 δ は次の関係で定義される。

$$(d\varphi, \psi) = (\varphi, \delta\psi)$$

さらに Laplace-Beltrami の作用素 Δ を、

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

によつて定義する。これらに対し、つぎの関係がなりたつ。

$$(C, 1) \quad **\varphi = (-1)^{p(n-p)} \varphi, \quad (\varphi \in A^p)$$

$$(C, 2) \quad \delta \varphi = (-1)^{n(p-1)+1} * d * \varphi. \quad (\varphi \in A^p)$$

$$(C, 3) \quad \Delta d = d\Delta, \quad \Delta \delta = \delta \Delta$$

$$(C, 4) \quad (\Delta \varphi, \psi) = (\varphi, \Delta \psi)$$

Δ は楕円型微分作用素である。このことから、多くの著しい性質が導かれる。

$L^p(X)$ を、内積 (φ, ψ) に関する $A^p(X)$ の完備化とする。即ち $L^p(X)$ は X 上可測で2乗積分可能な p 次微分式の作る Hilbert space である。このとき、

定理 C. 1 $L^p(X)$ における $\Delta A^p(X)$ の直交補空間を $H^p(X)$ とすれば、 $H^p(X)$ の元 φ は C^∞ 微分式であつて、 $\Delta \varphi = 0$ をみたす。

定義 $\Delta \varphi = 0$ をみたす微分式を調和微分式という。

Remark $\Delta \varphi = 0 \iff d\varphi = 0$ かつ $\delta \varphi = 0$ である。

定理 C. 2 $H^p(X)$ は有限次元ベクトル空間である。

$L^p(X)$ から $H^p(X)$ への正射影作用素 H は C^∞ 級の核をもつ積分作用素で与えられる。

定理 C. 3 $K = \Delta A^p(X)$ の閉包 とおくと、 K から K への連続線型作用素 G があつて、 $\Delta G = G\Delta = \text{identity}$ 。また、 G は C^∞ 微分式を C^∞ 微分式にうつす。

定義 $H^p(X)$ の上では $G = 0$ と定めることによつて、この定理の G を、 $L^p(X) \rightarrow L^p(X)$ の連続線型作用素に拡張する。これをも G であらわし、Green の作用素という。

定理 C. 4 H, G は d, δ, Δ と可換である。

これらの定理の結果、 $A^p(X)$ の任意の微分式 φ は

$$\begin{aligned} \varphi &= H\varphi + \Delta G\varphi \\ &= H\varphi + d\delta G\varphi + G\delta d\varphi. \end{aligned}$$

と分解される。即ち H は chain complex $(A(X), d)$ におけるホモトピー作用素であつて、de Rham 群の元 (コホモロジー類) はその類に属する、一意的に定まつた調和微分式で代表される。

§ D 複素多様体における調和微分式

X が複素 n 次元のコンパクト (連結) な複素多様体で、metric が Hermite 型の場合を考える。即ち

$$(D.1) \quad ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta} dz^\alpha d\bar{z}^\beta = \sum_{\alpha=1}^n \omega_\alpha \wedge \bar{\omega}_\alpha \quad (\bar{g}_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\beta\bar{\alpha}})$$

この場合には複素数値微分式を考えるのが自然である。これに対し、 $*$ は $\mathbb{C}$ -線型な写像として延長し、内積は Hermite 内積

$$(\varphi, \psi) = \int_X \varphi \wedge * \bar{\psi}$$

でおきかえて考える。

d は実微分式を実微分式にうつす作用素で、その $\mathbb{C}$ -線型な延長について考えているのだから、

$$d = -*d*$$

は、新しい内積に関しても d の adjoint となる。従つて前項における結果はみななりたつ。

d が $d = d' + d''$ と分解された (§ B) のに対応して δ は $\delta = \delta' + \delta''$ と分解される。 δ', δ'' はそれぞれ d', d'' の adjoint で、

$$\delta' = -*d''*, \quad \delta'' = -*d'*$$

で与えられる。

Metric (D.1) に対して

$$(D.2) \quad \Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{\alpha} \omega_\alpha \wedge \bar{\omega}_\alpha$$

なる微分式を考えるとこれは X 全体で定義された実の微分式である。そこで作用素

$$L: A^p(X) \rightarrow A^{p+2}(X) \quad \text{を} \quad L\varphi = \Omega \wedge \varphi$$

によつて定義する。 L の adjoint を $\wedge$ とする。

定義: $\wedge \varphi = 0$ するとき φ は primitive であるという。

$\wedge$ と L との commutator $[\wedge, L]$ は、 $A^p(X)$ 上では $(n-p) \times \text{identity}$ となる。これをもとにして $[\wedge, L^r]$ を計算し、それを用いて、

定理 D.1 $\varphi \in A^p(X)$ が primitive であるためには、

$$L^q \varphi = 0, \quad q = \max(n-p+1, 0)$$

が必要十分である。

定理 D. 2 φ が primitive で, (r, s) 型ならば

$$*L^q \varphi = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (\sqrt{-1})^{r-s} \frac{g!}{(n-p-q)!} L^{n-p-q} \varphi$$

である。ここに $p = r + s + 2q$

注意: $\wedge$ は $A^{r,s}(X)$ を $A^{r-1,s-1}(X)$ にうつす。従つて一つの微分式が primitive ならば, それを型 (r, s) の部分にわけたとき, 各部分が primitive である。

定理 D. 3 p 次の primitive な微分式全体のなす空間を $E^p(X)$ とかけば, $A^q(X)$ は

$$(D. 3) \quad A^q(X) = \sum_{r=0}^{[q/2]} L^r \cdot E^{q-2r}(X)$$

と直和に分解される。

定義 Hermitean metric (D. 1) が Kähler であるとは, (D. 2) できまる Ω が closed であること, 即ち $d\Omega = 0$ なることである。

定理 D. 4 Kähler metric の場合には, つぎの関係がなりたつ。

$$(D. 4) \quad \wedge d' - d' \wedge = \sqrt{-1} \delta'', \quad \wedge d'' - d'' \wedge = -\sqrt{-1} \delta'$$

$$(D. 5) \quad \Delta L = L \Delta, \quad \Delta \wedge = \wedge \Delta$$

$$(D. 6) \quad d' \delta'' + \delta'' d' = 0, \quad d'' \delta' + \delta' d'' = 0$$

$$(D. 7) \quad \Delta = 2(d' \delta' + \delta' d') = 2(d'' \delta'' + \delta'' d'')$$

これから次のことがわかる。

(a) H は d, d', d'' に対して同時にホモトピー作用素である。

(b) $A^p(X) = \sum_{r+s=p} A^{r,s}(X)$ に対応して, 調和微分式の空間も $H^p(X) = \sum_{r+s=p} H^{r,s}(X)$ と分解される。

(c) 分解 (D. 3) に対応して, $H^q(X) = \sum_r L^r \cdot H E^{q-2r}(X)$ なる分解がなりたつ。

$H^{r,s}(X) \cong H^s(X, \Omega^r)$ (Dolbeault の定理) であるから, この空間の次元を $h^{r,s}$ とおけば, (φ とともに $\bar{\varphi}$ が調和微分式だから) $h^{r,s} = h^{s,r}$ 。

$b_p = \sum_{r+s=p} h^{r,s}$ のため, コンパクトな Kähler 多様体においては, 奇数次元の

Betti 数は偶数である。

Kähler 多様体の最も重要な例として、射影空間内の代数的多様体がある。 $P^N(\mathbb{C})$ の斉次座標を $(\zeta_0, \dots, \zeta_N)$ とすると、 $\zeta_j \neq 0$ なる部分では

$$z_1 = \zeta_0/\zeta_j, \dots, z_j = \zeta_{j-1}/\zeta_j, z_{j+1} = \zeta_{j+1}/\zeta_j, \dots, z_N = \zeta_N/\zeta_j$$

が、その解析的な局所座標を与える。

$\psi_j = \log(1 + \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2)$, $g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$ とおくと、 $ds^2 = \frac{1}{2\pi} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ は (j のとり方に無関係になつて) $P^N(\mathbb{C})$ 上に Kähler metric をきめる。 $P^N(\mathbb{C})$ の n 次元解析的部分多様体 X は、それからひきおこされた Kähler metric をもつ。

この metric においては $\theta(X) = Y$ である。ここに θ は附録 § A における θ であり、 Y は $P^N(\mathbb{C})$ の超平面による X の切断面がきめる、 X 上の $2n-2$ 次元ホモロジー類である。

§ E 複素ベクトル・バンドルにおける調和微分式

コンパクトな複素多様体 X 上に、 $\mathbb{C}^q$ をファイバーとする複素解析的なベクトル・バンドル F が与えられているとき、§ B のように $A^{r,s}(X, F)$ を考える。 X 上に Hermitian metric (D. 1) を入れ、さらに $A^{r,s}(X, F)$ にもつぎのように内積を導入する。 U_j での C^∞ 関数を成分とする正定値 Hermitian 行列 h_j で、 $U_j \cap U_k$ では

$$(E. 1) \quad {}^t g_{jk} h_j \bar{g}_{jk} = h_k$$

をみたすものをとる。(このような $\{h_j\}$ は存在する。Nakano [1]) そして $\varphi, \psi \in A^{r,s}(F, X)$ $\varphi = \{\varphi_j\}$, $\psi = \{\psi_j\}$ に対し

$$(E. 2) \quad (\varphi, \psi) = \int_X \sum_{\alpha, \beta} h_{j\alpha\beta} \varphi_j^\alpha \wedge \overline{\psi_j^\beta}$$

と定める。ここに φ_j^α は φ_j の成分を、 $h_{j\alpha\beta}$ は h_j の成分をあらわす。(E. 1) により integrand は j によらずに決つていて、(E. 2) は正定値 Hermitian 内積をあらわす。

(E. 2) に関する d'' の adjoint を $\bar{\partial}$ とかき、 $\square = d''\bar{\partial} + \bar{\partial}d''$ とおく。 $\square$ に対しても調和微分式に関する定理がなりたつ。(Bailey [2])

定理 E. 1 内積 (E. 2) に関する $A^{r,s}(F, X)$ の完備化 $L^{r,s}(F, X)$ 内に有限次元部分空間 $H^{r,s}(F, X)$ があり, $H^{r,s}(F, X) \ni \varphi$ なら φ は C^∞ で $\square \varphi = 0$ (即ち φ は調和微分式である。) $L^{r,s} \rightarrow H^{r,s}$ の射影作用素 H と, $L^{r,s} \rightarrow L^{r,s}$ の連続作用素 G とがあつて,

$$\begin{cases} d'' G = G d'', \Delta G = G \Delta, & HG = GH = 0 \\ H + \square G = \text{identity} \\ H, G \text{ は } A^{r,s}(F, X) \text{ を } A^{r,s}(F, X) \text{ 内にうつす} \end{cases}$$

定理 E. 2 $H^q(X, \mathcal{Q}^r(F)) \cong H^q(\sum_s A^{r,s}(F, X), d'') \cong H^{r,s}(F, X)$

F のファイバー上の複素数値一次関数の全体は X 上の解析的ベクトル・バンドル F^* (F に双対的なバンドル) をなす。 F^* は transition matrix $\{ {}^t g_{jk}^{-1} \}$ で定義される。 F の "metric" $\{ h_j \}$ に対し $\{ {}^t h_j^{-1} \}$ は F^* の metric を定める。対応

$$A^{r,s}(F, X) \ni \varphi = \{ \varphi_j \} \Leftrightarrow \varphi^+ = \{ \varphi_j^+ \}$$

$$\varphi_j^+ = h_j \cdot \overline{\varphi_j}$$

は, $A^{r,s}(F, X)$ と $A^{n-r,n-s}(F^*, X)$ との間の anti- $\mathbb{C}$ -linear な同型対応である。しかもこの対応によつて調和微分式は調和微分式にうつる。

定理 E. 3 $H^{r,s}(F, X)$ と $H^{n-r,n-s}(F^*, X)$ とは, (本質的には) 内積 (E. 2) で与えられる pairing によつて双対的なベクトル空間である。

§ F 複素円環体上の有理型函数とテータ函数

n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ と, $\mathbb{C}^n$ の discrete な部分群 D で rank $2n$ なるものが与えられたとき, $T = \mathbb{C}^n / D$ は複素円環体とよばれる。 T 上に有理型函数 f があるとき, これを $\mathbb{C}^n$ 上の函数と考えれば, f は n 変数の (有理型) $2n$ 重周期函数即ちアーベル函数である。 $n \geq 1$ のときはこのような函数は即ち楕円函数であつて, 任意の D に対して十分多く (T 即ち楕円曲線を射影空間に imbed するほど多く) 存在するが, $n=2$ のときは事情がかわつてくる。

T 上に有理型函数 f が与えられると, T の適当な (単純) 開被覆 $\{ U_j \}$ に関して, U_j 上では $f = \psi_j / \varphi_j$ (φ_j, ψ_j は U_j で正則, 各点で共通因子をもたない) とあらわすこ

とができる。

$g_{jk} = \varphi_j / \varphi_k$ は $U_j \cap U_k$ で正則で決して 0 にならない函数である。

$$d \log g_{jk} + d \log g_{kl} + d \log g_{lj} = 0$$

であるから、 U_j における型 $(1, 0)$ の C^∞ 微分式 ζ_j があつて

$$d \log g_{jk} = \zeta_k - \zeta_j$$

とかける。 $d\zeta_j = d\zeta_k = \xi$ は、 T 全体での大域的微分式で型 $(2, 0)$ と型 $(1, 1)$ の項から成り、 $d\xi = 0$

T には Hermitian metric $ds^2 = \sum_{\alpha} dz^\alpha d\bar{z}^\alpha$ ((z) は $\mathbb{C}^n$ の座標) を入れる。これは Kähler metric である。これに対しては調和微分式は $dz^\alpha, d\bar{z}^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) の外積の、定係数 1 次結合となる。そこで調和微分式の理論 (定理 C.4 と § D(a, b)) によつて

$$\xi = H\xi + dh = \sum a_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + \sum b_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + dh$$

(h は T 上の微分式) とかける。 ζ_j を $\zeta_j - h$ でおきかえれば

$$\begin{cases} d \log g_{jk} = \zeta_k - \zeta_j, \\ d\zeta_j = d\zeta_k = \xi = \sum a_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + \sum b_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \end{cases}$$

$\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow T$ による U_j の逆像 $\pi^{-1}(U_j)$ の連結成分を $U_{j\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \dots$) とかく。($U_{j\lambda} \cong U_j$ と考えてよい)

$$\eta = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha d\bar{z}^\beta - \sum b_{\alpha\beta} z^{-\beta} dz^\alpha$$

とおくと、 η は $\mathbb{C}^n$ 上の微分式で $d\eta = \pi^*\xi$ 。従つて $U_{j\lambda}$ では $\pi^*\zeta_j - \eta = \xi_{j\lambda}$ は closed である。 $\xi_{j\lambda}$ が型 $(1, 0)$ であることを使うと、 $\xi_{j\lambda}$ は正則なことがわかる。 U_j 内に定点 a_j をとり、 $U_{j\lambda}$ 内におけるその逆像を $a_{j\lambda}$ とする。 $\phi_{j\lambda}(z) = \exp(\int_{a_{j\lambda}}^z \xi_{j\lambda})$ とおけば $\phi_{j\lambda}$ は $U_{j\lambda}$ で 0 にならない正則函数で $U_{j\lambda} \cap U_{k\mu}$ では

$$\log g_{jk} = \log \phi_{k\mu} - \log \phi_{j\lambda} + C_{j\lambda, k\mu} \quad (C_{j\lambda, k\mu} \text{ は定数})$$

である。 $\{C_{j\lambda, k\mu}\}$ を $\text{mod. } 2\pi\sqrt{-1}$ で考えると、被覆 $\{U_{j\lambda}\}$ に関する $\mathbb{C}(\text{mod. } 2\pi\sqrt{-1})$ -valued 1-cocycle となるが、 $\mathbb{C}^n$ のコホモロジーは trivial だから、この cocycle は coboundary である。従つて定数 $d_{j\lambda} \neq 0$ があつて、 $\phi'_{j\lambda} = d_{j\lambda} \phi_{j\lambda}$ とおけば

$$\varphi_j / \varphi_k = \phi'_{k\mu} / \phi'_{j\lambda}$$

即ち $\Theta_1 = \varphi_j \cdot \phi'_{j\lambda} = \varphi_k \cdot \phi'_{k\mu}$ は

$\mathbb{C}^n$ 全体での正則函数である。 $\xi_{j\lambda}$ の形をみれば

$$\Theta_1(z+d) = \Theta_1(z) \cdot \exp(L_d(z)) \quad (d \in D)$$

$L_d(z)$ は d によつてきまる z の一次式

であることがわかる。このような性質をもつ $\mathbb{C}^n$ 上の函数をテーター函数という。 $\Theta_2 = f \cdot \Theta_1$ もテーター函数で、 Θ_2 に対応する $L_d(z)$ は Θ_1 に対するものとひとしい。

$\exp(L_d(z))$ は $\mathbb{C}^n \times D \rightarrow \mathbb{C}^*$ の函数とみれば holomorphic な factor (§ 3) であり、テーター函数はこの factor に対応する複素直線バンドルの正則な cross section をあらわす。

一般に複素多様体 X 上に複素直線バンドル B があり、 B の正則な cross sections $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(m)}$ [被覆 $\{U_j\}$ に関して $\varphi^{(\alpha)} = \{\varphi_j^{(\alpha)}\}$] が与えられれば、

$$U_j \ni x \rightarrow \Phi(x) = (\varphi_j^{(0)}(x) : \dots : \varphi_j^{(m)}(x)) \in P^m$$

によつて、 X から P^m への写像 Φ がきまる。 B が “十分多くの” cross section をもてば Φ は $X \rightarrow P^m$ の biregular imbedding となる。

実際に $L_d(z)$ の形をしらべてテーター函数の存在するための条件 (D に課せられる条件) をきめるのは、ここではできない。結果だけをあげる。(Weil [16] は elegant であるが、ここにあげる形のためには Siegel [14] 又は Conforto [3] をみる方が早道である。)

D の一組の生成元の成分をならべて $n \times 2n$ 行列 ω を作る。

定理 F . 1 有理数を成分とする $2n \times 2n$ 行列 P で, つぎの条件をみたすものを考える。

(a) ${}^t P = -P$

(b) $\omega P {}^t \omega = 0$

(c) $\sqrt{-1} \omega P {}^t \bar{\omega}$ は正定値 Hermite 行列

ω に対しこのような P が存在するとき, そのときに限り, 適当な factor $\exp(L_d(z))$ が存在して, n 個の変数 $z^1 \dots \dots z^n$ に実質的に depend するようなテーター函数が存在する。

定理 F . 2 前定理の条件がみたされるとき適当な factor があつて, $(\exp(3L_d(z))$ によい) 対応するテーター函数によつて T は射影空間内に双正則に imbed される。

参 考 文 献

- [1] 秋月康夫: 調和積分論, 上下. 岩波書店 (1955)
- [2] W. L. Baily: The decomposition theorem for V-manifolds, Amer. J. Math., vol. 78 (1956), pp. 862 ~ 888.
- [3] F. Conforto: Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie Springer Verlag (1956).
- [4] F. Hirzebruch: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Erg. d. Math., Springer Verlag (1956).
- [5] 岩沢健吉: 代数函数論. 岩波書店, (1952).
- [6] K. Kodaira-D. C. Spencer: On deformations of complex analytic Structures, I, II. Annals Math., vol. 67 (1958), pp. 328 ~ 466.
- [7] _____: 全上, III. Ibid., vol. 71 (1960), pp. 43 ~ 76.
- [8] _____: Existence of complex structures on a differentiable family of deformations of compact complex manifolds. Ibid., vol. 70, (1959), pp. 145 ~ 166.
- [9] K. Kodaira-L. Nirenberg-D. C. Spencer: On the existence of deformations of complex analytic structures. Ibid., vol. 68, (1958), pp. 450 ~ 459.
- [10] S. Nakano: Parametrization of a family of bundles, Mem. College Sci., Kyoto Univ., Ser A. vol. 33, Math. (1961), pp. 353 ~ 366.
- [11] _____: On complex analytic vector bundles, J. Math.

Soc. Japan, vol. 7 (1955), pp. 1 ~ 12.

- [12] M. S. Narasimhan-C. S. Seshadri: Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface, Math. Annalen, Bd. 155 (1964), pp. 69 ~ 80.
- [13] A. Newlander-L. Nirenberg: Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. of Math. vol. 65 (1957), pp. 391 ~ 404.
- [14] C. L. Siegel: Analytic functions of several complex variables, Mimeographed note, the Institute for Advanced Study, Princeton (1948).
- [15] G. de Rham: Variétés différentiables, Act. Sci. Ind., Hermann (1955).
- [16] A. Weil: Introduction à l'étude des variétés Kähleriennes, Hermann.(1958).