

# 極大単調作用素列におけるリゾルベントの 強収束に対する同値条件について

東京工業大学・情報理工学研究科 木村泰紀 (Yasunori Kimura)  
Department of Mathematical and Computing Sciences  
Tokyo Institute of Technology

## 1 序論

単調作用素の理論は凸解析における重要な分野の一つであり、特に極大単調作用素の零点の存在および近似に関する研究は最適化問題や変分不等式問題など、さまざまな理論に応用されている。

これらの研究の中で、リゾルベントの概念は特に重要な位置を占める。 $H$  を実 Hilbert 空間とし、 $A$  を  $H$  上の極大単調作用素としよう。このとき、 $t > 0$  に対して  $A$  のリゾルベント  $J_t$  は

$$J_t(x) = \{y \in H : y + tAy \in x\}$$

で定義される。 $J_t$  は一価写像であることが知られており、さらに、 $A$  の零点が空でないと仮定すると、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $\{J_t x\}$  は  $x$  を  $A$  の零点へ距離射影でうつした点に強収束することが知られている。

同様の議論が実 Banach 空間においてもなされる。このとき、リゾルベントは Hilbert 空間における定義をより一般化した形で、双対写像  $J$  を用いて定義される。すなわち、Banach 空間  $E$  上の双対写像  $J$  を、任意の  $x \in E$  に対して

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \|x\|^2 = \|x^*\|^2 = \langle x, x^* \rangle\}$$

で定義し、 $t > 0$  に対して  $A$  のリゾルベントを  $J + tA$  の逆像として定義する。 $E$  が Hilbert 空間のときは  $J$  は恒等写像となるので、この定義が Hilbert 空間における定義を含んでいることは容易にわかる。

1979 年, Reich[7] は, Banach 空間において上記の形のリゾルベントを用い,  $t \rightarrow \infty$  のときの強収束定理を得た. 一方, 1988 年に木戸 [5] は別の形に一般化されたリゾルベントに対する強収束定理を得ている.

茨木・木村・高橋 [4] は, Banach 空間における極大単調作用素の列に対する収束定理を研究し, 零点の列の Mosco 収束を仮定することによって, 弱収束定理および強収束定理を得た. これらの研究は, Reich の定理のさらなる一般化とみなすことができるだけでなく, Mosco 収束する閉凸部分集合列に対する generalized projection の各点収束定理をも含む結果である.

本稿では, Banach 空間における極大単調作用素列の強収束に関する研究をし, Banach 空間にある条件を加えることによって, 極大単調作用素の列と, それに対応するリゾルベント列が強収束するための必要十分条件を得た.

## 2 準備

本稿では実 Banach 空間のみを扱う. 実 Banach 空間  $E$  に対し, その共役空間を  $E^*$  とする.  $x \in E$  のノルムを  $\|x\|$  であらわし,  $x^* \in E^*$  の  $x$  での値を  $\langle x, x^* \rangle$  であらわす.

$B = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  とする.  $E$  が滑らかであるとは,  $B \times B \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  上の関数  $f(x, y, t) = (\|x + ty\| - \|x\|)/t$  に対し, 任意の  $x \in B, y \in B$  において  $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, y, t)$  が存在することである. また, この極限が  $x \in B$  に関して一様に収束するとき,  $E$  は Fréchet 微分可能なノルムをもつという.

$x \in E$  に弱収束する  $E$  の点列  $\{x_n\}$  が  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  をみたすときに  $\{x_n\}$  が  $x$  に強収束することが導かれるとき,  $E$  は Kadec-Klee property をみたすという.  $E^*$  が Fréchet 微分可能なノルムをもつならば,  $E$  は回帰的で狭義凸な Banach 空間で, さらに Kadec-Klee property をみたす. 詳細は [9] を参照せよ.

$E$  から  $E^*$  への多価写像  $A$  が単調作用素であるとは, 任意の  $x, y \in E$  と  $x^* \in Ax, y^* \in Ay$  に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つことをいう. 単調作用素  $A$  が極大であるとは,  $A$  をグラフとして含む作用素  $B$  が単調ならば  $A = B$  が導かれることをいう.  $E$  が回帰的で狭義凸かつ滑らかな Banach 空間のとき, 双対写像  $J$  は一価の全単射となる. この  $J$  を用いて, 単調作用素  $A$  のリゾル

ベント  $J_r$  を  $r > 0$  に対して

$$J_r = (J + rA)^{-1}J$$

で定義する.  $A$  が極大単調作用素ならば,  $J_r$  は  $E$  から  $E$  への一価写像となる. 詳細は [2] を見よ.

$E$  を回帰的で狭義凸かつ滑らかな Banach 空間とし,  $E \times E$  上の関数  $V$  を,  $x, y \in E$  に対して

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle J(x), y \rangle + \|y\|^2$$

で定義する.  $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合とすると, 任意の  $x \in E$  に対して

$$V(x, y_x) = \min_{y \in C} V(x, y)$$

をみたす  $y_x \in C$  が唯一存在する.  $x$  にこの点に対応させる写像は generalized projection[1] と呼ばれ,  $y_x = \Pi_C(x)$  とあらわされる. とくに  $E$  が Hilbert 空間のときには, 任意の  $x, y \in E$  に対して  $V(x, y) = \|x - y\|^2$  となるので,  $\Pi_C$  は  $C$  上への距離射影と一致する.

回帰的 Banach 空間  $E$  の空でない閉凸集合列を  $\{C_n\}$  とする. これに対して  $\text{s-Li}_n C_n$  および  $\text{w-Ls}_n C_n$  を

$$\begin{aligned} \text{s-Li}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_n\}, x_n \rightarrow x, x_n \in C_n \ (\forall n \in \mathbb{N})\}, \\ \text{w-Ls}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_{n_i}\}, x_{n_i} \rightharpoonup x, x_{n_i} \in C_{n_i} \ (\forall i \in \mathbb{N})\} \end{aligned}$$

で定義する. ここで  $x_{n_i} \rightharpoonup x$  は  $\{x_{n_i}\}$  が  $x$  に弱収束することをあらわしている.  $E$  の閉凸集合  $C_0$  に対して

$$C_0 = \text{s-Li}_n C_n = \text{w-Ls}_n C_n$$

が成り立つとき,  $\{C_n\}$  は  $C_0$  に Mosco 収束する [6] といい,

$$C_0 = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$$

とあらわす. 詳細は [3] を参照せよ.

### 3 リゾルベント列の強収束に対する特徴づけ

2003 年, 茨木・木村・高橋 [4] は極大単調作用素のリゾルベント列に対する次の強収束定理を得た.

定理 1 (茨木・木村・高橋 [4]).  $E$  を滑らかな Banach 空間とし,  $E^*$  が Fréchet 微分可能なノルムをもつと仮定する.  $\{A_n\}$  を  $E$  上の極大単調作用素の列とし,  $x \in E$  と正実数列  $\{\lambda_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$x_n = J_{\lambda_n} x = (J + \lambda_n A_n)^{-1} Jx$$

で点列  $\{x_n\}$  を定義する.  $E$  上の空でない閉凸集合  $C_0$  に対して  $\{A_n\}$  が次の条件をみたすとしよう.

- (1)  $C_0 \subset \text{s-Li}_n A_n^{-1} 0$  が成り立つ;
- (2)  $C_0 \supset \text{w-Ls}_n A_n^{-1} y_n^*$  が,  $0$  に強収束する任意の  $\{y_n^*\} \subset E^*$  で成り立つ.

このとき,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  ならば,  $\{x_n\}$  は  $\Pi_{C_0} x$  に強収束する. ここで,  $\Pi_{C_0}$  は  $E$  から  $C_0$  への generalized projection である.

この定理において,  $\{A_n\}$  を唯一の極大単調作用素  $A$  に固定すると,  $C_0 = A^{-1}0$  に対して条件 (1) および (2) が成り立つことが,  $A$  の極大性よりわかる. したがって, この定理は次の結果の一般化となっていることがわかる. この結果は Reich[7] の定理の系にもなっている.

定理 2 (Reich[7]).  $E$  を滑らかな Banach 空間とし,  $E^*$  が Fréchet 微分可能なノルムをもつと仮定する.  $A$  を  $E$  上の極大単調作用素とし,  $x \in E$  と正実数列  $\{\lambda_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$x_n = J_{\lambda_n} x = (J + \lambda_n A)^{-1} Jx$$

で点列  $\{x_n\}$  を定義する. このとき,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  ならば,  $\{x_n\}$  は  $\Pi_{A^{-1}0} x$  に強収束する.

$E$  に一様凸性とノルムの Fréchet 微分可能性を仮定することにより, 本稿の主定理である, 次の同値性に関する結果が得られる.

定理 3.  $E$  を Fréchet 微分可能ノルムをもった一様凸 Banach 空間とし,  $C_0$  を  $E$  の空でない閉凸集合,  $\{A_n\}$  を  $E$  から  $E^*$  への極大単調作用素とする. このとき, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $x_n = (J + \lambda_n A_n)^{-1} J(x)$  で定義された点列  $\{x_n\}$  が,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  をみたす任意の正実数列  $\{\lambda_n\}$  と任意の  $x \in E$  に対して  $\Pi_{C_0} x$  に強収束するための必要十分条件は, 次の (1) および (2) をともにみたすことである.

- (1)  $C_0 \subset \text{s-Li}_n A_n^{-1} 0$  が成り立つ;
- (2)  $C_0 \supset \text{w-Ls}_n A_n^{-1} y_n^*$  が,  $0$  に強収束する任意の  $\{y_n^*\} \subset E^*$  で成り立つ.

証明. 条件 (1) および (2) が成り立つときに, 任意の正実数列  $\{\lambda_n\}$  と任意の  $x \in E$  に対して  $\{x_n\} = \{(J + \lambda_n A_n)^{-1} J(x)\}$  が強収束することは既に定理 1 で示されている. したがって, 逆のみを示せばよい. 最初に, 強収束を仮定し, 条件 (2) が成り立つことを示そう.  $\{y_n^*\} \subset E^*$  を 0 に強収束する点列とし,  $z \in \text{w-Ls}_n A_n^{-1} y_n^*$  とする. このとき,  $\mathbb{N}$  の部分列  $\{n_i\}$  と  $z$  に弱収束する点列  $\{z_i\} \in E$  が存在して,  $i \in \mathbb{N}$  に対して  $z_i \in A_{n_i}^{-1} y_{n_i}^*$  をみtas. ここで, 正実数列  $\{\lambda_i\}$  を各  $i \in \mathbb{N}$  に対して

$$\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{\|y_{n_i}^*\| + 1/i}} > 0$$

と定義すると,  $\lambda_i \rightarrow \infty$  である. この  $\{\lambda_i\}$  を用いて, 各  $i \in \mathbb{N}$  に対して  $x_i = (J + \lambda_i A_{n_i})^{-1} J(z)$  と定義すると, 仮定より  $\{x_i\}$  は  $\Pi_{C_0} z$  に強収束する. 一方,  $\{x_i\}$  の定義より  $i \in \mathbb{N}$  に対して

$$\frac{J(z) - J(x_i)}{\lambda_i} \in A_{n_i} x_i$$

であり,  $A_{n_i}$  の単調性を用いると

$$\left\langle x_i - z_i, \frac{J(z) - J(x_i)}{\lambda_i} - y_{n_i}^* \right\rangle \geq 0,$$

すなわち

$$\langle x_i - z_i, J(z) - J(x_i) - \lambda_i y_{n_i}^* \rangle \geq 0$$

が成り立つ. ここで  $\{\lambda_i\}$  の定義から

$$0 \leq \|\lambda_i y_{n_i}^*\| = \lambda_i \|y_{n_i}^*\| = \frac{\|y_{n_i}^*\|}{\sqrt{\|y_{n_i}^*\| + 1/i}} \leq \frac{\|y_{n_i}^*\| + 1/i}{\sqrt{\|y_{n_i}^*\| + 1/i}} = \sqrt{\|y_{n_i}^*\| + 1/i} \rightarrow 0$$

より  $\{\lambda_i y_{n_i}^*\}$  は 0 に強収束する. さらに,  $E$  は Fréchet 微分可能なノルムをもつことから,  $J$  はノルム位相に関して連続である. したがって,  $i \rightarrow \infty$  とすると

$$\langle \Pi_{C_0} z - z, J(z) - J(\Pi_{C_0} z) \rangle \geq 0$$

が得られる. 一様凸 Banach 空間における  $J$  の狭義単調性より  $z = \Pi_{C_0} z$  となり,  $z \in C_0$  を得る. これにより  $C_0 \supset \text{w-Ls}_n A_n^{-1} y_n^*$  が成り立ち, (2) が示された.

次に, (1) が成り立つことを示す.  $z \in C_0$  とする.  $n \in \mathbb{N}$  を一つ固定すると, 定理 2 より, ある  $\lambda_n > 0$  が存在して,  $\lambda_n > n$  かつ

$$\left\| (J + \lambda_n A_n)^{-1} J(z) - \Pi_{A_n^{-1} 0} z \right\| < \frac{1}{n}$$

をみtas. このようにして正実数列  $\{\lambda_n\}$  をとると,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  であるから, 仮定より  $\{(J + \lambda_n A_n)^{-1} J(z)\}$  は  $\Pi_{C_0} z = z$  に収束する. 一方, 定義より  $\Pi_{A_n^{-1}0} z \in A_n^{-1}0$  であるから,  $n \rightarrow \infty$  とすると  $z \in \text{s-Li}_n A_n^{-1}0$  が得られる. したがって,  $C_0 \subset \text{s-Li}_n A_n^{-1}0$  となり, (1) が成り立つことが示された.  $\square$

$\{C_n\}$  を一様凸 Banach 空間  $E$  の空でない閉凸集合列とし, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $i_{C_n}: E \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  を

$$i_{C_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in C_n, \\ +\infty, & x \notin C_n \end{cases}$$

で定義すると  $i_{C_n}$  は proper で下半連続な凸関数となる. よってこの関数の劣微分  $\partial i_{C_n}$  は  $x \in E$  に対し

$$\partial i_{C_n}(x) = \begin{cases} N_{C_n}(x), & x \in C_n, \\ \emptyset, & x \notin C_n \end{cases}$$

で定義される極大単調作用素となる [8]. ただし  $N_{C_n}(x) = \{x^* \in E^* : \langle x - a, x^* \rangle \leq 0, \forall x \in C_n\}$  である. さらに,  $\lambda > 0$  に対するリゾルベント  $(J + \lambda \partial i_{C_n})^{-1}$  を考えると, これは  $\lambda$  の値によらず  $C_n$  への generalized projection  $\Pi_{C_n}$  になることが容易にわかる. この結果を用いると, 次の命題が系として得られる. [4] も参照せよ.

系 1.  $E$  を Fréchet 微分可能ノルムをもった一様凸 Banach 空間とし,  $C_0$  を  $E$  の空でない閉凸集合,  $\{C_n\}$  を  $E$  の空でない閉凸集合の列とする. このとき, 任意の  $x \in E$  に対して  $\{\Pi_{C_n} x\}$  が  $\Pi_{C_0} x$  に強収束するための必要十分条件は,  $C_0 = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$  が成り立つことである.

証明. 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(\partial i_{C_n})^{-1}0 = C_n$  であり, さらに任意の  $\lambda > 0$  に対して  $(J + \lambda \partial i_{C_n})^{-1} = \Pi_{C_n}$  であることを考慮すれば, 前定理の (1) および (2) を極大単調作用素列  $\{\partial i_{C_n}\}$  がみたしていることと  $C_0 = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$  が同値であることを示せばよい. (1) および (2) が成り立っているとき,  $\{y_n^*\}$  としてつねに 0 である列をとると

$$\text{w-Ls}_n C_n = \text{w-Ls}_n (\partial i_{C_n})^{-1}0 \subset C_0 \subset \text{s-Li}_n (\partial i_{C_n})^{-1}0 = \text{s-Li}_n C_n$$

となるので,  $C_0 = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$  が成立する. 一方,  $C_0 = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$  が成り立つと仮定すると,

$$C_0 = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n = \text{s-Li}_n C_n = \text{s-Li}_n (\partial i_{C_n})^{-1}0$$

であり, さらに, 任意の  $y^* \in E^*$  に対して  $(\partial i_{C_n})^{-1}y^* \subset C_n$  であるから

$$\text{w-Ls}_n (\partial i_{C_n})^{-1}y_n^* \subset \text{w-Ls}_n C_n = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$$

が, 0 に強収束する任意の  $\{y_n^*\} \subset E^*$  で成り立つ. したがって (1) および (2) が成立し, 定理 3 から結論が得られる.  $\square$

## 参考文献

- [1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.
- [2] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, revised ed., Editura Academiei, Bucharest, 1978, Translated from the Romanian.
- [3] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [4] T. Ibaraki, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Convergence theorems for generalized projections and maximal monotone operators in Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2003** (2003), 621–629.
- [5] K. Kido, *Strong convergence of resolvents of monotone operators in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 755–758.
- [6] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.
- [7] S. Reich, *Constructive techniques for accretive and monotone operators*, Applied nonlinear analysis (Proc. Third Internat. Conf., Univ. Texas, Arlington, Tex., 1978), Academic Press, New York, 1979, pp. 335–345.
- [8] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.
- [9] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.