

2 層準地衡流系に関する Danilov 不等式の数値実験的検証

神戸大学 大学院理学研究科 岩山 隆寛*, 岡崎正悟†

Takahiro Iwayama, Shogo Okazaki

Department of Planetology, Graduate School of Science, Kobe University

名古屋工業大学 工学研究科 渡邊 威‡

Takeshi Watanabe

Department of Physical Science and Engineering,

Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology

概要

2 次元 Navier-Stokes(NS) 系における強制散逸乱流の統計的定常状態では, エネルギーフラックス $\Pi_E(k)$ とエンストロフィーフラックス $\Pi_Z(k)$ の差, $k^2\Pi_E(k) - \Pi_Z(k)$, ここで k は波数である, は強制波数帯域を除いて負符号であることが数学的に証明されている. この不等式は Danilov 不等式としばしば参照され, 2 次元 NS 乱流の慣性領域においてエネルギーフラックスとエンストロフィーの向きを決定するための重要な関係式である. 2 次元 NS 系の渦度方程式の一般化である 2 層準地衡流渦位方程式に関して, Danilov 不等式が成立するか否かを, この方程式の数値実験により調べる. この系においてフラックス差は数学的に符号不確定であるが, 数値実験によると全波数領域で Danilov 不等式が満たされることが示される.

1 はじめに

準地衡流渦位方程式は, 地球大気・海洋の大規模な循環を記述するモデル方程式の一つである. それは, 非圧縮条件を課した 2 次元 Navier-Stokes (NS) 方程式から導かれる渦度方程式と似た形をしている. そこで, 準地衡流渦位方程式に従う乱流 (以降, 地衡流乱流と参照する) は 2 次元 NS 方程式に従う乱流 (以降, 2 次元 NS 乱流と参照する) の一般化の一つとみなされ, 物理学的興味, 地球物理学的興味から研究されてきた.

強制散逸 2 次元 NS 乱流において二つの慣性領域, エネルギー慣性領域とエンストロフィー慣性領域, が共存することはよく知られている.^{(3),(12),(14)} エネルギー慣性領域は, 系を強制する波数帯 (強制波数帯) よりも低波数側に形成される. この領域のエネルギースペクトルは波数 k に対して $k^{-5/3}$ の依存性を示し, エネルギーは低波数側に輸送される. それに対して, エンストロフィー慣性領域は強制波数帯よりも高波数側に形成される. エンストロフィー慣性領域ではエネルギースペクトルは

* iwayama@kobe-u.ac.jp

† okazaki@gfd-dennou.org

‡ watanabe@nitech.ac.jp

k^{-3} に比例し、エンストロフィーが高波数側に輸送される。これらの性質は、エネルギーとエンストロフィーが系の非粘性保存量であることに因っている。

準地衡流渦位方程式は二つの非粘性保存量、全エネルギー*1とポテンシャルエンストロフィー*2、を持つので、地衡流乱流の波数空間内の力学は、2次元 NS 乱流のそれと似ていると信じられてきた。⁽⁵⁾ しかしながら、Tung and Orlando (2003)⁽¹⁹⁾ (以降 TO03 と参照する) は、密度成層と傾圧性を考慮したもっとも簡単な準地衡流系である 2 層準地衡流渦位方程式の数値実験を行い、2次元 NS 系の慣性領域スペクトルとは異なる奇妙なエネルギー・スペクトル、強制波数帯の高波数側において k^{-3} を示し、さらに波数が大きな領域において $k^{-5/3}$ へと転移するエネルギー・スペクトル、を得た。彼らはそのようなエネルギー・スペクトルが形成されるメカニズムも提唱している。この形のエネルギー・スペクトルはいわゆる Nastrom-Gage (NG) スペクトルと呼ばれる大気のエネルギー・スペクトルと似た形をしている。したがって、TO03 の研究は 2 次元乱流とその地球物理的応用の両方の観点から興味深い。

NG スペクトルは地球大気の循環の普遍的性質とみなされている。Nastrom and Gage (1985)⁽¹⁶⁾ は、航空機観測によって得られた東西風、南北風、温度のエネルギー・スペクトルが、数千キロメートルから数百キロメートルの波長では水平波数 k の -3 乗に比例するべき則に従い、さらにそれよりも小さな水平波長ではこれらのスペクトルは $k^{-5/3}$ に比例することを示した。この形のスペクトルは、大気大循環モデルを用いた数値シミュレーションやその後の観測データの解析によっても再現されている。^{(4),(11)}

特に、2次元 NS 乱流や地衡流乱流の観点から NG スペクトルの形成機構を解明する努力が続けられてきた。NG スペクトルの k^{-3} スペクトルは強制散逸 2次元 NS 乱流のエンストロフィー慣性領域スペクトルの類似物とみなされている。⁽¹⁵⁾ しかしながら $k^{-5/3}$ スペクトルの形成機構は未解決問題である。多くの研究により $k^{-5/3}$ スペクトルの形成に重力波が重要な役割を果たしているであろう、ということが示されてきた。^{(10),(11)} それに対して、TO03 は重力波が濾過された系である 2 層準地衡流渦位方程式の数値計算によって NG スペクトルのようなスペクトルを再現したのである。

TO03 が提唱した $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズム (以降、TO メカニズムと参照する) は以下の通りである: 傾圧不安定によって全エネルギーとポテンシャルエンストロフィーの両方が Rossby の変形半径程度のスケールに注入され、それらは共に高波数側へ輸送される。ポテンシャルエンストロフィーフラックスが全エネルギーフラックスよりも卓越する波数領域では、ポテンシャルエンストロフィー慣性領域が形成され、全エネルギー・スペクトルは k^{-3} の形をとる。全エネルギー・フラックスが、ポテンシャルエンストロフィーフラックスよりも卓越する波数領域では全エネルギー慣性領域が形成され、全エネルギー・スペクトルは $k^{-5/3}$ となる。TO03 は全エネルギー・フラックスのポテンシャルエンストロフィーフラックスに対する卓越性を表現するために、以下のようなフラックス差を導入した:

$$k^2\Pi_E(k) - \Pi_Z(k). \quad (1)$$

ここで、 $\Pi_E(k)$ は全エネルギー・フラックスで、波数 k を通って、 k よりも小さな波数から大きな波数

*1 運動エネルギーと有効位置エネルギーの和

*2 渦位の二乗の空間積分

へ向けて輸送される単位時間当たりの全エネルギーを表している。 $\Pi_Z(k)$ はポテンシャルエンストロフィーフラックスで、同様に定義される。 TO メカニズムは、 $k^{-5/3}$ スペクトルが

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) > 0 \quad (2)$$

を満足する波数領域に存在することを述べている。一方で、狭い波数帯域で強制された 2 次元 NS 乱流の統計的平衡状態では、強制波数帯を除いて

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0 \quad (3)$$

が満たされることが数学的に証明されている。^{*3(9)} (3) はしばしば Danilov 不等式と参照されるものである。もし散逸過程、下端境界の存在に伴う Ekman 摩擦や粘性、⁶ 上層と下層とで対称であれば強制波数帯を除いて (3) は 2 層準地衡流系でも満足されることが示されている。⁽⁷⁾ しかしながら、散逸過程が非対称な場合、(1) の符号は不確定である。

上で述べたように、TO メカニズムは 2 次元 NS 乱流の性質の一般化としても、その地球物理学的応用としても興味深い。しかしながら、TO メカニズムの正当性は論争になっている。^{(17),(18)} 興味深いことに、TO03 以外、2 層準地衡流渦位方程式の数値実験で $k^{-5/3}$ スペクトルを再現した研究は未だない。さらに、Danilov 不等式は近年理論的に活発に研究されている⁽⁶⁾⁽⁷⁾ にもかかわらず、数値実験によって Danilov 不等式の成否について調べた研究もない。このような背景のもと、本論文では 2 層準地衡流渦位方程式の数値実験によって、Danilov 不等式の成否に関する研究を行う。

2 2 層準地衡流渦位方程式

本研究で使用する支配方程式系は、地衡流乱流の研究で標準的に用いられている設定のもとでの f 平面上の 2 層準地衡流渦位方程式で、基本的に Larichev and Held (1995)⁽¹³⁾ と同様のものである：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q_\psi &= -J(\psi, q_\psi) - J(\tau, q_\tau) - U \frac{\partial \nabla^2 \tau}{\partial x} \\ &\quad + (-1)^{\gamma-1} \nu \nabla^2 \gamma q_\psi + (-1)^{\gamma-1} \frac{\Delta \nu}{2} \nabla^2 \gamma (q_\psi - q_\tau) \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \nabla^2 (\psi - \tau), \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q_\tau &= -J(\psi, q_\tau) - J(\tau, q_\psi) - U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - U k_d^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &\quad + (-1)^{\gamma-1} \nu \nabla^2 \gamma q_\tau + (-1)^{\gamma-1} \frac{\Delta \nu}{2} \nabla^2 \gamma (q_\tau - q_\psi) \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \nabla^2 (\tau - \psi) + 2\alpha k_d^2 \tau, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$q_\psi = \nabla^2 \psi, \quad (4c)$$

$$q_\tau = \nabla^2 \tau - k_d^2 \tau, \quad (4d)$$

上式は、上層の x 方向の流速と下層のそれとで $2U$ の差がある基本場からの摂動成分に関する 2 層準地衡流渦位方程式の順圧成分（上層の渦位方程式と下層のそれとを足して 2 で割ったもの）と傾圧

^{*3} ここで、 $\Pi_E(k)$ と $\Pi_Z(k)$ はそれぞれ運動エネルギーフラックスとエンストロフィーフラックスと解釈するべきであることに注意しておく。

成分（上層の渦位方程式から下層のそれを引いて2で割ったもので）である。ここで、 q_ψ と q_τ はそれぞれ渦位の順圧成分、傾圧成分である。 ψ , τ はそれぞれ流れ関数の順圧成分、傾圧成分である。上層と下層の流体は等しい厚さで、下端に固体壁があり、下層の渦度に比例した Ekman 摩擦が下層にのみ作用する。 κ が Ekman 摩擦係数である。粘性は次数 γ の高階粘性で、上層の流体の粘性係数が ν 、下層の流体の粘性係数が $\nu + \Delta\nu$ と、上層と下層とで粘性係数が $\Delta\nu$ だけ異なる設定になっている。さらに、Ekman 摩擦、高階粘性の他に、Newton 冷却によって温度場が減衰する機構も取り入れている。 α が Newton 冷却の時定数である。 k_d は Rossby の変形半径の逆数である。理論的取り扱いを簡単にするため、擾乱場の境界条件に周期境界条件を課すことにし、流れの境域は $L_x \times L_y$ の矩形領域とする。

この方程式系にはコリオリパラメーターの緯度依存性、ベータ効果、は考慮されていない。なぜならばベータ効果によって渦位方程式に現れる項は、全エネルギー方程式やポテンシャルエントロフィー方程式には影響を与えない。したがって、ベータ効果は Danilov 不等式の符号に影響を与えないからである。

3 Danilov 不等式

3.1 全エネルギー方程式とポテンシャルエントロフィー方程式

二重周期境界条件を課しているので、流れ関数、 ψ と τ 、は Fourier 級数展開することができる：

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (5a)$$

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\tau}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (5b)$$

ここで $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (\frac{2\pi}{L_x} n_x, \frac{2\pi}{L_y} n_y)$ であり、 n_x と n_y は整数である。総和 $\sum_{\mathbf{k}}$ は全ての整数ベクトル (n_x, n_y) に渡ってとるものとする。(4) に (5) を代入し、波数空間における渦位方程式に書き直し、さらにそれらから波数ベクトル $\mathbf{k}$ を持つモードの全エネルギー方程式、

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\partial t} = T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) + F_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) + D_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}), \quad (6a)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left\{ k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 + (k^2 + k_d^2) |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \right\}, \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = & \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{m}} \left\{ T_{\psi}^{\text{I}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\psi}^{\text{II}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \right. \\ & \left. + T_{\tau}^{\text{I}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\tau}^{\text{II}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) + T_{\tau}^{\text{III}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) \right\} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}, 0}, \end{aligned} \quad (6c)$$

$$T_{\psi}^{\text{I}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z(m^2 - l^2)\Re \left[\hat{\psi}(\mathbf{k})\hat{\psi}(\mathbf{l})\hat{\psi}(\mathbf{m}) \right], \quad (6d)$$

$$T_{\psi}^{\text{II}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z(m^2 - l^2)\Re \left[\hat{\psi}(\mathbf{k})\hat{\tau}(\mathbf{l})\hat{\tau}(\mathbf{m}) \right], \quad (6e)$$

$$T_{\tau}^{\text{I}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z\Re \left[m^2\hat{\tau}(\mathbf{k})\hat{\tau}(\mathbf{l})\hat{\psi}(\mathbf{m}) - l^2\hat{\tau}(\mathbf{k})\hat{\psi}(\mathbf{l})\hat{\tau}(\mathbf{m}) \right], \quad (6f)$$

$$T_{\tau}^{\text{II}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_z\Re \left[m^2\hat{\tau}(\mathbf{k})\hat{\psi}(\mathbf{l})\hat{\tau}(\mathbf{m}) - l^2\hat{\tau}(\mathbf{k})\hat{\tau}(\mathbf{l})\hat{\psi}(\mathbf{m}) \right], \quad (6g)$$

$$T_{\tau}^{\text{III}}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{l} \times \mathbf{m})_zk_d^2\Re \left[\hat{\tau}(\mathbf{k})\hat{\psi}(\mathbf{l})\hat{\tau}(\mathbf{m}) - \hat{\tau}(\mathbf{k})\hat{\tau}(\mathbf{l})\hat{\psi}(\mathbf{m}) \right], \quad (6h)$$

$$F_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = -k_x U k_d^2 \Im \left[\hat{\psi}(\mathbf{k})\hat{\tau}^*(\mathbf{k}) \right], \quad (6i)$$

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = & -\nu k^{2\gamma} \left\{ k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 + (k^2 + k_d^2) |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \right\} \\ & - \frac{\Delta\nu}{2} k^{2\gamma} \left\{ k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k}) - \hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 + k_d^2 \left(|\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 - \Re[\hat{\psi}(\mathbf{k})\hat{\tau}(\mathbf{k})^*] \right) \right\} \\ & - \frac{\kappa}{2} k^2 \left(|\hat{\psi}(\mathbf{k}) - \hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \right) - 2\alpha k_d^2 |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2, \end{aligned} \quad (6j)$$

と波数ベクトル $\mathbf{k}$ を持つモードのポテンシャルエントロピー方程式を得る:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Z}(\mathbf{k}) = T_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}) + F_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}) + D_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}), \quad (7a)$$

$$\mathcal{Z}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left\{ k^4 |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 + (k^2 + k_d^2)^2 |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \right\} \quad (7b)$$

$$T_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}) = k^2 \left\{ T_{\psi}^{\text{I}}(\mathbf{k}) + T_{\psi}^{\text{II}}(\mathbf{k}) \right\} + (k^2 + k_d^2) \left\{ T_{\tau}^{\text{I}}(\mathbf{k}) + T_{\tau}^{\text{II}}(\mathbf{k}) + T_{\tau}^{\text{III}}(\mathbf{k}) \right\}, \quad (7c)$$

$$F_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}) = -k_x U k_d^4 \Im \left[\hat{\psi}(\mathbf{k})\hat{\tau}^*(\mathbf{k}) \right], \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}) = & -\nu k^{2\gamma} \left\{ k^4 |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 + (k^2 + k_d^2)^2 |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \right\} \\ & - \frac{\Delta\nu}{2} k^{2\gamma} \left(|k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}) - (k^2 + k_d^2) \hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \right) \\ & - \frac{\kappa}{2} k^2 \left\{ k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k}) - \hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 + k_d^2 \left(|\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 - \Re[\hat{\psi}(\mathbf{k})\hat{\tau}^*(\mathbf{k})] \right) \right\} \\ & - 2\alpha k_d^2 (k^2 + k_d^2) |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2. \end{aligned} \quad (7e)$$

3.2 Danilov 不等式

Gkioulekas and Tung (2007)⁽⁸⁾ と Gkioulekas(2014)⁽⁷⁾ に従って、現在の系におけるフラックス差の不等式を議論する。この節での議論を簡単にするために流れの領域を無限の領域に拡張する。このとき、前節における $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ と $\hat{\tau}(\mathbf{k})$ はそれぞれ ψ と τ の Fourier 変換と解釈する。(6) の波数空間内における角度積分をとり、結果の式のアンサンブル平均をとることによって、次の全エネルギー

スペクトル方程式を得る:

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_E(k)}{\partial k} + F_E(k) + D_E(k), \quad (8a)$$

$$E(k) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (8b)$$

$$\Pi_E(k) = \int_k^\infty \langle T_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') \rangle dk', \quad (8c)$$

$$F_E(k) = \langle F_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (8d)$$

$$D_E(k) = \langle D_{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) \rangle. \quad (8e)$$

ここで $E(k)$ は全エネルギースペクトルで, $\Pi_E(k)$ は全エネルギーフラックス, $D_E(k)$ と $F_E(k)$ はそれぞれ全エネルギースペクトル方程式における散逸スペクトルと強制スペクトルである. ここで角括弧は波数空間内における角度積分とアンサンブル平均を表す. 同様に, 以下のポテンシャルエントロフィースペクトル方程式が (7) から得られる:

$$\frac{\partial Z(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_Z(k)}{\partial k} + F_Z(k) + D_Z(k), \quad (9a)$$

$$Z(k) = \langle \mathcal{Z}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (9b)$$

$$\Pi_Z(k) = \int_k^\infty \langle T_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}') \rangle dk', \quad (9c)$$

$$F_Z(k) = \langle F_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (9d)$$

$$D_Z(k) = \langle D_{\mathcal{Z}}(\mathbf{k}) \rangle. \quad (9e)$$

ここで $Z(k)$ はポテンシャルエントロフィースペクトルであり, $\Pi_Z(k)$ はポテンシャルエントロフィーフラックス, $D_Z(k)$ と $F_Z(k)$ はそれぞれポテンシャルエントロフィースペクトル方程式の散逸スペクトルと強制スペクトルである.

我々は定常性を仮定し, (8a) と (9a) の両方を k に関して k から無限まで積分する. このとき

$$\Pi_E(k) = -\int_k^\infty \{F_E(k') + D_E(k')\} dk', \quad (10a)$$

$$\Pi_Z(k) = -\int_k^\infty \{F_Z(k') + D_Z(k')\} dk', \quad (10b)$$

を得る. ここで我々は全エネルギー保存則とポテンシャルエントロフィー保存則, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_E(k) = 0$ と $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_Z(k) = 0$, を用いた. さらに, (10a) に k^2 を掛けたものから (10b) を差し引くと,

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) = -\int_k^\infty \{k^2 F_E(k') - F_Z(k') + k^2 D_E(k') - D_Z(k')\} dk' \quad (11)$$

が導かれる. (6i), (6j), (7d), (7e), (8d), (8e), (9d), (9e) を (11) の被積分関数に代入し, 最終的に以

下の式を得る:

$$\begin{aligned}
 k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) = & - \int_k^\infty [(k^2 - k_d^2) \langle -k'_x U k_d^2 \Im [\hat{\psi}(\mathbf{k}') \hat{\tau}^*(\mathbf{k}')] \rangle \\
 & - \nu k'^{2\gamma} \langle (k^2 - k'^2) k'^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k}')|^2 + (k^2 - k'^2 - k_d^2)(k'^2 + k_d^2) |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 \rangle \\
 & - \frac{\Delta\nu}{2} k'^{2\gamma} \langle (k^2 - k'^2) k'^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k}')|^2 \\
 & - \{ (k^2 - k'^2)(k'^2 + k_d^2) + k'^2(k^2 - k'^2 - k_d^2) \} \Re[\hat{\psi}(\mathbf{k}') \hat{\tau}^*(\mathbf{k}')] \\
 & + \{ (k^2 - k'^2 - k_d^2)(k'^2 + k_d^2) \} |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 \rangle \\
 & - \frac{\kappa}{2} k'^2 \langle (k^2 - k'^2) |\hat{\psi}(\mathbf{k}') - \hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 - k_d^2 \{ |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 - \Re[\hat{\psi}(\mathbf{k}') \hat{\tau}^*(\mathbf{k}')] \} \rangle \\
 & - 2\alpha k_d^2 (k^2 - k'^2 - k_d^2) \langle |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 \rangle dk'. \tag{12}
 \end{aligned}$$

我々は $\Re[\hat{\psi}(\mathbf{k}) \hat{\tau}^*(\mathbf{k})]$ と $\Im[\hat{\psi}(\mathbf{k}) \hat{\tau}^*(\mathbf{k})]$ の両方の符号を確定することができない。それゆえ強制項, 非対称な超粘性項, Ekman 摩擦項はフラックス差の符号不確定性に寄与する。

(12) における積分は $\int_k^\infty dk'$ から $-\int_0^k dk'$ に書き換えられる, しかしその被積分関数は変わらないことを注意しておく。フラックス差のそのような形式は, 全エネルギーフラックスとポテンシャルエンストロフィーフラックスを求める際に, それぞれ (8a) と (9a) を k に関して 0 から k まで積分すると得られる。この場合, 保存則 $\lim_{k \rightarrow 0} \Pi_E(k) = 0$ と $\lim_{k \rightarrow 0} \Pi_Z(k) = 0$ を用いる。

$\Delta\nu = 0$, $\kappa = 0$, $\hat{\tau}(\mathbf{k}) = 0$, $\alpha = 0$ とすると, (12) は 2DNS 系の Danilov 不等式になる。積分区間 $k < k' < \infty$ では $F_E(k)$ がゼロ, 即ち積分区間に強制波数帯が含まれないなら, $k^2 - k'^2 \leq 0$ なので, フラックス差は負符号に確定する。前パラグラフで述べたように, (12) の積分区間は $\int_k^\infty dk$ から $-\int_0^k dk$ に変換できる。このとき, フラックス差の符号は変わらない。なぜなら積分区間 $0 < k' < k$ で $k - k' \geq 0$ だからである。それゆえ, フラックス差は強制波数帯よりも低波数側でも高波数側でも負符号である。これが 2DNS 系の Danilov 不等式である。2DNS 乱流の高レイノルズ数状態では $k^{-5/3}$ スペクトル領域におけるエンストロフィーフラックスはゼロであることが知られている。この事実と Danilov 不等式を合わせると, エネルギーフラックスは $k^{-5/3}$ スペクトル領域で負, 即ち, エネルギーは低波数側に輸送される。同様に, 2DNS 乱流の高レイノルズ数状態では k^{-3} スペクトル領域におけるエネルギーフラックスはゼロであることが知られている。この事実と Danilov 不等式を合わせると, エンストロフィーフラックスは k^{-3} スペクトル領域で正, 即ち, エンストロフィーは高波数側に輸送される。これらの性質は, いかなる完結近似も用いていないことを注意しておく。この観点から Danilov 不等式は 2D NS 乱流の波数空間の力学を議論する際において非常に重要な関係式である。

4 数値実験による検証

4.1 数値実験の概要

この節では (4) に従う乱流の直接数値実験について報告する。まず初めに数値計算法の概要, 用いた初期条件, 解像度について述べる。(4) に含まれるパラメーターの数値は, 基本的に Larichev and Held (1995)⁽¹³⁾ と Arbic and Flierl (2004)⁽²⁾ において用いられたものに従って選ばれている。

$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ の正方領域に N^2 の格子点を持つ解像度で、倍精度の擬スペクトル法を用いる。切断波数 k_T は 2/3 エリアジング除去法に従って選ぶ。時間積分には、時間間隔 Δt が固定の Runge-Kutta-Gill 法を用いる。用いた Δt が Courant-Friedrich-Lewy 条件を満足していることは確認している。

初期条件は流れ関数を与える。流れ関数の Fourier 成分の位相が 0 から 2π の範囲の白色ノイズであり、流れ関数の Fourier 成分の振幅は順圧エネルギースペクトル $E_\psi(k)$ と傾圧エネルギースペクトル $E_\tau(k)$ がともに k に依存せず、

$$E_\psi(k) \equiv \frac{1}{2} \langle k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rangle = 3.0 \times 10^{-8}, \quad E_\tau(k) \equiv \frac{1}{2} \langle (k^2 + k_d^2) |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \rangle = 3.0 \times 10^{-8}, \quad (13)$$

の値を持つように設定する。まず初めに $N = 256$ の解像度で $t = t_1$ まで系をスピニングアップさせ、引き続き高解像度 $N = 512$ で $t = t_2$ まで計算を行う。高解像度の計算の結果を解析し、結果の統計的収束性をよくするために、結果に $t_2 - t_{\text{ave}}$ から t_2 の範囲で時間平均を施す。

空間を k_d^{-1} 、時間を $(2Uk_d)^{-1}$ 、流れ関数を $2Uk_d^{-1}$ 、渦位を $2Uk_d$ でスケールリングすることにより次の 3 つの無次元パラメーターが支配方程式に含まれることが導かれる：

$$\frac{2Uk_d}{\kappa}, \quad \frac{2U}{\nu k_d^{2\gamma-1}}, \quad \frac{2U}{\Delta\nu k_d^{2\gamma-1}}. \quad (14)$$

特に $(2Uk_d)/\kappa$ は Arbic and Flierl(2003)⁽¹⁾ によって ‘throughput’ と名付けられた重要なパラメーターである。なぜならそれは全エネルギーの運動エネルギーと有効位置エネルギーへの配分、もしくは全エネルギーの順圧成分と傾圧成分への分配を制御しているからである。例えば、小さな throughput では全エネルギーは有効位置エネルギーが支配的であり、系はあたかも等価順圧系としてふるまう。一方、大きな throughput では全エネルギーは運動エネルギーが支配的であり、系はあたかも順圧系としてふるまう。

地衡流乱流では $k \lesssim k_d$ の波数領域に通常興味があるが、我々は全ての波数領域に興味がある。特に、NG スペクトルでは $k^{-5/3}$ は k_d よりも大きい波数領域に存在する。そこで、エネルギーの逆カスケードが起きるのに十分でなおかつ、 $k > k_d$ の領域も十分解像出来るように我々は全ての数値実験で $k_d = 10$ と選んだ。さらに $U = 2.5 \times 10^{-2}$ と固定している。このときこの研究で使用した Uk_d の値は Larichev and Held (1995)⁽¹³⁾ におけるその量と同じ値である。 κ の値を変えることで、我々は throughput の値を 1.25×10^{-2} から 25 まで変化させた。throughput のこの範囲は Arbic and Flierl (2004)⁽²⁾ のそれと同じである。throughput を変化させる実験を TH 実験と呼ぶことにする。

この研究で使用した超粘性は Larichev and Held (1995)⁽¹³⁾ のそれと同様である。彼らは $k_T = 128$ のシミュレーションに対して $\gamma = 4$ と $\nu = 5.12 \times 10^{-16}$ を用いた。我々は切断波数における超粘性による減衰の時定数が Larichev and Held (1995)⁽¹³⁾ のそれと同じ値になるように超粘性係数の値を設定している。それゆえ $\nu = 5.12 \times 10^{-16} \times (128/k_T)^{2\gamma}$ である。TH 実験で使用したパラメーターの値は表 1 にまとめられている。

我々は高波数側の解像度について注意を払って数値計算を行っている。高波数側に散逸領域が十分に解像出来ていない場合には、慣性領域の統計の精度に影響を与えることが知られている（例えば、Watanabe and Gotoh (2007)⁽²⁰⁾）。もし、粘性係数 ν と $\nu + \Delta\nu$ が高波数側に輸送された全エネルギーとポテンシャルエンストロフィーを散逸させるのに十分大きくない場合、スペクトルは切断波数

表 1 TH 実験で使用されたパラメター.

Experiment	N	k_T	κ	$2Uk_d/\kappa$	t_1	t_2	t_{ave}	Δt	$\Delta\nu$
TH1	512	170	0.02	25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH2	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH3	512	170	0.08	6.25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH4	512	170	0.2	2.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH5	512	170	0.4	1.25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH6	512	170	0.8	0.625	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH7	512	170	2	0.25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH8	512	170	8	$6.25 \cdot 10^{-2}$	10000	10500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH9	512	170	40	$1.25 \cdot 10^{-2}$	64000	66000	500	$1.25 \cdot 10^{-3}$	0

近傍で浅いスペクトルに遷移する. 散逸領域が解像されていることを判定するための一つの方法は, 散逸波数が切断波数 k_T よりも小さいことである. 次元解析により見積もられた超粘性による全エネルギー散逸率に基づく散逸波数 k_ϵ をエネルギー散逸波数と呼ぶことにする. それは以下のように定義される:

$$k_\epsilon \equiv \left(\frac{\epsilon_\nu}{\bar{\nu}^3} \right)^{1/(6\gamma-2)}, \quad (15)$$

$$\epsilon_\nu \equiv \sum_{i=1}^2 \overline{\nu_i \psi_i \nabla^{2\gamma} q_i}. \quad (16)$$

ここで, ϵ_ν は超粘性による全エネルギー散逸率である. $\bar{A}$ は A の空間平均を表し, 添え字 1, 2 はそれぞれ上層, 下層の物理量を表す. $\bar{\nu}$ は上層と下層の粘性係数の平均, $\bar{\nu} \equiv (\nu_1 + \nu_2)/2$, である. 同様に, 超粘性によるポテンシャルエンストロフィー散逸率に基づく散逸波数 k_η をエンストロフィー散逸波数と呼ぶことにする. それは, 次元解析から次のように定義される:

$$k_\eta \equiv \left(\frac{\eta_\nu}{\bar{\nu}^3} \right)^{1/6\gamma}, \quad (17)$$

$$\eta_\nu \equiv - \sum_{i=1}^2 \overline{\nu_i q_i \nabla^{2\gamma} q_i}. \quad (18)$$

ここで η_ν は超粘性によるポテンシャルエンストロフィー散逸率である. これら 2 つの散逸波数は全ての TH 実験において切断波数よりも小さいことを確認している (図 1). 散逸領域が解像されていることを判定する別の方法は, 以下で定義される散逸スペクトル,

$$D_\nu(k) = \left\langle \nu k^{2\gamma} \left\{ k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 + (k^2 + k_d^2) |\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 \right\} + \frac{\Delta\nu}{2} k^{2\gamma} \left\{ k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k}) - \hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 + k_d^2 \left(|\hat{\tau}(\mathbf{k})|^2 - \Re[\hat{\psi}(\mathbf{k}) \hat{\tau}(\mathbf{k})^*] \right) \right\} \right\rangle, \quad (19)$$

が $k_\epsilon \lesssim k < k_T$ において十分に減衰していることである. この点も本論文で行った数値計算では満足されていることを確認している. 数値実験の結果のいくつかを表 2 に示す.

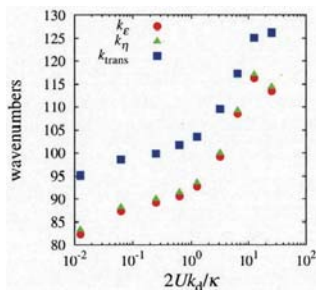


図 1 すべての TH 実験におけるエネルギー散逸波数, エンストロフィー散逸波数, 遷移波数の throughput 依存性.

表 2 TH 実験の結果.

Experiment	c_κ	c_ν	η_κ	η_ν	E
TH1	$0.47990619 \cdot 10^{-1}$	$0.23849213 \cdot 10^{-3}$	0.24764427	$0.37979874 \cdot 10^1$	$0.26895650 \cdot 10^1$
TH2	$0.75712881 \cdot 10^{-1}$	$0.41473304 \cdot 10^{-3}$	0.83255986	$0.64935221 \cdot 10^1$	$0.23190029 \cdot 10^1$
TH3	$0.16787132 \cdot 10^{-1}$	$0.89928054 \cdot 10^{-4}$	0.46390338	$0.12371647 \cdot 10^1$	$0.37730208 \cdot 10^0$
TH4	$0.34109427 \cdot 10^{-2}$	$0.12382602 \cdot 10^{-4}$	0.15525511	0.14862513	$0.59670985 \cdot 10^{-1}$
TH5	$0.59200121 \cdot 10^{-3}$	$0.28114551 \cdot 10^{-5}$	$0.29546000 \cdot 10^{-1}$	$0.30152453 \cdot 10^{-1}$	$0.13192646 \cdot 10^{-1}$
TH6	$0.34140043 \cdot 10^{-3}$	$0.16769339 \cdot 10^{-5}$	$0.17033187 \cdot 10^{-1}$	$0.17362358 \cdot 10^{-1}$	$0.11337625 \cdot 10^{-1}$
TH7	$0.23743678 \cdot 10^{-3}$	$0.11987261 \cdot 10^{-5}$	$0.11962964 \cdot 10^{-1}$	$0.11953822 \cdot 10^{-1}$	$0.18509745 \cdot 10^{-1}$
TH8	$0.14224502 \cdot 10^{-3}$	$0.74500903 \cdot 10^{-6}$	$0.71040161 \cdot 10^{-2}$	$0.72452001 \cdot 10^{-2}$	$0.56305985 \cdot 10^{-1}$
TH9	$0.32841489 \cdot 10^{-4}$	$0.20846945 \cdot 10^{-6}$	$0.15102216 \cdot 10^{-2}$	$0.18876352 \cdot 10^{-2}$	$0.64886552 \cdot 10^{-1}$

4.2 Danilov 不等式の検証

前小節で述べた数値実験について, フラックス差 (1) を計算した結果を図 2 に示す. 図 2 に示すように, すべての波数領域 $1 \leq k \leq k_T$ においてフラックス差 (1) は負符号であり, Danilov 不等式が成立している.

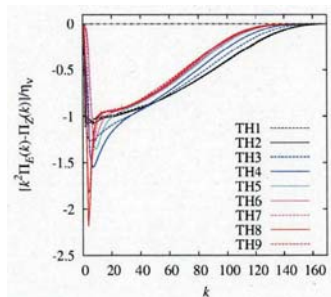


図 2 すべての TH 実験におけるフラックス差 $k^2\Pi_E(k) - \Pi_Z(k)$ の波数依存性. 縦軸は各実験のエンストロフィー散逸率 η_ν で規格化している.

さらに我々は別の解析によって、フラックス差 (1) の符号が転換するか否かを調べる。TO03 は遷移波数

$$k_{\text{trans}} \equiv \sqrt{\frac{\eta\nu}{\epsilon\nu}}. \quad (20)$$

を定義した。彼らは $k < k_{\text{trans}}$ の波数ではポテンシャルエンストロフィーが支配的でありポテンシャルエンストロフィー慣性領域が形成される、一方、 $k > k_{\text{trans}}$ では全エネルギーフラックスが支配的であり全エネルギー慣性領域が形成される、と主張した。(15) と (17) を用いると、遷移波数は散逸波数と

$$k_{\text{trans}} = \left(\frac{k_\eta}{k_\epsilon}\right)^{3\gamma} k_\epsilon \quad (21)$$

と関係づけられる。全エネルギー慣性領域が形成されるためには、遷移波数 k_{trans} はエネルギー散逸波数 k_ϵ よりも小さくなければならない。(21) は、 $k_\epsilon > k_\eta$ であるなら遷移波数がエネルギー散逸波数よりも小さいことを示している。しかしながら、図 1 に示されているように、 k_η は k_ϵ とほとんど同じ値であるが、僅かに k_ϵ よりも大きい。それゆえこの解析は全エネルギー慣性領域が形成される可能性がある波数帯 $k > k_{\text{trans}}$ は全て散逸領域に存在していることを示している。即ち、全エネルギー慣性領域は形成されないことを示している。TO メカニズムと合わせて考えると、このことは Danilov 不等式が高波数側で破綻しないことを示唆しており、フラックス差の解析 (図 2) と無矛盾である。

なお、いくつかの実験 (TH1, TH2, TH5, TH7, TH9) について $N = 1024^2$ の高解像度数値実験を行ったが、フラックス差は全ての波数領域で負であり、また遷移波数はエネルギー散逸波数よりも大きい。つまり上で述べた結果は数値計算の解像度に依存しない。

さらに、TH2 実験について $\Delta\nu$ を -0.5ν から 9ν の範囲で変化させた実験を行ったが、フラックス差は全ての波数領域で負であり、また遷移波数はエネルギー散逸波数よりも大きい。 $\Delta\nu = -0.75\nu$ 以下の値では、高波数側に十分な散逸領域は形成されないことを確認している。

図には示していないが、我々が行った全ての数値実験において全エネルギースペクトルは $k_d \lesssim k \lesssim k_\epsilon$ において $k^{-\delta}$ ($\delta \approx 3 \sim 4$) のべき則に従い、 $k^{-5/3}$ への転移は見られない。

5 まとめ

我々は、2 層準地衡流渦位方程式に従う乱流、地衡流乱流、の数値実験を行い、この系において Danilov 不等式が成立するか否かを数値的に調べた。流れの場に依存した系の強制、上層と下層で Ekman 摩擦や超粘性が非対称であることにより、フラックス差 (1) は符号不確定である。しかしながら、系に含まれる無次元パラメータの値の非常に広い範囲で、数値実験の結果は全ての波数領域でフラックス差 (1) は負符号である、即ち Danilov 不等式は成立していることが示された。TO03 によると、2 層準地衡流渦位方程式の数値実験によって NG スペクトルと同様な形のスペクトルが形成されるためには、Danilov 不等式が破れる必要がある。そこで本論文の結果は、2 層準地衡流渦位方程式の数値実験によって NG スペクトルと同様な形のスペクトルは形成されないことを強く示唆している。このことは 2 層準地衡流渦位方程式の数値実験で NG スペクトルと同様な形のスペクトルが TO03 以外今まで再現されていないことと無矛盾である。

謝辞

本研究は日本学術振興会からの科学研究費 (基盤研究 (C) No. 15K05288) の援助を受けて行われた。

参考文献

- [1] B. K. Arbic and G. R. Flierl. Coherent vortices and kinetic energy ribbons in asymptotic, quasi-two-dimensional f -plane turbulence. *Phys. Fluids*, 15:2177, 2003.
- [2] B. K. Arbic and G. R. Flierl. Baroclinically unstable geostrophic turbulence in the limit of strong and weak bottom ekman friction: Application to midocean eddies. *J. Phys. Ocean.*, 34:2257, 2004.
- [3] G. K. Batchelor. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl. II*, 12:233, 1969.
- [4] B. H. Burgess, E. Andre, and T. G. Shepherd. The troposphere-to-stratosphere transition in kinetic energy spectra and nonlinear spectral fluxes as seen in ecmwf analyses. *J. Atmos. Sci.*, 70:669–687, 2013.
- [5] G. J. Charney. Geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 28:1087–1095, 1971.
- [6] E. Gkioulekas. The effect of asymmetric large-scale dissipation on energy and potential enstrophy injection in two-layer quasi-geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 694:493–523, 2012.
- [7] E. Gkioulekas. Energy and potential enstrophy flux constraints in quasi-geostrophic models. *Physica D*, 284:27–41, 2014.
- [8] E. Gkioulekas and K. K. Tung. Is the subdominant part of the energy spectrum due to downscale energy cascade hidden in quasi-geostrophic turbulence? *Desc. Contin. Dynam. System*, 7:293, 2007.
- [9] E. Gkioulekas and K. K. Tung. A new proof on net upscale energy cascade in two-dimensional and quasi-geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 576:173, 2007.
- [10] K. Hamilton, Y. O. Takahashi, and W. Ohfuchi. Mesoscale spectrum of atmospheric motions investigated in a very fine resolution global general circulation model. *J. Geophys. Res.*, 113:D18110, 2008.
- [11] J. Koshyk and K. Hamilton. The horizontal kinetic energy spectrum and spectral budget simulated by a high-resolution troposphere-stratosphere-mesosphere gcm. *J. Atmos. Sci.*, 58:329–348, 2001.
- [12] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10:1417, 1967.
- [13] V. D. Larichev and I. Held. Eddy amplitudes and fluxes in a homogenous model of fully developed baroclinic instability. *J. Phys. Ocean.*, 25:2285–2297, 1995.
- [14] C. E. Leith. Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 11:671, 1968.
- [15] E. Lindborg. Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence? *J. Fluid Mech.*, 388:259–288, 1999.
- [16] G. D. Nastrom and K. S. Gage. A climatology of atmospheric wavenumber spectra of window and temperature observation ny commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, 42:950–960, 1985.
- [17] K. S. Smith. Comments on “The k^{-3} and $k^{-5/3}$ energy spectrum of atmospheric turbulence:quasi-geostrophic two-level model simulation”. *J. Atmos. Sci.*, 61:937, 2004.
- [18] K. K. Tung. Reply to comments on “The k^{-3} and $k^{-5/3}$ energy spectrum of atmospheric turbulence:quasi-geostrophic two-level model simulation”. *J. Atmos. Sci.*, 61:943, 2004.
- [19] K. K. Tung and W. W. Orlando. The k^{-3} and $k^{-5/3}$ energy spectrum of atmospheric turbulence: quasigeostrophic two-level model simulation. *J. Atmos. Sci.*, 60:824–835, 2003.
- [20] T. Watanabe and T. Gotoh. Inertial-range intermittency and accuracy of direct numerical simulation for turbulence and passive scalar turbulence. *J. Fluid Mech.*, 590:117, 2007.