

建築構造物の確率論的地震応答解析について

南 井 良 一 郎

1. ま え が き

建築構造物の耐震設計は、建設地で将来予想される地震外乱の発生頻度と強度によって異なる二種の耐震設計規範を同時に満足させることを基本的な考え方としている。第一には、建物の使用期間中に遭遇する機会の比較的多い中ないし強震に対して、主として建物の機能保持の観点から、建物の地震挙動を弾性範囲内に収めること、第二に、遭遇する機会の稀な烈ないし激震に対して、主として人命保護と崩壊防止の立場から、塑性域に這入ることを許容するけれども、終局的な耐震安全性を保証することである。このような耐震設計規範は、動的な地震応答解析に基づいて検証されるが、この時、地震の発生や強度に含まれる不確定性、地震外乱の時間関数としての不規則性、ならびに、構造物やその基礎地盤の動力学モデルに含まれる不確定性を考えるならば、建物の地震時の機能性や安全性は、確定論的には検証できないと言えよう。従って、建築構造物の地震応答解析を非決定論的な観点から実施し、地震時の機能性や安全性を確率として把えること、すなわち、耐震信頼度解析が必要となる。

このような耐震信頼度解析を含む地震応答解析を確率論的地震応答解析と呼ぶことにするが、問題が広範囲に亘るため、特に、地震外乱の時間関数としての不規則性に注目した場合に対象を限定する。この意味での確率論的地震応答解析の解析的な研究は、白色雑音を受ける線形 1 自由度振動系の変位応答の絶対値の最大値の確率分布を対象として、E. Rosenblueth¹⁾によって拡散方程式の初期値、境界値問題として始めて扱われた。その後、主として、閾値超過の確率過程論に基づいて、線形振動系の初通過問題の研究が進められてきた^{2)~4)}。非線形系を対象とすれば、非履歴振動系の変位や速度などの応答解析の研究に重点が置かれ、初通過問題として扱った例は極めて少ない⁵⁾。建築構造物の終局的な耐震安全性を問題とすると、非定常地震外乱を受ける履歴振動系の動的信頼度解析を行う必要があるが、例えば、完全弾塑性履歴のような強いソフト型の不安定な履歴振動系に適用可能な通常の意味での確率統計的地震応答解析法が得られたのは極く最近のことである^{6)~11)}。勿論、これ以前にも、履歴振動系の動的信頼度解析は、T. K. Caughey の統計的等価線形化法を非定常過程に拡張し、安定なバイリニア履歴系の低サイクル疲労損傷度¹²⁾¹³⁾を対象として、また、不安定なバイリニア履歴系の最大塑性変形や累積塑性変形^{14)~17)}を対象として試みられ、ある程度の成果が得られている。然し、これらの方法では、応答解析と信頼度解析を別個に行うため、前者では、少くとも 2 個の異なる時間における変位および速度の相関を必要として非定常過程に対する解析が複雑化する欠点があり、また、後者でも、非定常過程への拡張に困難を伴うものと思われる。

本報告では、烈ないし激震を受けて強い非線形性を示す建築構造物の終局的な耐震安全の確率を直接対象とする意味において確率論的な非定常地震応答解析について、ここ数年来地盤災害研究部門で行ってきた研究に関して、詳細は参考文献¹⁸⁾¹⁹⁾²²⁾に譲り、主として、方法的な側面について述べる。

本研究の基本的な方法は、マルコフ過程論に基づき通常の意味での地震応答解析と動的信頼度解析を統一的に行うことにあると言える。具体的には、まず、地震外乱と履歴特性を記述する変数の数を増すことによって、マルコフ・ベクトル過程を形成するに充分な要素数の基本的状態変数を定め、さらに、最大靱性率、累積塑性変形率などの耐震安全性を直接的に測る尺度を状態変数に加える。つぎに、これらの拡大された状態変数の一価非線形関数による 1 階微分表示を行うことによって、白色雑音で代表されるようなデルタ相関性の入力を受ける全動力学系の動的挙動を支配する状態方程式を導き、これから Fokker-Planck の方程式が得られる。最後に、この方程式からモーメント方程式を導き、これを数值的に解いて、全状態変数の統計量と同時確率密度

関数を求め、さらに後者から耐震安全性の尺度に関する周辺分布関数を導くことにより、直接的に、信頼度関数が得られることになる。

2. マルコフ・ベクトル過程の形成と基礎方程式

Fokker-Planck-Kolmogorov の方程式は、一般に、マルコフ・ベクトル過程の推移確率密度関数を規定する時間と状態変数に関する放物型の偏微分方程式であるが、動力学系の確率統計的な解析法の中で、最も信頼度の高い解析方法を与えることはよく知られている²³⁾²⁴⁾。特に、Fokker-Planck の方程式を、零初期条件と無限速で零の境界条件の下で解けば、静止状態から外乱を受ける構造物の拡大された状態変数の非定常過程における同時確率密度関数が求められる。然し、この方法を適用するためには、動力学系を記述する状態ベクトルがマルコフ・ベクトル過程であることが前提条件である。これに関連して、マルコフ・ベクトル過程を形成するための条件として、確定初期条件の下では、動力学系への入力デルタ相関性であること、および、動力学系を記述する状態変数の時間に関する1階微分が、状態変数の1価関数で表現されることが必要である。

上に述べた条件を満足させるためには、まず、地震外乱が、マルコフ・ベクトル過程を形成する状態ベクトルの要素で表されなければならない。このことに関しては、地震外乱の非定常確率過程としてのモデルが、白色雑音過程と時間の確定関数の積を入力として受ける線形動力学系の出力に別の時間の確定関数を乗じて得られることが判っている²³⁾²⁵⁾²⁶⁾。地震外乱を e とすれば、零初期条件の下で、次の方程式で与えられる。

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \frac{d^i}{dt^i} v = \sum_{j=0}^l \beta_j \frac{d^j}{dt^j} (r_1 w), \quad \alpha_m \neq 0, \quad m > l \quad (2.1)$$

$$e = r_2 v \quad (2.2)$$

ここで、 t は時間、 w は白色雑音、 r_1, r_2 は、地震外乱の包絡線に関係する時間の確定関数、 α, β は、フィルターとしての線形動力学系を規定する係数で、一般に、時間の確定関数であってもよい。

(2.1) 式、(2.2) 式で記述される線形動力学系の状態方程式は、 m 次元の状態ベクトルを導入することによって、次式のように書ける。

$$-\frac{d}{dt} {}_E Z = {}_E A {}_E Z + {}_E N, \quad {}_E Z_{t=0} = 0 \quad (2.3)$$

$${}_E Z = \begin{Bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^m \end{Bmatrix}, \quad {}_E N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r_1 w / \alpha_m \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$${}_E A = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ \alpha_0/\alpha_m & \alpha_1/\alpha_m & \alpha_2/\alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_{m-1}/\alpha_m \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$e = r_2 \beta^T {}_E Z, \quad \beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l, 0, \dots, 0\}^T \quad (2.6)$$

ここで、状態ベクトル ${}_E Z$ は、(2.1) 式の右辺を $r_1 w$ と置いた時の解と $(m-1)$ 階までの微分からなっている。 ${}_E N$ はデルタ相関性の外乱ベクトルである。なお、添字 T は、ベクトルおよびマトリックスの転置を示す。(2.3)~(2.6) 式は地震外乱 e が、マルコフ・ベクトル過程 ${}_E Z$ の要素の線形結合によって表されることを示すが、このように構成された地震外乱そのものは、マルコフ過程ではない。

つぎに、上に定めた地震外乱を受ける多自由度構造物の運動方程式が、次式で与えられるとする。

$$\left(a \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} \right) X + f \left(X, \frac{d}{dt} X \right) = -aie \quad (2.7)$$

$$i = \{1, 1, \dots, 1\}^T$$

ここで、 X は変位ベクトル、 a, b は、それぞれ、慣性および粘性減衰係数マトリックス、 f は、変位ベク

トル $\mathbf{X}$ と速度ベクトル $d\mathbf{X}/dt$ の 1 価非線形関数で表される復元力ベクトルとする。

(2.6) 式と (2.7) 式は、次の連立 1 階非線形微分方程式に置き換えられる。

$$s\dot{\mathbf{Z}} = s\mathbf{A}s\mathbf{Z} + s\mathbf{G}(s\mathbf{Z}) + s\mathbf{E}\mathbf{A}_E\mathbf{Z}, \quad s\mathbf{Z}_{t=0} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

$$s\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix}, \quad s\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$s\mathbf{G}(s\mathbf{Z}) = - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^{-1}\mathbf{f} \end{Bmatrix}, \quad s\mathbf{E}\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_E \mathbf{i} \boldsymbol{\beta}^T \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

ここで、 $\cdot$ は d/dt を示す。

(2.3) 式と (2.8) 式から、デルタ相関性の外乱を受ける動力学系の状態方程式が、次式のように書ける。

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{G}(\mathbf{Z}) + \mathbf{N} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} s\mathbf{Z} \\ \mathbf{E}\mathbf{Z} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E}\mathbf{N} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s\mathbf{A} & s\mathbf{E}\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}\mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{Z}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(s\mathbf{Z}) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

(2.3) 式、(2.11)式のように、動力学系を記述する基礎方程式を、連立 1 階常微分方程式で表した時、これを状態方程式と呼び、その時必要な変数の組を状態ベクトルと呼ぶことにする。(2.11) 式の $\mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{G}(\mathbf{Z})$ は、この場合 1 価非線形関数で表される要素からなっているので、この場合状態ベクトル $\mathbf{Z}$ はマルコフ・ベクトル過程となる。

履歴を有する建築構造物を対象とする時、非線形復元力 $\mathbf{f}$ は 1 価関数とはならない。従って、マルコフ・ベクトル過程とするために、履歴特性を記述する変位 x 、速度 $\dot{x}$ の他に、新しい状態変数 z を導入して、この 1 階微分 $\dot{z}$ を、 x 、 $\dot{x}$ および z の 1 価非線形関数で表現することが試みられた^{6)~11)}。バイリニヤ履歴特性の場合、降伏力と降伏変位で無次元化した関数表示を用いて、次式のような表現が得られた⁶⁾⁸⁾。

$$\Phi(x, z; r) = rx + (1-r)z, \quad r \leq 1 \quad (2.14)$$

$$\dot{z} = \dot{x} - g(\dot{x}, z), \quad |z| \leq 1 \quad (2.15)$$

$$g(\dot{x}, z) = \dot{x}[U(\dot{x})U(z-1) + U(-\dot{x})U(-z-1)] \quad (2.16)$$

ここで、 Φ は無次元化されたバイリニヤ履歴特性関数、パラメータ r は第 2 第 1 分枝剛性比、 U は単位階段関数である。新しい状態変数 z は、(2.14)式から判るように、完全弾塑性特性関数の力座標に対応し、従って、その変域は、 $[-1, 1]$ である。なお、 x は靱性率応答を表す。

(2.14)~(2.16)式によって、バイリニヤ履歴特性の 1 階微分表示が始めて可能となったのであるが、殆んど時期を同じくして、バイリニヤ履歴特性の別の表現⁷⁾や、種々の曲線形履歴特性を含む拡張された 1 階微分表示⁹⁾が提案されている。これらの研究によって、非定常状態における一般履歴の数式的表現が得られたとも言えよう。

烈な地震を激震を対象として建築構造物の地震応答解析を行う場合、(2.7) 式中の復元力ベクトル $\mathbf{f}$ は、履歴特性を含むと考えねばならない。一般的に $\mathbf{f}$ の各要素は、状態変数の線形結合と履歴特性の線形結合の和によって与えられる。この場合、すべての要素履歴特性の数だけの新しい状態変数からなるベクトルを(2.11)式の状態ベクトルに加えて次元の拡大された状態ベクトルを定義すればよい。履歴特性は(2.14)式のように線形関数で表され、新しい状態ベクトルの 1 階微分は(2.15)、(2.16)式のような 1 価非線形関数で表現されているので、拡大された動力学系の状態方程式に含まれる非線形項は、すべて 1 価非線形関数となる。従って、拡大された状態ベクトルはマルコフ・ベクトル過程を形成する条件を満たす。つまり、状態ベクトルの拡大と微分表示によって、履歴系の状態方程式は、数学的によりよく定義された非履歴系の状態方程式に変換されると言える。

最終的な目標である耐震信頼度解析を行うためには、当然、安全性を直接的に測り得る尺度を地震応答解析の対象に選ばなければならない。このような耐震安全性の尺度として、最大靱性率、累積塑性エネルギー率、

履歴消費エネルギー率および低サイクル疲労損傷度などが考えられる。地震継続時間により変動する耐震安全性の確率, すなわち信頼度関数を求めるためには, 上に述べたような耐震安全性の尺度の確率分布関数の時間的変動, あるいは同等な意味を持つ閾値初通過時間の確率分布関数を決定しなければならない。このような初通過問題に対しては, マルコフ過程として, Fokker-Planck の方程式の初期値, 境界値問題を解く方法²⁴⁾²⁷⁾と閾値超過率の統計量に基づく解析法²³⁾²⁷⁾がある。前者は, 数学的に極めて難解で, 適用範囲が限られ, 後者も一般に2個以上の異なる時間に関する応答およびその速度応答の同時確率密度関数²⁾, あるいは応答の非定常過程におけるスペクトル密度⁴⁾を要するので, 履歴を有する構造物の非定常過程を対象とする動的信頼度解析にこれらの方法を適用することは, 極めて困難であると思われる。

本研究では, 上に述べたような解析的な困難を避けるため, 耐震安全性の尺度の1階微分表示を行い, 耐震安全性の尺度も状態変数と考えて状態ベクトルを拡大し, マルコフ・ベクトル過程を構成した。このことによって, 耐震安全性の尺度の時間依存性の確率密度関数を初通過問題を仲介とすることなく, 直接的に求めることが可能となった。

一般的な履歴特性に対して, 規準的な弾性限変位パラメータに対して定義した最大靱性率 $\eta_m^{21)}$ および低サイクル疲労損傷度 $\eta_f^{12)13)}$ の1階微分表示は次式で与えられる。

$$\dot{\eta}_m = |\dot{x}|U(x\dot{x})U(|x| - \eta_m), \quad \eta_m \geq 0 \quad (2.17)$$

$$\dot{\eta}_f = \frac{a}{\eta_f^a} |x|^{a-1} |\dot{x}|, \quad a \geq 1, \quad \eta_f \geq 0 \quad (2.18)$$

ここで, x は靱性率応答, η_f は静的破壊靱性率, a は低サイクル疲労の型を決めるパラメータである。

また, 正規化されたバイリニア履歴系に対する累積塑性変形率 $\eta_p^{19)}$ および履歴消費エネルギー率 $\eta_h^{22)}$ は(2.16)式の $g(\dot{x}, z)$ を用いて, 次式のように表される。

$$\dot{\eta}_p = (1-r)|g(\dot{x}, z)|, \quad \eta_p \geq 0 \quad (2.19)$$

$$\dot{\eta}_h = (1-r)\{rx + (1-r)z\}g(\dot{x}, z), \quad \eta_h \geq 0 \quad (2.20)$$

ここで, 履歴消費エネルギー率は弾性限ポテンシャル・エネルギーの2倍に対して無次元化されている。

このような耐震安全性の尺度の時間に関する1階微分表示は, 靱性率応答の絶対値の最大値として定義される最大靱性率やバイリニア履歴特性に対して離散的に発生する塑性変形率の絶対値の和として定義される累積塑性変形率などを, 時間の単調非減少連続関数として表現することを始めて可能にした。従って, これらの耐震安全性の尺度を新しい状態変数に加えて拡大された系の状態方程式は, その右辺が状態変数の1個関数からなる非線形ベクトルとデルタ相関性の非齊次項からなる(2.11)式と同型の連立1階非線形常微分方程式となり, 拡大された状態ベクトルは, 時間に関して連続なマルコフ・ベクトル過程を構成する。

3. Fokker-Planck の方程式とモーメント方程式

2に述べた手順を経て, 耐震外乱を受ける履歴構造物の状態方程式は, 一般に, 次式のように書ける。

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \mathbf{N}, \quad \mathbf{Z}_{t=0} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{G}(\mathbf{Z}), \quad \mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} {}^1\mathbf{Z} \\ {}^2\mathbf{Z} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}\mathbf{W} \quad (3.3)$$

ここで, 全状態変数 $\mathbf{Z}$ の中, ${}^1\mathbf{Z}$ は変位および速度ベクトルと履歴特性の1階微分表示のため導入した状態ベクトルならびに入力をデルタ相関性とするために要した入力側濾波特性の状態ベクトルからなる部分状態ベクトルで ${}^2\mathbf{Z}$ は各部分の耐震安全性の尺度からなる部分状態ベクトルである。 $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ は, $\mathbf{Z}$ の1個非線形関数からなるベクトルで, 一般に, 線形部 $\mathbf{A}\mathbf{Z}$ と非線形部 $\mathbf{G}(\mathbf{Z})$ からなる。(2.10)式, (2.13)式から判るように, $\mathbf{A}$ は, 一般に時間関数である。入力ベクトル $\mathbf{N}$ は, 入力の時間的変動を与えるマトリックス $\mathbf{V}$ とデルタ相関性のベクトル $\mathbf{W}$ の積で与えられる。以後, 状態方程式に現れるベクトルやマトリックスの次元は n とし, 状態変数 $\mathbf{Z}$ の各要素は線形独立であると前提する。

空間平均演算子 E を (3.1) 式に作用させると次式が得られる。

$$\dot{E}[\mathbf{Z}] = E[\mathbf{F}(\mathbf{Z})] + E[\mathbf{N}], \quad E[\mathbf{N}] = \mathbf{V}E[\mathbf{W}], \quad E[\mathbf{Z}]_{t=0} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}_d = \mathbf{F}_d[\mathbf{Z}] + \mathbf{N}_d, \quad \mathbf{Z}_{d,t=0} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

ここで、

$$\mathbf{Z}_d = \mathbf{Z} - E[\mathbf{Z}], \quad \mathbf{F}_d(\mathbf{Z}) = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - E[\mathbf{F}(\mathbf{Z})] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{N}_d = \mathbf{N} - E[\mathbf{N}] = \mathbf{V}\mathbf{W}_d, \quad \mathbf{W}_d = \mathbf{W} - E[\mathbf{W}] \quad (3.7)$$

および

$$E[\mathbf{W}_{dt} \mathbf{W}_{dt+\tau}^T] = \mathbf{J}\delta(\tau), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}^T \quad (3.8)$$

これらの式で、下添字 d は偏差ベクトルを示し、上添字 T は転置を示す。(3.8) 式の $\mathbf{J}$ は定数対称マトリックスで $\delta(\tau)$ は Dirac のデルタ関数である。また、(3.1) 式の状態方程式は、次のように書くことができる。

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + E[\mathbf{N}] + \mathbf{N}_d, \quad E[\mathbf{N}_d] = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

上式において、 $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) + E[\mathbf{N}]$ を纏めて非線形ベクトルと考えれば、零平均値のデルタ相関性外乱を受ける動力学系と見做せる。

確定初期条件 $\mathbf{z}_0$ の下で (3.9) 式で記述される動力学系の状態ベクトルは、連続マルコフ・ベクトル過程を構成し、その推移確率密度関数、 $p(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}_0, 0)$ は、次の Fokker-Planck の方程式を満足する。

$$\dot{p} = Lp = \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{z}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^T}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{F}p) \right)^T - (\mathbf{F}(\mathbf{z}) + E[\mathbf{N}])p \right] \quad (3.10)$$

ここで、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^T = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^T, \quad E[\mathbf{N}_{dt} \mathbf{N}_{dt+\tau}^T] = \mathbf{F}\delta(\tau) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^T}{\partial \mathbf{z}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\} \quad (3.12)$$

動力学系は静止の状態から外乱を受けるとすれば、(3.10) 式の初期条件と境界条件は次式で与えられる。

$$p(\mathbf{z}, 0) = \delta(\mathbf{z}), \quad p(\mathbf{z}, t) |_{|\mathbf{z}|=\infty} = 0, \quad |\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (3.13)$$

一般に確定初期条件と $|\mathbf{z}| = \infty$ で零の境界条件の下では、線形動力学系の Fokker-Planck の方程式の解は正規分布になることが判っているが²³⁾、非線形動力学系の場合には、偏微分方程式として解くことは困難であるので、本研究では、時間の関数としてのモーメント関数に関する連立 1 階非線形常微分方程式を導いて、これを数値的に解くことが行われた。一般に、 q を $\mathbf{z}$ の任意のスカラー関数として、 n 次元全空間 R^n における積分を考えると、(3.13) 式の境界条件を用いて次式が得られる。

$$\dot{E}[q] = \int_{R^n} q \dot{p} d\mathbf{v} \mathbf{z} = \int_{R^n} q Lp d\mathbf{v} \mathbf{z} = \int_{R^n} L^* q p d\mathbf{v} \mathbf{z} = E[L^* q] \quad (3.14)$$

ここで、 L^* は L の随伴演算子で次式で与えられる。

$$L^* q = \left[\frac{1}{2} \left(\mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right)^T + (\mathbf{F}(\mathbf{z}) + E[\mathbf{N}])^T \right] \frac{\partial q}{\partial \mathbf{z}} \quad (3.15)$$

状態ベクトル $\mathbf{Z}$ のモーメント関数は、 $\mathbf{Z}$ の λ 行要素を Z^λ とし、 l_λ を非負の整数として次式で定義される。

$$M(l_1, l_2, \dots, l_n) = E[q], \quad q = \prod_{\lambda=1}^n Z^\lambda l_\lambda \quad (3.16)$$

従って、(3.16) 式の q を (3.14) 式に代入すると、モーメント関数に関する次の連立 1 階常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{M}(l_1, l_2, \dots, l_n) &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n \gamma_\lambda l_\lambda (l_\lambda - 1) M(l_1, \dots, l_\lambda - 2, \dots, l_n) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^n \gamma_\mu l_\mu l_\mu M(l_1, \dots, l_\lambda - 1, \dots, l_\mu - 1, \dots, l_n) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^n l_\lambda E[N^\lambda] M(l_1, \dots, l_\lambda - 1, \dots, l_n) + \sum_{\lambda=1}^n l_\lambda E[F^\lambda(\mathbf{Z}) q / Z^\lambda] \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで、

$$M(l_1, l_2, \dots, l_n)_{t=0} = 0, \sum_{k=1}^n l_k > 1 \quad (3.18)$$

$$M(0, 0, \dots, 0) = 1, t \geq 0 \quad (3.19)$$

なお、(3.17)式で、 r_μ^λ は $\mathbf{F}$ の λ 行 μ 列要素、 $F^\lambda(\mathbf{Z})$ 、 N^λ は、それぞれ、 $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ 、 $\mathbf{N}$ の λ 行要素である。(3.18)式および(3.19)式は、零初期条件と正規化の条件を示している。また、(3.17)式のモーメント方程式は、無限連立1階常微分方程式であり、有限の次数で打ち切て解くことになるが、その場合にも、(3.17)式最右辺の非線形項は $F^\lambda(\mathbf{Z})$ が一般に $\mathbf{Z}$ の各要素の多項式でないのでモーメント関数では表されず、打切に伴ってこの項の具体的な表現が重要な問題となる。

特に、1次および2次のモーメント方程式から、平均ベクトル $E[\mathbf{Z}]$ および共分散マトリックス $E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]$ に関する次の方程式が得られる。

$$\dot{E}[\mathbf{Z}] = E[\mathbf{F}(\mathbf{Z})] + E[\mathbf{N}], E[\mathbf{Z}]_{t=0} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T] &= E[\mathbf{F}_d(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T] + E[\mathbf{Z}_d \mathbf{F}_d(\mathbf{Z})^T] + \mathbf{F} \\ &= E[\mathbf{F}(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T] + E[\mathbf{Z}_d \mathbf{F}(\mathbf{Z})^T] + \mathbf{F}, \\ E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]_{t=0} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.21)$$

(3.20)式および(3.21)式の右辺で、 $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ は、通常、(3.2)式のように線形項と非線形項からなるが、この場合、次式のように書ける。

$$E[\mathbf{F}(\mathbf{Z})] = \mathbf{A}E[\mathbf{Z}] + E[\mathbf{G}(\mathbf{Z})] \quad (3.22)$$

$$E[\mathbf{F}(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T] = \mathbf{A}E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T] + E[\mathbf{G}(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T] \quad (3.23)$$

(3.22)式および(3.23)式は、非線形動力学系を対象とする場合、本質的な非線形項 $\mathbf{G}(\mathbf{Z})$ の存在によって、線形動力学系におけるように、(3.20)式および(3.21)式の右辺を $E[\mathbf{Z}]$ と $E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]$ によって表現することは、一般的には困難であることを示している。また、非線形動力学系の場合、空間平均演算子を定義する確率密度関数 $p(\mathbf{z}; t)$ は、(3.10)式の Fokker-Planck 方程式を直接解くことは困難であるので、一般には厳密に評価されない。従って、近似確率密度関数 $\tilde{p}(\mathbf{z}; t)$ を仮定して、空間平均演算子 E を具体的に決定することによって、(3.17)式あるいは(3.20)、(3.21)式の解析が実行可能となる。本論では、この近似確率密度関数の導入に際して、ここで扱われる非線形動力学系を記述する状態変数が本質的に有する非正規性を考慮して、次のような試みが、個々の場合に依りて行われた。

i) 擬似モーメント (quasi-moment) 関数と多次元エルミート多項式による展開を用いた近似⁽⁶⁾⁽²⁷⁾

擬示モーメント関数は、モーメント関数あるいはキュムラント関数によって表現されるが、この場合には、(3.20)、(3.21)式の他に、(3.17)式での高次のモーメント方程式から擬似モーメント関数を導き、これらを連立して解くことになる。

ii) 状態変数の変域が有界あるいは半無限であることを考慮した近似^{(5)(8)(18)~(22)}

基本的には正規確率密度関数を仮定するが、状態変数の変域が有界あるいは半無限である場合には、これを考慮して、領域外の確率をデルタ関数を用いて領域端部に集中させ確率密度関数の正規化の条件を満たす。ここで、基本の正規確率密度関数を構成する平均ベクトル及び共分散マトリックスは未知パラメータである。

iii) 近似的な確率密度関数が既知の場合⁽²²⁾

累積塑性変形率、履歴消費エネルギー率等は、シミュレーション解析によりガンマ分布で比較的良好に近似できることが判っている⁽²²⁾⁽²⁹⁾。この場合、これらの状態変数についてはガンマ分布を仮定するとともに、変数変換によって、ガンマ分布の正規近似を行い、同じ平均、分散を有する正規分布の新しい状態変数を導入する。この正規近似により変数の領域も $(-\infty, \infty)$ となり、平均演算子 E についての計算が比較的簡単になる。

以上の詳細は文献に譲るとして、これら状態変数の非正規性を考慮した近似確率密度関数を導入し、平均演算子 E を定義することは、解析の精度を大いに向上させるものであるが、その代り、解析の過程は複雑にならざるを得ない。例えば、i) の近似法の場合、状態変数の変域が有界であるならば、相当高次の擬似モーメント関数まで考慮する必要があるため、ii) の方法との組合せが考えられた⁹⁾。また、ii) の近似法では、近似確

率密度関数が未知パラメータを含んでいるので、(3.17)式のモーメント方程式あるいは、(3.20)、(3.21)式の状態変数についての平均ベクトルおよび共分散マトリックスに関する方程式を直接的に解くことができない。従って、(3.20)、(3.21)式の各項を未知パラメータによって解析的に表現した上で、これら未知パラメータに関する連立1階非線形常微分方程式に変換する操作が必要となる。これを数値積分によって解いて、時間依存性の近似確率密度関数 $\tilde{p}$ が求められる。

尚、非定常過程における状態変数についての平均ベクトルおよび共分散マトリックスは近似確率密度関数 $\tilde{p}(\mathbf{z}; t)$ を用いて次式で得られる。

$$E[\mathbf{Z}] = \int_{R^n} d_0 \mathbf{z} \tilde{p}(\mathbf{z}; t) \quad (3.24)$$

$$E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T] = \int_{R^n} d_0 \mathbf{z} [\mathbf{z}_d \mathbf{z}_d^T] \tilde{p}(\mathbf{z}; t) \quad (3.25)$$

ここで、 R^n は n 次元の全領域である。

耐震安全性の尺度を表す状態ベクトル ${}^2\mathbf{Z}$ の同時確率密度関数、ならびに動力学系全体およびその構成要素に対する信頼度関数 R は次式によって求められる。

$$\tilde{p}({}^2\mathbf{z}; t) = \int_{R^{n-m}} d_0 {}^1\mathbf{z} \tilde{p}({}^1\mathbf{z}, {}^2\mathbf{z}; t) \quad (3.26)$$

$$R(t; S^m) = \int_{S^m} d_0 {}^2\mathbf{z} \tilde{p}({}^2\mathbf{z}; t) \quad (3.27)$$

$$R(t; S^1_{\mu}) = \int_{S^1_{\mu}} d_0 {}^2\mathbf{z}_{\mu} \int_{R^{n-1}} d_0 {}^2\mathbf{z}_{\mu} \tilde{p}({}^2\mathbf{z}; t) \quad (3.28)$$

ここで、 R^{n-m} は基本状態ベクトル ${}^1\mathbf{z}$ に関する全領域であり、 S^m , S^1_{μ} は、それぞれ系全体および構成要素に関する安全領域である。また、 ${}^2\mathbf{z}_{\mu}$, ${}^2\mathbf{z}_{\mu}$ は、 μ 要素の安全性に関する変数およびそれ以外の要素の安全性に関する変数ベクトルである。

一般に、多くの構成要素からなる動力学系の耐震安全の確率を対象とする場合、各要素の耐震安全性の尺度間の相関が重要となるが²⁹⁾、本研究による耐震信頼度解析によれば、耐震安全性の尺度で構成される状態ベクトル ${}^2\mathbf{Z}$ の同時確率密度関数が求まるので、本方法によれば、この種の問題は、方法論的には解決されていると言える。

以上述べた解析法の数値解析例として、(2.14)式で示されるバイリニア履歴特性を有する1自由度非線形動力学系が非定常地震外乱を受ける場合について示す。ここでは、耐震安全性を表す尺度として最大靱性率を採用し、また、地震外乱は平均値0、スペクトル密度 S_0 の white noise $w(t)$ と時間の確定関数 $\alpha(t)$ との積として与えられるものとする。この場合、(3.1)式の状態方程式は(2.14)～(2.17)式により次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\eta}_{\mu} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -r & -2h & r-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \eta_{\mu} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g(y, z) \\ g_{\mu}(x, y, \eta_{\mu}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha(t)w(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\eta_{\mu} = |x| - \eta_m \quad (3.30)$$

$$g_{\mu}(x, y, \eta_{\mu}) = \text{sgn}(x)y - |y|U(xy)U(\eta_{\mu}) \quad (3.31)$$

ここで、 x は靱性率応答、 y は靱性率速度応答、 h は系の臨界減衰比であり、 sgn は符号関数である。空間平均演算子 E を実施するために導入する近似確率密度関数については、ii)の方法を採用して次式を仮定する。

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, y, z, \eta_{\mu}; t) &= D_2 D_{\mu} w(x, y, z, \eta_{\mu}; t) + D_2 \delta(\eta_{\mu}) \int_0^{\infty} d\eta_{\mu}' w(x, y, z, \eta_{\mu}'; t) \\ &+ D_{\mu} \delta(x+1) \int_{-\infty}^{-1} dz' w(x, y, z', \eta_{\mu}; t) + D_{\mu} \delta(x-1) \int_1^{\infty} dz' w(x, y, z', \eta_{\mu}; t) \\ &+ \delta(x+1) \delta(\eta_{\mu}) \int_{-\infty}^{-1} dz' \int_0^{\infty} d\eta_{\mu}' w(x, y, z', \eta_{\mu}'; t) + \delta(x-1) \delta(\eta_{\mu}) \int_1^{\infty} dz' \int_0^{\infty} d\eta_{\mu}' w(x, y, z', \eta_{\mu}'; t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ここで,

$$D_{\mu}=1-U(-z-1)-U(z-1), D_{\mu}=1-U(\eta_{\mu})$$

また, $w(x, y, z, \eta_{\mu}; t)$ は平均ベクトル $\mathbf{m}$ および共分散マトリックス $\mathbf{v}$ で規定される正規確率密度関数である。尚, $\mathbf{m}, \mathbf{v}$ は未知パラメータで, 一般には, $\mathbf{m} \neq E[\mathbf{Z}]$, $\mathbf{v} \neq E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]$ である。(3.32)式の近似確率密度関数を用いて, (3.22)～(3.25)式を $\mathbf{m}, \mathbf{v}$ で表現し, さらに, (3.20)～(3.21)式を $\mathbf{m}, \mathbf{v}$ についての連立1階非線形常微分方程式に書き直して, これを数値解析的に解くことができる。この結果を用いて, 最大靱性率 η_m の確率密度関数は (3.32) 式から次式で表される。

$$p(\eta_m; t) = C \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(x, y, z, |x| - \eta_m) dx dy dz \quad (3.33)$$

ここで, C は確率密度関数の正規化定数である。また, 靱性率に限界値 x_F が存在するとした場合の信頼度関数 $R(t; x_F)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} R(t; x_F) &= \text{Prob}[|x(\tau)| < x_F; 0 \leq \tau \leq t] = \text{Prob}[\eta_m(t) < x_F] \\ &= \int_0^{x_F} p(\eta_m; t) d\eta_m \end{aligned} \quad (3.34)$$

Fig. 1 で示される地震外乱の包絡線関数 $\alpha(t)$ を採用した場合の数値解析結果を Figs. 2, 3 に示す。Fig. 2(a) および(b) は, それぞれバイリニア履歴特性の剛性比 r が0.5および0.1の場合について, 最大靱性率の平均値 $E[\eta_m]$ および標準偏差 σ_m を示す。また, 靱性率応答の標準偏差 σ_x も示されている。Fig. 3 は限界靱性率 x_F をパラメータとして, 信頼度関数 $R(t; x_F)$ を示す。これらの図の横軸は, 系が線形のときの固有周期 t_0 で無次

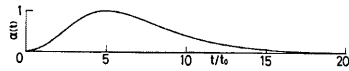


Fig. 1 Envelope function of nonstationary excitation.

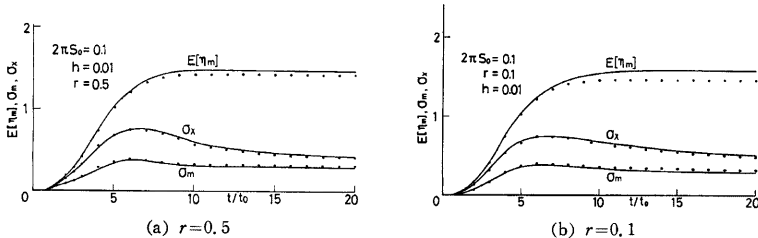


Fig. 2 Mean value $E[\eta_m]$ and standard deviation σ_m and σ_x for bilinear hysteretic system.

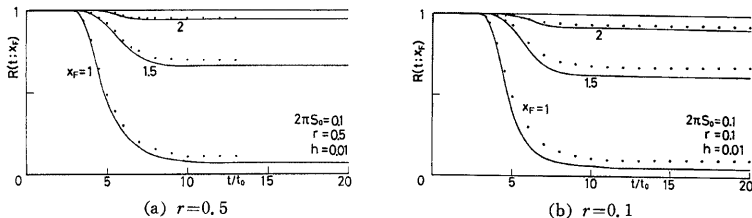


Fig. 3 Reliability function for bilinear hysteretic system.

元化された時間であり、また、印はシミュレーション解析による結果である。本解析法による結果はシミュレーション解析結果と良く一致していることが判る。また、本解析法が、履歴特性を有する非線形動力系の確率論的地震応答および耐震信頼度関数の評価に対して有効であることが示された。

4. 統計的等価線形化解法

3に述べた方法は、多自由度履歴系のような複雑な建築構造物の耐震信頼度解析にも原則的には適用可能であるが、自由度の増加に伴って現れる煩雑さは、特にその解析的表現を得るのに困難を伴う非線形項 $E[\mathbf{F}\mathbf{Z}^T]$ の数が、自由度の2乗のオーダーで増加することである。非線形動力系の不規則応答解析法として、別に統計的等価線形化解法が知られている。履歴系に対する物理的な観点からの統計的等価線形化解法³⁰⁾³¹⁾は履歴中心の移動を伴わない安定な履歴系に対してのみ有効であり、従って、不安定な履歴特性に対しても適用可能な方法³²⁾も提案するとともに、不安定な履歴では、塑性流れが、応答に多大の影響を及ぼすことを示してきたが、ここでは、履歴系の状態方程式が (3.1) 式のような1価非線形関数のみを含むような形に表現されているので、このような、言わば非履歴系を対象とした統計的等価線形化法^{33)~38)}について、特に本方法との関連について考察する。

統計的等価線形化解法では、(3.1)式右辺の非線形ベクトル $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ を線形置換し、この時の線形化係数を誤差ベクトル $\mathbf{e}$ のスカラー積の空間平均を最小にするように定める手法である。線形化係数マトリックスおよびベクトルを $\mathbf{A}_e$ および $\mathbf{C}_e$ として、次式が得られる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \mathbf{A}_e \mathbf{Z}_d - \mathbf{C}_e \quad (4.1)$$

$$E[\mathbf{e}^T \mathbf{e}] = E\left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{e}^i)^2\right] = \sum_{i=1}^n E[(\mathbf{F}^i(\mathbf{Z}) - \mathbf{A}_e^i \mathbf{Z}_d - \mathbf{C}_e^i)^2] \quad (4.2)$$

(4.2)式で、上添字 i は i 行要素を示し、 $\mathbf{F}^i(\mathbf{Z})$ の線形化係数は $\mathbf{A}_e^i$ および $\mathbf{C}_e^i$ のみに関係することが判る。従って、最小化の必要条件は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_e^i} E[(\mathbf{e}^i)^2] = 2E[(\mathbf{F}^i(\mathbf{Z}) - \mathbf{A}_e^i \mathbf{Z}_d - \mathbf{C}_e^i) \mathbf{Z}_d^T] = \mathbf{0}^T, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_e^i} E[(\mathbf{e}^i)^2] = 2E[\mathbf{F}^i(\mathbf{Z}) - \mathbf{A}_e^i \mathbf{Z}_d - \mathbf{C}_e^i] = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

(4.3)式および (4.4)式から次式が得られる。

$$\mathbf{A}_e = E[\mathbf{F}(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T] E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]^{-1}, \quad \mathbf{C}_e = E[\mathbf{F}(\mathbf{Z})] \quad (4.5)$$

ここで、添字-1は逆マトリックスを示す。状態ベクトル $\mathbf{Z}$ の各要素が確定的な意味で線形独立であれば、共分散マトリックスは正値定行列で非特異となるので、(4.5)式の $\mathbf{A}_e$ は一意的に定まる³⁷⁾。また、この時、(4.2)式は最小値を与えることが判っている³⁴⁾³⁵⁾。

(4.5)式の等価線形化係数を与える演算子の線形性から、(3.2)式の $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ に対して、次の線形化係数を与える。

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A} + E[\mathbf{G}(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T] E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]^{-1}, \quad \mathbf{C}_e = \mathbf{A} \mathbf{E}[\mathbf{Z}] + E[\mathbf{G}(\mathbf{Z})] \quad (4.6)$$

つぎに、(4.5)式によって統計的等価線形化された $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ を系の非線形系に対する平均および共分散方程式 (3.20)式および (3.21)式に代入しても、これらの式の形は不変である。このことは、非線形ベクトルを構成する要素的な非線形関数が、状態ベクトルの部分状態ベクトル $\mathbf{Z}^p \subset \mathbf{Z}$ に依存しても、全状態ベクトル $\mathbf{Z}$ に関して統計的等価線形化を行うならば、共通な空間平均演算子 E を用い、1次および2次のモーメント方程式に関する限り、Fokker-Planck の方程式に基づく定式化と統計的等価線形化法は同等であることを示している。従って、この場合には、線形化係数は陽には現れない。

建築構造物の復元力特性ベクトルの各要素は、建物各層あるいは接合部の部分的履歴特性の線形結合として表現される。この場合、局所的履歴特性に関連して導入された状態変数や局所的耐震安全性の尺度の1階微分を表す一価非線形関数は、直接関係する部分的な状態ベクトルにのみ依存する。本研究の解析法に比較して、統計的等価線形化法の利点は、非線形ベクトル $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ を構成する要素非線形関数に関連する部分状態ベクトル

による部分的線形化の成立であろう。

いま、要素非線形関数を $f(\mathbf{Z}^p)$ とすれば、全状態ベクトルによる全体的線形化は次式のように表せる。

$$f(\mathbf{Z}^p) \rightarrow \mathbf{a}_e \mathbf{Z}_d + c_e = \mathbf{a}_e^p \mathbf{Z}_d^p + \mathbf{a}_e^{\bar{p}} \mathbf{Z}_d^{\bar{p}} + c_e \quad (4.7)$$

$$\mathbf{a}_e = \{\mathbf{a}_e^p, \mathbf{a}_e^{\bar{p}}\} = E[f(\mathbf{Z}^p) \mathbf{Z}_d^T] E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]^{-1} \quad (4.8)$$

$$c_e = E[f(\mathbf{Z}^p)] \quad (4.9)$$

ここで、 $\mathbf{Z}^p, \mathbf{Z}^{\bar{p}}$ は、それぞれ、部分的状態ベクトル、および $\mathbf{Z}^T = \{\mathbf{Z}^p, \mathbf{Z}^{\bar{p}}\}$ の意味での補状態ベクトルで、 $\mathbf{a}_e^p, \mathbf{a}_e^{\bar{p}}$ は、それぞれ、 $\mathbf{Z}^p, \mathbf{Z}^{\bar{p}}$ に関する線形化係数ベクトルである。これに対して、部分的線形化は次式となる。

$$f(\mathbf{Z}^p) \rightarrow \mathbf{b}_e \mathbf{Z}_d + d_e \quad (4.10)$$

$$\mathbf{b}_e = E[f(\mathbf{Z}^p) \mathbf{Z}_d^p T] E[\mathbf{Z}_d^p \mathbf{Z}_d^p T]^{-1} \quad (4.10)$$

$$d_e = E[f(\mathbf{Z}^p)] \quad (4.11)$$

全体的線形化と部分的線形化について、定数項の同等性 $c_e = d_e$ は成立つが、線形項についての同等性 $\mathbf{a}_e^p = \mathbf{b}_e, \mathbf{a}_e^{\bar{p}} = 0$ の成立は、演算子 E の性格に依存する。一般的には、同等性の必要かつ充分条件は、 $\mathbf{a}_e^{\bar{p}} = 0$ 、または、次式で与えられる。

$$E[f(\mathbf{Z}^p) \mathbf{Z}^{\bar{p}} T] = E[f(\mathbf{Z}^p) \mathbf{Z}_d^p T] E[\mathbf{Z}_d^p \mathbf{Z}_d^p T]^{-1} E[\mathbf{Z}_d^p \mathbf{Z}_d^{\bar{p}} T] \quad (4.12)$$

特別に、 E が正規性の場合には、次式が得られている³⁵⁾。

$$\mathbf{a}_e = E[f(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T] E[\mathbf{Z}_d \mathbf{Z}_d^T]^{-1} = E\left[\frac{\partial T}{\partial \mathbf{Z}} f(\mathbf{Z})\right] \quad (4.13)$$

$$c_e = E[f(\mathbf{Z})] \quad (4.14)$$

この場合、(4.13)式で $f(\mathbf{Z})$ の代りに $f(\mathbf{Z}^p)$ を対象とすれば、 $\mathbf{a}_e^{\bar{p}} = 0$ となり、直ちに、全体的線形化と部分的線形化の同等性が得られる。

統計的等価線形化に関する研究の多くは、正規性外乱の想定の下に、 E の正規性を前提条件としているので、全体的線形化と部分的線形化は同等である。従って、デルタ相関性の外乱を受ける非線形系の場合、統計的等価線形化法は、Fokker-Planck の方程式から導かれた平均ベクトルおよび共分散マトリックスに関する(3.20)式および(3.21)式において、 E を正規性と仮定したことに同じである。これに対して、本研究では、特に、バイリニア履歴特性や耐震安全性の尺度に関する状態変数の非正規性を考慮した近似確率密度関数を導入することによって E を定義し、解析の精度の向上を計り、1自由度系に関しては良好な結果を得た。本方法を多自由度系に適用するには、全状態変数に関する近似確率密度関数が必要となり、それによる $E[\mathbf{F}(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}_d^T]$ の解析的表現に困難を伴う。 E が非正規性の場合、全体的線形化と部分的線形化の同等性は、定常確率過程の特殊な場合を除き、明確ではないが、部分的線形化の成立を仮定すれば、本方法は、大幅に簡略化される。この場合、まず、部分的な状態変数に関する非正規性近似確率密度関数によって部分的線形化を行い³⁾、3に述べた方法によって決定された近似確率密度関数に基づいて、各部分の耐震信頼度関数を定め、同時に、各部分の耐震安全性の尺度の近似的な共分散マトリックスを求める方法が考えられる。つぎに、 E の性格は状態変数の選び方に関係し、特に、履歴特性に関連して導入される状態変数に関して正規性の仮定が近似的に成立する場合がある¹¹⁾³⁹⁾。この場合にも、耐震安全性の尺度を表す状態変数は非正規性であるので、3に述べた変数変換によって、この状態変数を近似的に正規化するならば、 E の正規性の仮定が近似的に成立し、部分的線形化が精度よく適用されて、各部分および全系の耐震信頼度関数を求めることが、比較的容易になると思われる。

5. む す び

履歴特性を有する建築構造物の烈ないし激震に対する耐震信頼度解析を目的とした確率論的地震応答解析法について、ここ数年来、地盤震害研究部門で行ってきた研究の方法論的な側面の概要について述べた。この解析法の特徴は、地震外乱、履歴構造物および耐震安全性の尺度に関する拡大された状態ベクトルを選ぶことによってマルコフ・ベクトル過程を形成し、Fokker-Planck の定式化に基づいて、地震応答解析と耐震信頼度解

析を同時に行うことと言える。また、信頼度関数を、従来取扱われてきた閾値初通過問題としてではなく、直接耐震安全性の尺度に関する同時確率密度関数から評価し得ることである。本研究の要点は、次のように纏められる。まず、バイリニヤ履歴特性を記述する新しい状態変数を導入して、その時間に関する1階微分表示を求めるとともに、最大靱性率、累積塑性変形率などの耐震安全性の尺度についても、これを新しい状態変数と考え、同様な微分表示を行った。このことにより、履歴構造物の状態方程式は、デルタ相関性の外乱と状態変数の1個非線形関数のみを含む連立1階非線形常微分方程式となり、拡大された状態ベクトルは、マルコフ・ベクトル過程となる。つぎに、Fokker-Planck の方程式から、非定常過程における状態変数の統計量を規定するモーメント方程式を導き、これを解くことによって、全状態変数に関する非正規性の同時確率密度関数を決定した。さらに、この確率密度関数から、状態変数の統計量と信頼度関数を求めた。特に、1自由度履歴構造物の場合について、シミュレーション解析の結果と比較して、本解析法が良好な精度をもつことを確認した。また、統計的等価線形化法と本研究の解析法との比較を行い、状態変数の非正規性に注目した本方法の得失を明らかにした上で、本方法を多自由度系を含む複雑な系に適用する際の簡略化の可能性について若干の検討を行った。

なお、本方法を用いて建築構造物の耐震信頼度設計法を確立するためには、地震外乱の確率モデルに関する研究、構造材料、構造種別等による具体的な履歴特性のモデル化に関する研究、耐震信頼度を拘束条件とする履歴構造物の適正設計法に関する研究などを、併せて行う必要がある。

最後に、本報告を纏めるに際して、御討議、御助力を頂いた鈴木祥之氏に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) Rosenblueth, E.: Some Applications of Probability Theory in Aseismic Design, Proc. 1st WCEE, 1956, pp. 8—1—18.
- 2) Lin, Y. K.: First-Excursion Failure of Randomly Excited Structures, AIAA Jour., Vol. 8, No. 4, April, 1970, pp. 720—725.
- 3) Kameda, H.: Probability Distribution of the Maximum Response of Structures Subjected to Non-Stationary Random Earthquake Motion, Mem. Fac. Engrg., Kyoto Univ., Vol. XXXIII, Part 4, 1971, pp. 243—280.
- 4) Cortis, R. B., E. H. Vanmarcke and C. A. Cornell: First Passage of Nonstationary Random Processes, Proc. ASCE, EM2, April, 1972, pp. 401—413.
- 5) Roberts, J. B.: First Passage Probability for Nonlinear Oscillators, ASCE, EM5, 1976, pp. 851—866.
- 6) Kobori, T., R. Minai and Y. Suzuki: Nonstationary Random Response of Bilinear Hysteretic Systems, Theor. and Appl. Mech., Vol. 24, 1974, pp. 143—152.
- 7) Kaul, M. K., and J. Penzien: Stochastic Seismic Analysis of Yielding Offshore Towers, Proc. ASCE, EM5, Oct., 1974, pp. 1025—1038.
- 8) Kobori, T., R. Minai and Y. Suzuki: Stochastic Seismic Response of Hysteretic Structures, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 26, Part 1, March, 1976, pp. 57—70.
- 9) Wen, Y.-K.: Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, Proc. ASCE, EM2, April, 1976, pp. 249—263.
- 10) 浅野幸一郎：弾塑性履歴特性を有する質点構造物の確率統計的地震応答：その1、擬定常 white noise 入力を受ける1自由度系、日本建築学会論文報告集、第247号、昭51. 9, pp. 75—82.
- 11) 石丸辰治、田治見宏：履歴系の統計的地震応答（その1. バイリニヤ履歴系について）、日本建築学会論文報告集、第265号、昭53. 3, pp. 71—80.
- 12) Minai, R., and Y. Suzuki: Reliability Analysis of Aseismic Safety of Elasto-Plastic Structures Con-

- sidering Random Fatigue, Proc. 3rd JEES, Nov., 1970, pp. 723—730.
- 13) Kobori, T., R. Minai and Y. Suzuki: On the Aseismic Safety of Elasto-Plastic Structures Considering Fatigue Damage, Theor. and Appl. Mech., Vol. 21, 1971, pp. 309—321.
 - 14) Vanmarcke, E. H., and D. Veneziano: Probabilistic Seismic Response of Simple Inelastic Systems, Proc. 5th WCEE, Vol. 2, 1973, pp. 2851—2863.
 - 15) 洪 起: 弾塑性構造物の動的信頼性理論に関する基礎的研究, 第1報・弾塑性ランダム振動の基本モデルと降伏レベルへの初通過問題, 日本建築学会論文報告集, 第256号, 昭52. 6, pp. 41—46.
 - 16) 洪 起: 弾塑性構造物の動的信頼性理論に関する基礎的研究, 第2報, 塑性応答部分の考え方と初通過崩壊を対象とした動的信頼性理論, 日本建築学会論文報告集, 第257号, 昭52. 7, pp. 59—66.
 - 17) 洪 起: 弾塑性構造物の動的信頼性理論に関する基礎的研究, 第3報, 履歴吸収エネルギーによる累積損傷崩壊機構を対象とした動的信頼性理論, 日本建築学会論文報告集, 第258号, 昭52. 8, pp. 47—52.
 - 18) Kobori, T., R. Minai and Y. Suzuki: Stochastic Seismic Response and Reliability of Hysteretic Structures, Proc. 6th WCEE, Vol. II, Jan., 1977, pp. 1083—1088.
 - 19) Kobori, T., R. Minai and Y. Suzuki: The Plastic Response of Hysteretic Systems to Stochastic Excitations, Theor. and Appl. Mech., Vol. 27, 1977, pp. 315—333.
 - 20) Minai, R., and Y. Suzuki: Stochastic Prediction of Maximum Structural Response to Earthquake Excitations, Proc. 5th JEES, 1978, pp. 993—1000.
 - 21) Suzuki, Y., and R. Minai: Stochastic Prediction of Maximum Earthquake Response of Hysteretic Structures, Proc. 7th WCEE, Vol. 6, 1980, pp. 697—704.
 - 22) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木祥之: 不規則地震外乱を受ける構造物の履歴消費エネルギー, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭55. 9, pp. 651—652.
 - 23) Lin, Y. K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, Mc-Graw Hill, 1967.
 - 24) Caughey, T. K.: Nonlinear Theory of Random Vibrations, Advances in Applied Mechanics, Vol. 11, Academic Press, 1971.
 - 25) 田治見宏: 耐震理論に関する基礎的研究, 東京大学生産技術研究所報告, 第8巻, 第4号, 昭34. 3, pp. 170—215.
 - 26) Housner, G. W., and P. C. Jennings: Generation of Artificial Earthquakes, Proc. ASCE, EM1, 1964, pp. 113—150.
 - 27) Stratonovich, R. L.: Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, 1963.
 - 28) Kobori, T., and R. Minai: Application of Stochastic Differential Equations to Seismic Analyses of Nonlinear Structures, Proc. 6th WCEE, Vol. II, 1977, pp. 1065—1070.
 - 29) Minai, R., and Y. Suzuki: Reliability-Based Seismic Design of Elasto-Plastic Structures, Proc. 7th WCEE, Vol. 4, 1980, pp. 25—32.
 - 30) Caughey, T. K.: Equivalent Linearization Techniques, Jour. ASA, Nov., 1963, pp. 1706—1711.
 - 31) 小堀鐸二, 南井良一郎: 非定常ランダム応答の等価線形化解法, 京大防災研年報, 第10号A, 昭42. 3, pp. 235—260.
 - 32) Kobori, T., R. Minai and Y. Suzuki: Statistical Linearization Techniques of Hysteretic Structures to Earthquake Excitations, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 23, Dec., 1973, pp. 111—135.
 - 33) Iwan, W. D., and I-M. Yang: Application of Statistical Linearization Techniques to Non-Linear Multi-Degree-of-Freedom Systems, Jour. Appl. Mech., Vol. 39, 1972, pp. 545—550.
 - 34) Iwan, W. D.: A Generalization of the Concept of Equivalent Linearization, Int. Jour. Non-Linear Mechanics, Vol. 8, 1973, pp. 279—287.
 - 35) Atalik, T. S., and S. Utku: Stochastic Linearization of Multi-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems,

- Int. Jour. Earthq. Engrg Struct. Dyn., Vol. 4, 1976, pp. 411—420.
- 36) Spanos, P.-T. D., and W. D. Iwan: On the Existence and Uniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearization, Int. Jour. Non-Linear Mech., Vol. 13, 1978, pp. 71—78.
- 37) Iwan, W. D., and A. B. Mason, Jr.: Equivalent Linearization for Systems Subjected to Non-Stationary Random Excitation, Int. Jour. Non-Linear Mech., Vol. 15, 1980, pp. 71—82.
- 38) Wen, Y. K.: Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation, Jour. Appl. Mech., Vol. 47, March, 1980, pp. 150—153.

ON A PROBABILISTIC SEISMIC RESPONSE ANALYSIS OF BUILDING STRUCTURES

By *Ryoichiro MINAI*

Synopsis

A method of probabilistic seismic response analysis is described for determining the stochastic responses and predicting the seismic reliability of hysteretic structures. The bilinear hysteretic characteristics are expressed in the form of first-order quasi-linear differential equation. The seismic safety measures, such as the maximum ductility ratio, cumulative plastic deformation ratio, cumulative hysteretic energy and low-cycle fatigue damage, are also expressed in the non-linear differential forms. The bilinear hysteretic characteristics and the safety measures are considered as extended state variables.

The Fokker-Planck equation for the hysteretic structures subjected to non-stationary random excitations is derived by using the differential forms of state variables, and is solved approximately by assuming an appropriate non-Gaussian joint probability density function. The statistics and probability density functions of structural responses and safety measures are obtained. The reliability functions for the whole structure and those for the structural components are determined directly from the joint probability density function of the safety measures and its marginal probability density functions. The main advantage of the present method is to obtain the reliability functions for various failure criteria of hysteretic structures without treatment of the so-called first-passage problem. The accuracy of the present method is verified against digital simulation for single-degree-of-freedom bi-linear hysteretic systems. Comparison of the present method with the stochastic linearization techniques for quasi-linear dynamic systems is made, and the simplification of analytical procedures is discussed in applying the present method to multi-degree-of-freedom hysteretic systems.