

弱順序極小構造と definable 集合の完備化

阿南工業高等専門学校・一般教科 田中 広志 (Hiroshi Tanaka)
Liberal Arts Division, Anan National College of Technology
htanaka@anan-nct.ac.jp

概要

$\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を弱順序極小構造とし, $X \subseteq M^n$ を definable 集合とする。R. Wencel は, X がセルのとき, その完備化を定義した。このノートでは, $\mathcal{M}$ がセル分解を許すとき, 一般の definable 集合 X に対してその完備化を考える。

$\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を端点を持たない全順序構造とする。 M の部分集合 A が, 任意の $a, b \in A$ と $c \in M$ に対して, $a < c < b$ ならば $c \in A$ をみたすとき, A は M の凸集合であるという。さらに $\sup A, \inf A \in M \cup \{-\infty, +\infty\}$ のとき, A は M の区間であるという。構造 $\mathcal{M}$ の任意の definable 集合 $D \subseteq M$ が, 区間 (または凸集合) の有限和で表せるとき, $\mathcal{M}$ は順序極小構造 (または弱順序極小構造) であるとよぶ。理論 $\text{Th}(\mathcal{M})$ の任意のモデルが順序極小 (または弱順序極小) になるとき, $\text{Th}(\mathcal{M})$ は順序極小理論 (または弱順序極小理論) とよぶ。順序極小構造に関する参考文献として [1], [3], 弱順序極小構造に関する参考文献として [2], [5], [7] がある。

以後考える構造 $\mathcal{M}$ はすべて弱順序極小構造とする。

$C, D \subseteq M$ とする。任意の $c \in C, d \in D$ に対して $c < d$ のとき, $C < D$ と書く。空でない集合の対 $\langle C, D \rangle$ が, $C < D$ かつ $C \cup D = M$ でさらに D が最小元を持たないとき, M の切断であるという。 $\mathcal{M}$ の definable 切断全体を $\overline{M}$ によって表す。任意の $a \in M$ に対して, definable 切断 $\langle (-\infty, a], (a, +\infty) \rangle$ を考えることにより, $M \subseteq \overline{M}$ とみなす。さらに $\langle C_1, D_1 \rangle < \langle C_2, D_2 \rangle$ を $C_1 \subsetneq C_2$ と定義することにより, $(M, <)$ を $(\overline{M}, <)$ の部分構造とみなす。

M (または $\overline{M}$) 上に, M (または $\overline{M}$) の开区間を基本開集合として位相を入れる。

n を自然数とし, $A \subseteq M^n$ を definable とする。写像 $f: A \rightarrow \overline{M}$ において, 集合

$\{(x, y) \in A \times M : y < f(x)\}$ が definable になるとき, f は **definable** であるという。写像 $f: A \rightarrow \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ が **definable** とは, f が A から $\overline{M}$ への definable 写像であるか, 任意の $x \in A$ に対し $f(x) = \infty$ であるか, または任意の $x \in A$ に対し $f(x) = -\infty$ になるときをいう。

[7] に弱順序極小構造上でのセルの定義がある。

定義 1. 弱順序極小構造 $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ に対して, セルとその完備化を帰納的に定義する:

1. M の 1 点集合は $\langle 0 \rangle$ -セルとする。 $C \subseteq M$ が $\langle 0 \rangle$ -セルのとき, その完備化を $\overline{C} := C$ と定める。
2. M の空でない definable 開集合は $\langle 1 \rangle$ -セルとする。 $C \subseteq M$ が $\langle 1 \rangle$ -セルのとき, その完備化を $\overline{C} := \{x \in \overline{M} : \exists a, b \in C, a < x < b\}$ と定める。
3. $C \subseteq M^m$ が $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ -セルで $f: C \rightarrow M$ が definable で連続, さらに連続な拡張 $\bar{f}: \overline{C} \rightarrow \overline{M}$ をもつとき, グラフ $\Gamma(f)$ は $\langle i_1, \dots, i_m, 0 \rangle$ -セルとし, その完備化を $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\bar{f})$ と定める。
4. $C \subseteq M^m$ が $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ -セルで $g, h: C \rightarrow \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ が definable で連続, さらに連続な拡張 $\bar{g}, \bar{h}: \overline{C} \rightarrow \overline{M}$ をもち, 任意の $x \in \overline{C}$ に対して $\bar{g}(x) < \bar{h}(x)$ のとき,

$$(g, h)_C := \{\langle a, b \rangle \in C \times M : g(a) < b < h(a)\}$$

は $\langle i_1, \dots, i_m, 1 \rangle$ -セルとし, その完備化を

$$\overline{(g, h)_C} := \{\langle a, b \rangle \in \overline{C} \times \overline{M} : \bar{g}(a) < b < \bar{h}(a)\}$$

と定める。

5. ある $i_1, \dots, i_m \in \{0, 1\}$ が存在して, $C \subseteq M^m$ が $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ -セルとなるととき, C はセルとよぶ。

定義 2. $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X \subseteq M^m$ を空でない definable 集合とする。以下で, X のセル分解を m に関して帰納的に定義する。

1. X を M の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \dots, C_k\}$ をセルによる X の分割とする。このとき, $\mathcal{D}$ は X のセル分解であるという。
2. X を M^{m+1} の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \dots, C_k\}$ をセルによる X の分割とし, $\pi: M^{m+1} \rightarrow M^m$ を最後の座標を除く射影とする。このとき,

$\{\pi(C_0), \dots, \pi(C_k)\}$ が $\pi(X)$ のセル分解になるとき, $\mathcal{D}$ は X のセル分解であるという。

定義 3. $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X, Y \subseteq M^m$ を definable 集合, $X \neq \emptyset$ とする. また $\mathcal{D}$ を X のセル分解とする. このとき, 任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して, $C \subseteq Y$ または $C \cap Y = \emptyset$ となるとき, $\mathcal{D}$ は Y を分割するという。

定義 4. $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を弱順序極小構造とする. 任意の $m, k \in \mathbb{N}$ と definable 集合 $X_1, \dots, X_k \subseteq M^m$ に対して, $X_1, \dots, X_k$ のすべてを分割するような M^m のセル分解が存在するとき, $\mathcal{M}$ はセル分解をみたすという。

以後考える弱順序極小構造 $\mathcal{M}$ はセル分解を許すと仮定する。

定義 5. 弱順序極小構造 $\mathcal{M}$ はセル分解を許すとし, $X \subseteq M^n$ を definable とする. このとき, definable 集合 X の完備化を

$$\{a \in (\overline{M})^n : X \text{ のセルによる分割 } X_1, \dots, X_k \text{ と } 1 \leq i \leq k \text{ となる } i \text{ が取れて, } a \in \overline{X_i}\}$$

と定義し, $\overline{X}$ と書く。

補題 6. $X, Y \subseteq M^n$ を definable, $x \in M^n$ とする. このとき, 次が成り立つ。

1. $X = Y \iff \overline{X} = \overline{Y}$ である。
2. $X \subseteq Y \iff \overline{X} \subseteq \overline{Y}$ である。
3. $x \in X \iff x \in \overline{X}$ である。
4. $\overline{X}$ が開集合ならば, X も開集合である。
5. $\overline{X}$ が閉集合ならば, X も閉集合である。

$C \subseteq M^n$ をセルとする. このとき, セルの定義による C の完備化と上記の definable 集合としての C の完備化は一致する (上記の補題より)。

次に, boundary point ([4, 定義 1.1]) および weakly boundary point を定義する。

定義 7. $X, Y \subseteq M^n$ を definable 集合とし, $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ とする。

1. $a \in M^n$ が X での Y の **boundary point** であるとは, $a \in X$, かつ任意の open box $U \subseteq M^n$ に対して, $a \in U$ ならば $U \cap Y \neq \emptyset$ かつ $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ となることをいう。
2. $a \in (\overline{M})^n$ が X での Y の **weakly boundary point** であるとは, $a \in \overline{X}$, かつ任

意の open box $U \subseteq M^n$ に対して, $a \in \overline{U}$ ならば $U \cap Y \neq \emptyset$ かつ $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ となるときをいう。

次に, definably connected ([4, 定義 2.2]) および weakly definably connected を定義する。

定義 8. $X \subseteq M^n$ を definable とする。

1. X が **definably connected** であるとは, 任意の definable 集合 $Y \subseteq M^n$ に対して $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ ならば, X は X での Y の boundary point を少なくとも一つは含むこととする。
2. X が **weakly definably connected** (または **WDC**) であるとは, 任意の definable 集合 $Y \subseteq M^n$ に対して $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ ならば, $\overline{X}$ は X での Y の weakly boundary point を少なくとも一つは含むこととする。

定義 9. $X, Y \subseteq M^n$ を definable かつ $Y \subseteq X$ とする。このとき, Y が X の **weakly definably connected component** (または **WDC component**) であるとは, Y が X の極大な weakly definably connected 部分集合になることとする。

このノートでの主定理は次のものである。

定理 10. $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とし, $X \subseteq M^n$ を definable とする。このとき, X は WDC component が有限個ある。さらに, それらの WDC component は, X で開かつ閉であり, X の有限分割になっている。

上記の定理において, $\mathcal{M}$ が順序極小な場合は, [3] で示されている。

参考文献

- [1] M. Coste, An introduction to o-minimal geometry, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).
- [2] M. A. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, J. Symbolic Logic 52 (1987) 116–128.
- [3] L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

- [4] J. F. Knight, A. Pillay and C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures. II, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986) 593–605.
- [5] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 5435–5483.
- [6] A. Marcja and C. Toffalori, A guide to classical and modern model theory, Trends in Logic 19, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [7] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, Ann. Pure Appl. Logic 154, no. 3, (2008) 139–162.