

Jackson q -integral, q -difference system and connection problem

名大. 理. 青本 和彦 (Kazuhiko Aomoto)

1. G.H. Hardy の "Ramanujan" という本の中に証明されている Ramanujan の等式

$$(1.1) \quad \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{(1+aqx)(1+aq^2x) \cdots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x) \cdots} dx$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi s} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-q^{m-s})(1-aq^m)}{(1-q^m)(1-aq^{m-s})},$$

$$0 < q < 1, s > 0, 0 < a < q^{s-1}$$

がある. G.H. Hardy はこれを証明するのに Ramanujan の interpolation formula

$$(1.2) \quad \int_0^{\infty} x^{s-1} \{ \varphi(0) - x\varphi(1) + x^2\varphi(2) - \cdots \} dx$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi s} \varphi(-s)$$

を証明し, それを利用してゐる. (1.1) は次のよ

うに F.H. Jackson 積分を媒介として

$$(1.3) \quad \frac{1}{1-q} \int_q^1 \frac{dy}{y} \int_0^y x^{s-1} \frac{(1+aqx)(1+aq^2x) \cdots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x) \cdots} d_q x$$

の形に書ける. 積分

$$(1.4) \quad \psi(y) = \int_0^y x^{s-1} \frac{(1+aqx)(1+aq^2x) \cdots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x) \cdots} d_q x$$

は y について q -周期的, $\psi(y) = \psi(qy)$, である. β eta 積分の q -analogue を用いて, 次のように書ける:

$$(1.5) \quad \psi(y) = A(y) \cdot q^s \frac{\Gamma_q(s) \Gamma_q(-\alpha)}{\Gamma_q(s-\alpha)},$$

$$(1.6) \quad A(y) = \left(\frac{y}{q}\right)^{s-2} \frac{\Theta(q^\alpha) \Theta(q^{s-\alpha-3}y)}{\Theta(q^{s-2-\alpha}) \Theta(q^{-\alpha+1}y)}.$$

ここで $a = q^\alpha$ とおいている. Θ は通常の q -関数

$$(1.7) \quad \Theta(x) = (q)_\infty (x)_\infty (q/x)_\infty$$

を表わす. こうして (1.1) は 楕円曲線上の q -値の留数計算に簡約された事になる. 関係式 (1.5) は (1.4) に 附随する Jackson 積分の接続公式

を与える。すなわち、積分 (1.4) に応ずる 積分路
(以下 “輪体” と呼ぶ) $[0, \infty y]_q$ と $[0, -a^{-1}]_q$ と
の関係は

$$(1.8) \quad [0, \infty y]_q \simeq A(y) [0, -a^{-1}]_q \text{ (ホモトピー)}$$

で与えられる。こうして (1.5) は 通常の Beta
積分

$$(1.9) \quad \int_0^{-a^{-1}} x^{s-1} \frac{(-ax)_\infty}{(-x)_\infty} d_q x = q^s \frac{\Gamma_q(s) \Gamma_q(-\alpha)}{\Gamma_q(s-\alpha)}$$

に帰着する。

これらの事実を いかにか高次元に拡張し
定式化するか、以下の試みである。我々は
乗法関数に よて 自然に定義される “ねじれ
de Rham コホモロジー” を利用する。

2. q -analogue of b -functions

よく知られているように、代数曲線、
或いは もっと一般に Kähler 多様体上の乗法関
数 (確定, 不確定 とも) は、数論にも類似が見
出されているし、様々な局面で重要な役割を
果たしている。その積分は “ねじれ de Rham

コホモロジー (twisted de Rham cohomology) — 当初
 [Grothendieck — Deligne] によって確立され、今
 や Ω -モジュールの体系の中に組み込まれている
 — として定式化され、多くの興味ある積分
 を解明するのに役立つ。この報告では
 その q -analogue の定式化を試み、且つ 2, 3
 の問題を提起し、得られた結果を述べる。

$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E の n 個の直積 E^n の
 1次元コホモロジー $H^1(E^n, \mathbb{C})$ の Hodge 分解

$$(2.1) \quad \begin{cases} H^1(E^n, \mathbb{C}) = H^{1,0}(E^n) \oplus H^{0,1}(E^n) \\ H^{1,0}(E^n) \cong (H^{1,0}(E))^n \end{cases}$$

K に対して、 $H^{1,0}(E)$ の各成分からとった $H^{1,0}(E^n)$
 の基底をなす正則 1 次微分型式を $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$
 とする。 E^n のある基底 O に対して、 $\mathcal{P}(E^n)$ を
 O から発する E^n の中の区分的 K なめらかな道
 の集合とおく。すると対

$$(2.2) \quad \begin{aligned} H^{1,0}(E^n) \times \mathcal{P}(E^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, \omega) &\longmapsto \int_{\omega} \theta \end{aligned}$$

が自然に考えられる. $H^{1,0}$ の双対は, として $p(E^n)$ のある同値類 $[p(E^n)]$ と同一視される:

$$(2.3) \quad [p(E^n)] \cong (H^{1,0}(E^n))^*.$$

今 $H_1(E^n, \mathbb{Z}) \cong (H_1(E, \mathbb{Z}))^n$ の基底を, 各 $H_1(E, \mathbb{Z})$ の成分から α_j, β_j とって, $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ とする. ここで

$$(2.4) \quad \int_{\alpha_k} \theta_j = 2\pi i \delta_{jk}, \quad \int_{\beta_k} \theta_j = 2\pi i \tau \delta_{jk} \\ (\operatorname{Im} \tau > 0)$$

となるように正規化しておく. $[p(E^n)]$ は格子 $H_1(E^n, \mathbb{Z})$ を含んでいる. A, B 各々 $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ で生成される $H_1(E^n, \mathbb{Z})$ の部分格子を表わす. $\bar{X} = [p(E^n)]/A$ とおく. すると写像

$$(2.5) \quad \bar{X} \ni \omega \longmapsto (q^{\omega_1} = \exp \int_{\omega} \theta_1, \dots, q^{\omega_n} = \exp \int_{\omega} \theta_n)$$

において $\bar{X}$ は $(\mathbb{C}^*)^n$ と同一視される. かくして $\bar{X}$ は乗法アーベル群の構造を持つ. すると $X = H_1(E^n, \mathbb{Z})/A$ は $\bar{X}$ の部分アーベル群である.

$X, \bar{X}$ の (2.5) による像を $q^X, q^{\bar{X}}$ ($q = e^{2\pi i \tau}$) と記す. q^X は $\{(q^{y_1}, q^{y_2}, \dots, q^{y_n}) \mid y_i \in \mathbb{Z}\}$ の $(\mathbb{C}^*)^n$ の部分群である. X 上の $\mathbb{Z}$ -値線型関数 μ は $\bar{X}$ 上の G -値線型関数 $\bar{\mu}$ に一意に拡張される.

以下 X と $q^X, \bar{X}$ と $q^{\bar{X}}$ とをしばしば同一視する. $q^{\bar{X}} = (\mathbb{C}^*)^n$ 上の有理関数体を $R(\bar{X})$ とおく. X は $R(\bar{X})$ に作用するので, その 1-コサイクル

$$(2.6) \quad c_X(\omega) \in \bigwedge^1(X, R(\bar{X})), \quad \chi \in X, \omega \in \bar{X}$$

は $R(\bar{X})$ に値を持つ X 上の関数であって, 等式

$$(2.7) \quad c_{XX'}(\omega) = c_X(\omega) c_{X'}(\omega + X)$$

をみたすものとして定義される. $c_X(\omega)$ は 1次元コホモロジー類 $H^1(X, R(\bar{X}))$ を与えることになる. このコサイクルについて, 次の佐藤幹夫氏の基本定理が成り立つ.

Theorem 1. (佐藤幹夫) ([S1]). $H^1(X, R(\bar{X}))$ は 1次の形の $c_X(\omega)$ の集合と同型である. い

くつかの $\mu_i \in \text{Hom}(X, \mathbb{Z})$ に対して;

$$(2.8) \quad \ell_X(\omega) = C_X \prod_{i=1}^k \prod_{v=0}^{\mu_i(\omega)-1} q_k(q^{\bar{\mu}_i(\omega)+v})$$

ここで q_k は 1 変数の有理関数 (特に 1 次式としてよい), C_X は $\text{Hom}(X, \mathbb{C}^*)$ の元.

佐藤幹夫氏は $q=1$ のときに, この $\ell_X(\omega)$ を用いて 概均質ベクトル空間の不変式や古典的超幾何関数に応用された ([S1]) が, 我々はこれを q -analogue として適用し, 超幾何 q -多項式を含むより一般な関数を取り扱ったのである. 定理の直接的帰結として

Theorem 2. 関数方程式

$$(2.9) \quad \Phi(\omega+X)/\Phi(\omega) = \ell_X(\omega)$$

の解は $q^X = (\mathbb{C}^*)^n$ 上の次の形の関数によって表示される:

$$(2.10) \quad \Phi(\omega) = \prod_{j=1}^n q_j^{\rho_j \omega_j} \cdot \prod_{i=1}^l \Gamma_q(q^{\bar{\mu}_i(\omega)} a_i)^{\pm 1}$$

ここで, $\rho_j \in \mathbb{C}$, $a_i \in \mathbb{C}^*$, $\Gamma_q(s) = (q)_\infty (q^s)_\infty / (q)_\infty$ (q -analogue of Γ -function). 以下この $\Phi(\omega)$ を " q -function" 又は "乗法関数" と

呼ぶ事にする.

3. 以下 $x_1 = q^{\omega_1}, \dots, x_n = q^{\omega_n}$ とおく.
 すると $\Phi(\omega)$ は $q^{\bar{X}}(\mathbb{O}^*)^n$ 上の乗法関数になる. $q^{\bar{X}}$
 における変換 $\hat{Q}_j$ 及び $q^{\bar{X}}$ 上の関数 $\psi(x)$
 に対する変換 Q_j を, 各々

$$(3.1) \quad \hat{Q}_j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, qx_j, \dots, x_n)$$

$$(3.2) \quad Q_j \psi(x) = \psi(\hat{Q}_j x)$$

と記す. ある $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in q^{\bar{X}}$ に対して

$[0, \xi \infty]_q = [0, \xi_1 \infty]_q \times \dots \times [0, \xi_n \infty]_q$ を ξ の
 X 軌跡 $X \cdot \xi \subset q^{\bar{X}}$ として定義する. すなわち

$$(3.3) \quad [0, \xi \infty]_q = \{(\xi_1 q^{\nu_1}, \dots, \xi_n q^{\nu_n}) \mid \nu_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Def (Jackson q -integral). $q^{\bar{X}}$ 上の
 関数 $f(x)$ に対して q -積分

$$(3.4) \quad \int_{[0, \xi \infty]_q} f(x) \frac{d_q x_1}{x_1} \cdots \frac{d_q x_n}{x_n}$$

を Jackson 和

$$(3.5) \quad (1-q)^n \sum_{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_1^n} f(q^{v_1} \varepsilon_1, \dots, q^{v_n} \varepsilon_n)$$

によって定義する. もし f が存在すれば, 明らか
 K ,

$$(3.6) \quad Q_j f = f^{\sim} \quad 1 \leq j \leq n$$

を満たしている. 今 Φ を (2.10) の乗法関数とする.
 すると Φ は次のように表わされると言ってもよい:

$$(3.7) \quad \Phi(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{p_j} \cdot \frac{\prod_{\mu \in M'} (a_{\mu}' x^{\mu})_{\infty}}{\prod_{\mu \in M} (a_{\mu} x^{\mu})_{\infty}}.$$

ここで $p_j \in \mathbb{C}$; $a_{\mu}', a_{\mu} \in \mathbb{C}^*$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_1^n$,
 M, M' は有限集合. すると (3.4) は Barnes

積分の q -analogue ([S2]) の一般形に他なら

ない. さて各因子, $x_j^{p_j}$, $(a_{\mu}' x^{\mu})_{\infty}$, $(a_{\mu} x^{\mu})_{\infty}^{-1}$

は各々変換 $p_j \mapsto p_j + v$, $a_{\mu}' \mapsto a_{\mu}' q^v$,

$a_{\mu} \mapsto a_{\mu} q^v$ ($v \in \mathbb{Z}_1$) を施せば

$$(3.8) \quad \begin{aligned} x_j^{p_j} &\mapsto x_j^{p_j} \cdot x_j^v, & (a_{\mu} x^{\mu})_{\infty}^{-1} &\mapsto (a_{\mu} x^{\mu})_{\infty}^{-1} \cdot (a_{\mu} x^{\mu})_v^{-1}, \\ (a_{\mu}' x^{\mu})_{\infty} &\mapsto (a_{\mu}' x^{\mu})_{\infty} \cdot (a_{\mu} x^{\mu})_v^{-1} \end{aligned}$$

である. そこで V を

$$(3.9) \quad \alpha_j^\nu \quad 1 \leq j \leq n, \quad (a_\mu' x_\mu)^{-1}, \\ (a_\mu' x_\mu)^\mu, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

によって生成される $\mathbb{C}$ 上の代数とおく. 明らかに,

Lemma 1. 線型空間 $\Phi \cdot V$ には Q_j が各々作用する. すなわち ΦV は X -モジュールになる. ΦV は Φ を含む最小の X -モジュールである.

今 $\varphi \in V$ をとって, 積分

$$(3.10) \quad \oint \varphi = \int_{[0, \xi\infty]_g} \Phi \varphi \, \omega, \quad \omega = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$$

が存在するものとすれば, $[0, \xi\infty]_g$ の定義と (3.6) から

$$(3.11) \quad \int_{[0, \xi\infty]_g} [Q_j(\Phi \varphi)] \omega = \int_{[0, \xi\infty]_g} \Phi \varphi \, \omega.$$

一方

$$(3.12) \quad Q_j(\Phi \varphi) = \Phi \ell_{x_j}(\omega) \varphi(\omega)$$

(ここで x_j は $(0, \dots, 0, \overset{j\text{th}}{1}, 0, \dots, 0)$ に相当する X の基底) であるから,

$$(3.13) \quad \widetilde{\ell_x(\omega) \varphi(\omega)} = \widetilde{\varphi(\omega)}.$$

こうして積分 $\widetilde{\varphi}$ は φ を

$$(3.14) \quad H_{\Phi}(\bar{X}, d_q) \stackrel{\text{def}}{=} V / \sum_x (1 - \ell_x(\omega) Q^x) V \\ \text{(但し } Q^x = Q_1^{x_1} Q_2^{x_2} \dots Q_n^{x_n}, x = \sum_{j=1}^n x_j x_j \text{)} \\ = V / \sum_{x_j} (1 - \ell_{x_j}(\omega) Q_j) V$$

の元とみ替してもよい。これは “ねじれ de Rham コホモロジー” の q -analogue 片方とみられる。

我々の提起する問題の第1はその有限次元性である。

Quest 1. $\dim H_{\Phi}(\bar{X}, d_q) < \infty$?

Quest 2. もし $\dim H_{\Phi}(\bar{X}, d_q)$ が有限次元ならば そのホロノミック系を求めよ。又その基底を求めよ。又 Wronskian を求めよ。

Quest 3. $H_{\Phi}(\bar{X}, d_q)$ の双対は $[0, \infty]_q$

を代表元とする, Jackson 積分 K 附随する 輪体
 のなす 線型空間であるが, これらの 輪体間の
 従属関係を与える 接続公式を求めよ. ちなみに,
 No.1 で示した Φ の場合は $\dim H_{\Phi}(X, d_{\Phi}) = 1$
 であって, (9.8) は 接続公式の例である.

ex 1. $n=1$.

$$(3.15) \quad \Phi = x^{\alpha_0} \frac{\prod_{j=1}^n (x/t_j)_{\infty}}{\prod_{j=1}^n (xq^j/t_j)_{\infty}}$$

これは Pochhammer 積分の q -analogue であって,
 $H_{\Phi}(X, d_{\Phi})$ は $\varphi_j = \frac{1}{1-x/t_j}$, $1 \leq j \leq n$ によって

張られ, これらが基底をなしている. 従ってその
 次元は n である. この場合の 差分方程式, 接
 続公式は Mimachi ([M2]) の中で与えられている.

ex 2. $n=2$.

$$(3.16) \quad \Phi = x_1^{\rho_1} x_2^{\rho_2} \frac{(x_1)_{\infty} (x_2)_{\infty} (q^{\gamma'} x_2/x_1)_{\infty}}{(q^{\beta_1} x_1)_{\infty} (q^{\beta_2} x_2)_{\infty} (q^{\gamma} x_2/x_1)_{\infty}}$$

この場合は ${}_3\phi_2$ 型の 超幾何関数を与える.

その次元は3. 基底は

$$\varphi_1 = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} \dots \quad * \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \nearrow 2 \end{array}$$

$$(3.17) \quad \varphi_2 = \frac{1}{(1-x_1)(x_1-q^{1'}x_2)} \dots \quad * \leftarrow 1 \leftarrow 2$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{(1-x_2)(x_2-q^{1'}x_1)} \dots \quad * \leftarrow 2 \leftarrow 1$$

と選ぶことが出来る. これらは3個の頂点を持つ
上記のような directed tree K によって代表される.

これらは admissible terminal basis として次の例 K に対して拡張に定義される.

ex. 3 $n \geq 3$.

$$(3.18) \quad \bar{\Phi} = \prod_{j=1}^n x_j^{p_j} \prod_{j=1}^n \frac{(x_j)_\infty}{(x_j q^{\gamma_{0j}})_\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(q^{\gamma_{ij}} x_j / x_i)_\infty}{(q^{\gamma_{ji}} x_i / x_j)_\infty}.$$

Theorem 3. $\bar{\Phi}$ は $t_1 = q^{p_1}, \dots, t_n = q^{p_n}$ の関数として n 個の q -差分方程式

$$(3.19) \quad \prod_{j=0}^{r-1} (Q_r - q^{\gamma_{jr}} Q_j) \prod_{j=r+1}^n (Q_r - q^{\gamma_{rj}-1} Q_j) \xi_r^{-1} \bar{\Phi}$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} (Q_j - q_j^{\gamma_{jr}} Q_r) \prod_{j=r+1}^n (Q_r - q_j^{\gamma_{rj}' - 1} Q_j) \Phi$$

($1 \leq r \leq n$)

をみたしている。但し $Q_0 = 1$, $\gamma_{0j}' = 0$

$$(3.20) \quad Q_j \Psi(t_1, \dots, t_n) = \Psi(t_1, \dots, q_j t_j, \dots, t_n)$$

である。

これは超幾何 q -級数のみならず、種々わけ論にしばしば登場する q -series (LAJMJ など) を特別な場合として含む興味ある Φ を与える。この方程式が ホロノミックかどうかは $\dim H_\Phi(\bar{X}, d_q)$ の有限次元性から出る。これについては次の事実が示される。

Theorem 4. $q_j, \gamma_{ij}, \gamma_{ij}'$ は generic とする。 $H_\Phi(\bar{X}, d_q)$ の基底は $(n+1)$ 個の頂実を持つ terminal directed tree * によって表わされる。その個数は $(n+1)^{n-1}$ である。

(* "terminal" については説明を省く)

条件をいかにかゝるめられるかは基本的な問題と考えられる。Theorem 4 において、

$H_{\mathbb{C}}(\bar{X}, d_g)$ の双対である 輪体の基底を
~~標準的~~ K $(n+1)^{n-1}$ 個 とする事が出来る. これは
 (3.19) の解の $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \mapsto \alpha_0$ の漸近
 解に対応するもので それらを

$$v_1, v_2, \dots, v_{\mu} \quad (\mu = (n+1)^{n-1}) \text{ と}$$

おくと 任意の $[0, \xi_{\infty}]_g$ は

$$(3.21) \quad [0, \xi_{\infty}]_g \sim \sum_{j=1}^{\mu} u_j v_j$$

と表わされる. 各 u_j は ξ に依存するが, ξ に
 ついて q -周期的であって, ④ 関数を用い
 て表わされる. 我々はこれを $n=1$ の場合の
 Mimachi の公式を用いて計算する事が出来る
 が, 複雑なので これを与える事は 別の機会
 にゆずりたい.

[A1] G.E. Andrews, q -series: Their develop-
 ment and application in analysis, number theory,
 combinatorics, physics and computer algebra,

Regional conference series in Math., A.M.S. 1985.

[A2] K. Aomoto, A note on holonomic

q -difference system, to appear in Algebraic Analysis in honour of Prof. M. Sato, 1989.

[A3] —, A remark to Askey conjectures, preprint 1988.

[A4] R. Askey, Beta integrals in Ramanujan's papers, his unpublished work and further examples, Ramanujan Revisited, 1988, 561–590.

[H1] L. Halburd, Une q -intégrale de Selberg et Askey, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 1475–1489.

[H2] G. Hardy, Ramanujan, Chelsea 1940.

[K] K. Kadell, A proof of Askey's conjectured q -analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 969–986.

[M1] S.C. Milne, Multiple q -series and $U(n)$ generalizations of Ramanujan's $1\phi_1$ sum, Ramanujan Revisited, 1988, 473–524.

[M2] K. Mimachi, Connection problem in holonomic q -difference system associated

with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer,
to appear in Nagoya Math. J.

[S1] M. Sato (佐藤 幹夫), 概均質ベクトル
空間の理論, 数学の年々, 1970.

[S2] L. J. Slater, Generalized hyper-
geometric functions, Cambridge Univ. Press,
1966.