

Partially elliptic system に対する
ライオン境界値問題

と

その応用

東大・理

戸瀬信之^(*)

(Nobuyuki Tose)

(*) 現在の所属は 愛媛大学・理学部

目次.

第1章	Introduction		1
第2章	Partially elliptic system に対する		
境界値問題		-----	2
§ 2.1.	設定	-----	2
§ 2.2.	層 $C^2 \cap \tilde{\Lambda}$	-----	5
§ 2.3.	Partially elliptic system に対する性質	-----	10
第3章	応用	---	23
§ 3.1.	Lewy - 溝火田系 に対する結果	---	23
§ 3.2.	de Rham system に関する準備	---	28
§ 3.3.	C^2_{Λ} の同型定理について	---	32
§ 3.4.	計算例	---	42
§ 3.5.	層 C^2_{Σ}	---	49
§ 3.6.	それらに関する定理	---	69
文献			78

第1章 Introduction

この小論文は, Partial De Rham system, Partial Cauchy Riemann system などを含む, Partial elliptic system と呼ばれる micro-differential equation に対する境界値問題を扱う。

更に, この応用として 2-micro 函数の層 $\mathcal{E}_\lambda^2$ から, 正則 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -付き micro 函数の層 $\mathcal{E}_0$ から余次元 1 の microlocalization をして得られる層と同型であることを示す。この応用として, 正則 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -付きの 2-micro 函数の正則 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -に関する接続の一貫性を示す。更に, 2-microlocal なすいか割りの定理を示す。

この仕事は Schapira [40] に刺激されて得た。この場を借りて, Schapira 先生に御礼の言葉を述べたい。

この仕事をまとめるにあたり, 終始御助力を頂きました, 小松孝三郎先生, 太阿久俊剛先生に感謝します。

第2章 Partially elliptic system に関する

境界値問題

相原-河合 両先生は [2] に於て, elliptic な微分方程式系に関する境界値問題を石塚, 更に様々の応用を見出した。この章においては, 相原-河合の上記の理論を, cotangent bundle の正則包絡な部分多様体に沿って microlocalize する。

§2.1. 設定.

$$(1) M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t$$

と定め, $\mathbb{R}$ の複素化と12

$$(2) X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0}_z \times \mathbb{C}^{n_1}_w$$

と定める。

$$(3) \left. \begin{array}{l} z \longleftrightarrow \zeta \\ w \longleftrightarrow \theta = \sigma + \sqrt{-1}\tau \end{array} \right\}$$

と X の dual variable と定め,

$$(4) \mathcal{L} = \{(z, w, \zeta dz + \theta dw); \zeta = 0\}$$

は $\pi^0_T X$ の regular involutive な部分多様体と定める。 $\mathbb{R}$ の real locus $\mathbb{R}$ 。

$$(5) \mathcal{L} := \mathcal{L} \cap \pi^0_T M$$

$$= \{(x, t; \eta dx + \tau dt) \in \pi^0_T M; \zeta = 0\}$$

とする。 $\tilde{\Lambda} \in \Lambda$ の部分複素化, 即ち $\Lambda \hookrightarrow \Lambda^{\mathbb{C}}$ と見て,
 $\Lambda^{\mathbb{C}}$ の bicharacteristic Σ Λ を通る Σ の union
 とする。今の場合は,

$$(6) \quad \tilde{\Lambda} = \mathbb{C}_{\tau}^{n_0} \times \sqrt{\tau} T^* \mathbb{R}^{n_1} \quad (t, \sqrt{\tau} \tau dt).$$

となる。

[定義 2.1] $\mathcal{M}$: system of microdifferential equation Σ Λ のある点の近傍に定まる Σ とする。
 なるとき,

$$(7) \quad \mathcal{M} \text{ is partially-elliptic along } \Lambda \\ \Leftrightarrow \text{ch}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}^2(\mathcal{M}) \cap T_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} = \emptyset \quad \square$$

[注意 2.2] Bony - Schapira [1] は上の条件を
 満たす single microdifferential equation に対して
 microlocal singularity の伝播を調べた。 $\square$

更に, 11.2 の Notation を定める。

$$(8) \quad N = \{ (x, t) \in M; x_1 = 0 \}$$

Σ の X 中の複素化として

$$(9) \quad Y = \{ (z, w) \in X; z_1 = 0 \}$$

$$(10) \Sigma = \Lambda_M \times N \\ = \{ (x, t; \sqrt{\tau} dt); x_1 = 0 \}$$

$= \mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x')$, $z = (z_1, z')$ と定め
る. 更に, $T^* \tilde{\Lambda}$ の座標として $\tilde{\text{t}}\text{cannonical}$ な

$(x, t; \sqrt{\tau} dt; \sqrt{\tau} x^* dx) \in \Sigma$ とし, 同様にして $\tilde{\Lambda}^c$ 上
Yve Laurent [6] に従って定め, $T^* \tilde{\Lambda}^c$ の
 $\tilde{\text{t}}\text{cannonical}$ な座標 Σ

$(z, w; \theta dw; z^* dz)$ とする.

$= \mathbb{R}^2$

$$(11) S_\Sigma^* \tilde{\Lambda} = \{ (x', t; \sqrt{\tau} dt; (z_1^* dz_1 + \sqrt{\tau} x'^* dx') \infty) \}$$

と定め $S_\Sigma^* \tilde{\Lambda}$ の部分集合 $G_\pm \subseteq$

$$(12) G_\pm = \{ \pm \operatorname{Re} z_1^* > 0 \}$$

と可なり, $S_\Sigma^* \tilde{\Lambda}$ は

$$(13) S_\Sigma^* \tilde{\Lambda} = G_+ \cup G_- \cup (S_\Lambda^* \tilde{\Lambda} \times \Sigma)$$

と disjoint に分けることが出来る.

要は $\rho a = 0$ の命題に注意する。

$$(26) \quad \Lambda_{\pm} := \{ (x, t, \tau, \tau dt) \in \Lambda; \pm x, > 0 \}$$

と定める。 $a = 0$ 時

[命題 2.6]

$$(27) \quad \Gamma_{\Lambda_{\pm}}(B_{\Lambda}^2) \longrightarrow \pi_{\Sigma} | \tilde{\Lambda}_* (e_{\Sigma}^2 | \tilde{\Lambda}) |_{\pm}$$

なる canonical な射が存在する。

(証明) [S. K. K] chapter 1 prop. 1.2.4.1 =

より証明される。 $\square$

[命題 2.7]

$$(28) \quad \begin{array}{ccc} & e_{\tilde{\Lambda}} |_{\Sigma} & \\ \swarrow & & \nwarrow +1 \\ \Gamma_{\Sigma}(B_{\Lambda}^2) = \mathcal{H}_{\Sigma}^{h_0}(e_{\tilde{\Lambda}}) & \longrightarrow & R\pi_{\Sigma} | \tilde{\Lambda}_* (e_{\Sigma}^2 | \tilde{\Lambda}) [1] \end{array}$$

なる canonical な三角形が存在する。

(証明) [S. K. K] chapter 1 prop 1.2.5.

により直ちに証明される。

§2.3. Partially elliptic system に對する性質.
 上の命題を用いて, $\Lambda_{\pm}$ に Σ 持つ $\mathcal{M}$ の β_{Λ}^2 解と $\zeta_{\pm}$ に對する $\mathcal{C}_{\Sigma|\Lambda}^2$ 解との關係を調べるのがこの命題である.

[命題 2.8]

$$(29) \quad R\Gamma_{\Lambda_{\pm}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}, \beta_{\Lambda}^2)$$

$$\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}, R\pi_{\Sigma|\Lambda*}(\mathcal{C}_{\Sigma|\Lambda}^2|_{\zeta_{\pm}}))$$

(証明) β_{Λ}^2 は flabby であるから,

$$(30) \quad 0 \rightarrow \Gamma_{\Sigma}(\beta_{\Lambda}^2) \rightarrow \Gamma_{\Lambda_+}(\beta_{\Lambda}^2) \oplus \Gamma_{\Lambda_-}(\beta_{\Lambda}^2) \rightarrow \beta_{\Lambda}^2 \rightarrow 0$$

なる完全系列を得る。これより, β_{Λ}^2 の canonical な三角形を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}\Gamma_{\Sigma} \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m, \beta_{\Lambda}^2) & \\
 (31) \swarrow & & \nwarrow +1 \\
 \bigoplus_{\pm} \mathbb{R}\Gamma_{\Lambda^{\pm}} \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m; \beta_{\Lambda}^2) & \longrightarrow & \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m, \beta_{\Lambda}^2)
 \end{array}$$

- 3 命题 2.7 により $\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m, \beta_{\Lambda}^2) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m, \beta_{\Lambda}^2)$ を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m, \Gamma_{\Sigma}(\beta_{\Lambda}^2)) & \\
 (32) \swarrow & & \nwarrow \\
 \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m; \mathbb{R}\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}} * \mathcal{E}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^2) & \longrightarrow & \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(m, \mathcal{E}_{\Lambda|\Sigma})
 \end{array}$$

$\Sigma \subset M$ は Σ , partially elliptic along Λ

すなわち

$$(33) \quad \tilde{m} := \mathcal{E}_{\Lambda^c}^2 \otimes_{\pi^* \mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} \pi^* m|_{\Lambda^c}$$

と定める時, (但し $\pi: T^*_{\Lambda^c} \tilde{\Lambda}^c \xrightarrow{\pi} \Lambda^c$)

$$(34) \operatorname{RHom}(\tilde{m}, \mathcal{C}_{\Lambda}^2) = 0$$

が成り立つ。これと,

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\Lambda} \rightarrow \mathcal{B}_{\Lambda}^2 \rightarrow \pi_* \mathcal{C}_{\Lambda}^2 \rightarrow 0$$

上の 2-micro 函数に関する基本的な完全列

を用いると,

$$(35) \operatorname{RHom}_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{m}, \mathcal{B}_{\Lambda}^2) \xleftarrow{\sim} \operatorname{RHom}_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{m}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\Lambda})$$

が成立する。

更に $\mathcal{m}$ の $\Lambda \equiv \delta$ は partially ellipticity

を

$$(36) \operatorname{supp} \tilde{m} \cap \pi^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda} = \emptyset$$

が成り立つ,

$$(37) R \Sigma / \tilde{\Lambda} * R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (m, \mathcal{C}_{\Sigma}^2 / \tilde{\Lambda})$$

$$\simeq \bigoplus_{\pm} R \pi_{\Sigma / \tilde{\Lambda} *} R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (m, \mathcal{C}_{\Sigma}^2 / \tilde{\Lambda} \Big|_{\pm})$$

と直和に分れる。

結局, $\Rightarrow$ の規範的な三角形と $\Leftarrow$ の同型 (37)

及び (35) 及び (29) を得る。 $\square$

$$\Sigma = \Lambda \times_N M = \{(x, t; \int \tau dx) \in \Lambda; x_1 = 0\}$$

Σ は $\int \tau^* N$ の正則な複素多様体と見做す。

$\Sigma_1, \tilde{\Sigma}$ は Σ の $\tau^* \gamma$ に $\partial \pi$ を部分複素化

と見做す。 $\Leftarrow$ の同型を見れば,

$$(38) \vartheta: \mathcal{N}_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda} \setminus \mathcal{N}_{\tilde{\Sigma}}^* \tilde{\Lambda} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{\Sigma}}^* \tilde{\Sigma}$$

$$(x', t; \int \tau dx; z_1^* dz_1 + \int x'^* dz') \longrightarrow (x', t; \int \tau dx; \int x'^* dz')$$

なる自然な写像 ϑ を定める。

m の Λ は $\mathbb{R}^0$, τ は micro-ellipticity により

$$(39) \operatorname{supp}(\tilde{m}) \cap \pi_{\Lambda}^* \tilde{\Gamma} \times_{\Lambda} \Sigma = \emptyset$$

が成立する。すなわち

$$(40) \quad \mathcal{N}_{\pm} := \rho_* \left(\mathcal{E}_{\Sigma^c}^2 \rightarrow \mathcal{L}^c \otimes_{\mathcal{E}_{\Lambda^c}^2} \tilde{m} \Big|_{\mathcal{G}_{\pm}} \right)$$

は $\mathcal{E}_{\Sigma^c}^2$ module として $A_{\Sigma}^{\pm}$ 上

$$\gamma: Y \hookrightarrow X$$

で埋め込まれる。すなわち

$$(41) \quad \gamma^* \mathcal{M} \simeq \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_-$$

が成立する。

Y. Laurent の Thesis [6] にある $\epsilon = \hbar$ の duality theorem が成立する ϵ に関する注記。

(42)

$$\operatorname{RHom}_{\mathcal{E}_{\Sigma^c}^2}(\gamma^* \mathcal{M}, \mathcal{E}_{\Sigma^c}^2)$$

$$\simeq_{\rho_*} \operatorname{RHom}_{\mathcal{E}_{\Lambda^c}^2}(\tilde{m}; \mathcal{E}_{\Sigma^c}^2 \leftarrow \mathcal{L}^c). \quad [1]$$

$$\text{但し } \dot{T}_{\Lambda^{\leftarrow}}^* \tilde{\Lambda}^{\leftarrow} \times_{\Lambda^{\leftarrow}} \Sigma^{\leftarrow} \xrightarrow{\vartheta} \dot{T}_{\Sigma^{\leftarrow}}^* \tilde{\Sigma}^{\leftarrow} \xrightarrow{\omega} \dot{T}_{\Lambda^{\leftarrow}}^* \tilde{\Lambda}^{\leftarrow}$$

と ω とする。 $\Rightarrow$ ρ の natural morphism の存在に注意する。

$$\begin{aligned} & \text{RHom}_{\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2 \hookrightarrow \Sigma^{\leftarrow}) \\ & \quad \downarrow \otimes \\ (43) \quad & \text{End}_{\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2}(\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2 \hookrightarrow \Sigma^{\leftarrow}) \quad \text{RHom}_{\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2}(\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2 \hookrightarrow \Sigma^{\leftarrow}, \mathcal{E}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^2) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \text{RHom}_{\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^2)$$

(42), (43) 及 $\nu \Rightarrow \rho$ の isomorphism

$$(44) \quad \text{RHom}_{\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2}(\mathcal{E}_{\Lambda^{\leftarrow}}^2 \hookrightarrow \Sigma^{\leftarrow}, \mathcal{E}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^2) \simeq \mathcal{E}_{\Sigma}^2$$

に注意。 可なり時, $\Rightarrow \rho$ の canonical π_2 morphism の存在に到達する。

$$(45) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Sigma}^2}(\iota^* m, e_{\Sigma}^2)$$

$$\longrightarrow p_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Lambda}^2}(m, e_{\Sigma|\Lambda}^2) [1]$$

、字彙 Σ 通し、

$$\begin{aligned} & R\pi_{\Sigma|\Lambda} * (R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Lambda}^2}(\tilde{m}; e_{\Sigma|\Lambda}^2)) \\ & (= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda}^2}(m, R\pi_{\Sigma|\Lambda} * (e_{\Sigma|\Lambda}^2))) \end{aligned}$$

と

$$R\pi_{\Sigma} * R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Sigma}^2}(\iota_{\pm}^* m, e_{\Sigma}^2) [1]$$

と π 同型. 2" あり = Σ 言う = π , 命題 2.8 に
続く step a 目標となる。

、 π 同型 Σ 言う 為には. (45) の射 Σ に
落し証明すればよい。Q.P.T.,

$$R\pi_{\Sigma} * R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Sigma}^2}(\iota^* m; e_{\Sigma}^2)$$

と

$$R\pi \cong i_{\tilde{\lambda}}^* R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Sigma}^2 i_{\tilde{\lambda}}) [1]$$

とが "同型" であることは言える。

更に換言すると,

$$(46) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Sigma^c}^2}(i^*\mathcal{M}; \beta_{\Sigma}^2 / \sigma_{\Sigma}^2)$$

$$\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}, R\pi_{\Sigma i_{\tilde{\lambda}}^*} \mathcal{C}_{\Sigma}^2 i_{\tilde{\lambda}}) [1]$$

を証明する ことにする。再び 命題 2.7. を用いて

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}, R\pi_{\Sigma i_{\tilde{\lambda}}^*} \mathcal{C}_{\Sigma}^2 i_{\tilde{\lambda}}) [1]$$

$$\begin{array}{ccc} & & \nwarrow +1 \\ (47) & \swarrow & \\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}|_{\Sigma}) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}, \Gamma_{\Sigma}(\mathcal{B}_{\Lambda^c}^2)) \end{array}$$

と 同型 である。

すなわち $\mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$ solution に対して Cauchy-Kowalevsky の定理が適用できる。

[定理 2.9] (柏原 - Schapira [12], Schapira [13])

$\mathcal{M}$ は coherent $\mathcal{E}_X$ -module として Λ^c の点の近傍で $\mathcal{M}$ の def として $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_Y$ と可成. $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_Y$,
 $\gamma \times \overset{\circ}{T}^*X$ は $\mathcal{M}$ に関する Λ^c に $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$

non-microcharacteristic と可成. $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_Y$,

$$(48) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Lambda}) \Big|_{\Sigma} \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_{\frac{\Lambda}{2}})$$

$$(49) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{C}_{\Lambda}) \Big|_{\Sigma} \xrightarrow{\sim}$$

$$\simeq R\Gamma_{\Sigma} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Lambda})[2]$$

が成立する. □

ただし定理 2.9. の設定に属する. $\mathcal{M}$ は Λ に $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$ partially elliptic 故に, $\gamma \times \overset{\circ}{T}^*X$

は Λ^c に $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$ non-microcharacteristic と可成.

定理 2.9. を用いる時, 同型 (48) 及び (49)

が成立するのを

$$(50) \quad R\Gamma_{\Sigma} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(m, \mathcal{C}_{\Lambda}^{\sim}) \quad [+2]$$

$$\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(m_Y, \mathcal{C}_{\Sigma}^{\sim})$$

が得られる。 (50) は $\mathcal{H}^1 \Gamma_{\Sigma} \circ [n_0 - 1]$

Σ 作用

$$R\Gamma_{\Sigma} = R\Gamma_{\Sigma} \circ R\Gamma_{\Lambda}$$

に注意すると,

$$(51) \quad R\Gamma_{\Sigma} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(m, R\Gamma_{\Lambda}(\mathcal{C}_{\Lambda}^{\sim})) \quad [n_0 + 1]$$

$$\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(m, R\Gamma_{\Sigma}(\mathcal{C}_{\Sigma}^{\sim}))$$

により, $\mathcal{H}^1$ の Λ -部分 - Schapire の定理

が適用可能である。

[命題 2.10]

$m : \Lambda \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_0$ 2 partially-elliptic $\hat{\mathcal{E}}$ system
of microdifferential equation $\hat{\mathcal{E}} \neq \emptyset$.

$\alpha \in \hat{\mathcal{E}}$, $\hat{\mathcal{E}} \ni \alpha$ isomorphism が成立する。

$$(52) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda}^2} (m; \Gamma_{\Sigma}(\beta_{\Lambda}^2)) \quad [1]$$

$$\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Sigma}^2} (i^*m, \beta_{\Sigma}^2) \quad \square$$

更に定理 2.9 を用いて,

$$(53) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Sigma}^2} (i^*m, \mathcal{C}_{\Sigma} |_{\Sigma})$$

$$\xleftarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda}^2} (m; \mathcal{C}_{\Lambda} |_{\Sigma})$$

が成立する。ゆえに

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Sigma}^2} (i^*m, \beta_{\Sigma}^2 / \sigma_{\Sigma}^2)$$

(54) +1

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Sigma}^2} (i^*m, \sigma_{\Sigma}^2) \longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Sigma}^2} (i^*m, \beta_{\Sigma}^2)$$

は trivial な $\pi_2 \equiv 0$ となるから成立する。ゆえに

※とあるが、 $\cong \tilde{\pi}^* \pi$ (47) 及び。

$$\begin{array}{ccc}
 & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (m, R\Gamma_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^* e_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^2) & \\
 \swarrow & & \searrow +1 \\
 R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (m, e_{\tilde{\Lambda}}|_{\Sigma}) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (m, \Gamma_{\Sigma}(\beta_{\Lambda}^2))
 \end{array}$$

及び $\tilde{v}^* \cong \tilde{\pi}^* \pi$ (54) である。 $\Rightarrow$ の同型。

$$\begin{aligned}
 (52) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (m, \Gamma_{\Sigma}(\beta_{\Lambda}^2)) & \subset \square \\
 & \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (i^* m; \beta_{\Sigma}^2).
 \end{aligned}$$

及び R

$$\begin{aligned}
 (53) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Sigma^c}^2} (i^* m; e_{\Sigma}^2|_{\Sigma}) \\
 \xleftarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2} (m, e_{\tilde{\Lambda}}|_{\Sigma})
 \end{aligned}$$

により、 $\tilde{v}^* \cong \tilde{\pi}^* \pi$ (5) 型

$$(54) R \pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}} * (R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda}^2} (m; \mathcal{C}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^2))$$

$$\xrightarrow{\sim} R \pi_{\Sigma} * R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Sigma}^2} (m_{\pm}, \mathcal{C}_{\Sigma}^2) [-1]$$

が得られる。=9 同型 (54) と命題 2.8. の
同型 (29) を併用し、=10 の定理 2.11.
が得られる。=11 は、和原-河合 [2] に
おける楕円型境界値問題の超局所化
と云える。

[定理 2.11] (partially elliptic boundary
value problem)

$$(55) R \Gamma_{\Lambda_{\pm}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda}^2} (m, \beta_{\Lambda}^2)$$

$$\xrightarrow{\sim} R \pi_{\Sigma} * R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Sigma}^2} (m_{\pm}, \mathcal{C}_{\Sigma}^2) [-1]$$

第3章 応用

この章では、前章で展開した境界値問題の理論を用いて、2-micro 微分係数の層 $\mathcal{C}_{\perp/L}^2$ 上の Laurent [6] で定義された bi-canonical transformation を通じて正則 Hodge- δ -付きの micro 微分係数の層 $\mathcal{C}_\theta$ を係数とする 1次元相対 cohomology 群と同型であることを示す。証明自体は、柏原-河合 [2] の analogy に基づくが、結果自体は将来、偏微分方程式系 $\mathcal{A}$ の可逆性の伝播に対して有用な手段となり得るかもしれない。

§3.1. Levy-溝畑系に関する結果.

$$X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}_z^{n_0} \times \mathbb{C}_w^{n_1}$$

$$M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^{n_0} \times \mathbb{R}_t^{n_1}$$

$$\mathcal{L} = \{ (x, t, \sqrt{-1}(\xi dx + \tau dt)) \in T_M^* X; \xi = 0 \}$$

なる設定 $a \in \mathcal{L}$ に対し a の形式を考へる。

$$(3.1) \quad \mathcal{M}_p : \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1} x_j \frac{\partial}{\partial x_n} \right) u = 0 & (j=1, \dots, p) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1} x_j \frac{\partial}{\partial x_n} \right) u = 0 & (j=p+1, \dots, d) \end{cases}$$

[Lemma 3.1]

$$P(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Q(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\beta x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\})$$

$$\omega \text{ は } (x, t, \sqrt{t} dx, \sqrt{t} x^* dx) = (0, 0; \sqrt{t} dx, \sqrt{t}(0, 1, 0, \dots, 0)).$$

の近傍と可る。 = a 時 K は 2-micro-local operator

なる。

$$(3.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda^2 \xrightarrow{Q} \mathcal{C}_\Lambda^2 \xrightarrow{K} \mathcal{C}_\Lambda^2 \xrightarrow{P} \mathcal{C}_\Lambda^2 \rightarrow 0.$$

が完全系列をなす。

$$\bar{M} = N = \{(x, t) \in M; x_1 = 0\} \text{ として.}$$

$$\bar{\Sigma} = \{(x', t; \sqrt{t}(\xi' dx' + \tau dt)); \xi' = 0\} \text{ として.}$$

$$\in \bar{M} \cap \bar{N}.$$

$$T_{\bar{\Sigma}}^* \bar{\Sigma} \ni \{(x, t; \sqrt{t} dx, \sqrt{t} x^* dx); x_1 = 0, x_1^* = 0\}$$

と同一と見做す。 = a 時 ω は $\omega' = 0$ 2-micro-local operator 達 Φ, Ψ を

$$(3.3) \quad \Phi: \mathcal{C}_{\bar{\Sigma}}^2 \longrightarrow \mathcal{C}_\Lambda^2.$$

$$\Psi: \mathcal{C}_\Lambda^2 \longrightarrow \mathcal{C}_{\bar{\Sigma}}^2. \quad \text{として}$$

(3.4) $\Psi \Phi = \operatorname{id}, \Phi \Psi = K$ が成立するように見付けることが出来る。

(証明)

is a micro-micro local operator 達E 考える。

$$E = \frac{1}{4\pi^2} \prod_{j=3}^{n_0} \delta(x_j - x'_j) \prod_{i=1}^{n_1} \delta(t_i - t'_i) \times$$

$$\int \frac{ds}{(s - \alpha(x_1 - x'_1))(x_2 - x'_2 + 2\sigma^{-2}(\alpha x_1 + \beta x'_1)s + \alpha\beta\sigma^{-2}(x_1 - x'_1)^2 - \sigma^{-2}s^2 + \sqrt{10})}$$

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \prod_{j=3}^{n_0} \delta(x_j - x'_j) \times \prod_{i=1}^{n_1} \delta(t_i - t'_i) \times$$

$$\int \frac{ds}{(s + \beta(x_1 - x'_1))(x_2 - x'_2 + 2\sigma^{-2}(\alpha x_1 + \beta x'_1)s + \alpha\beta\sigma^{-2}(x_1 - x'_1)^2 - \sigma^{-2}s^2 + \sqrt{10})}$$

$$K = -\frac{\sigma}{4\pi\sqrt{10}} \prod_{j=3}^{n_0} \delta(x_j - x'_j) \prod_{i=1}^{n_1} \delta(t_i - t'_i) \times$$

$$\frac{(x_2 - x'_2 + \alpha x_1^2 + \beta x_1'^2 + \sqrt{10})^{\frac{3}{2}}}{2}$$

＝45 は。

$$\Omega = \{ (x, t, \sqrt{10} \tau dt, \sqrt{10} x^* dx) ; x_2^* > 0 \}$$

2" 定義 是れは 2-micro-local operators 2" である。

[S.K.K] 第1章 example 3.2.5. a 計算と同義に。

$$IE = 1 \quad EI = 1 - K.$$

$$FQ = 1 \quad QF = 1 - K. \quad \text{が成り立つことは分かる。}$$

以上に示す

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda^2 \xrightarrow{Q} \mathcal{C}_\Lambda^2 \xrightarrow{K} \mathcal{C}_\Lambda^2 \xrightarrow{P} \mathcal{C}_\Lambda^2 \rightarrow 0.$$

は完全系列であることが分かる。

$$Z := \{(x, t, \sqrt{t} dx, \sqrt{t} dx^*); x_1 = 0, x_1^* = 0, x_2^* > 0\}.$$

$$\sum_{\Lambda} x \cdot T_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} \longrightarrow T_{\Sigma}^* \tilde{\Sigma}.$$

は projection (示す). $Z \in T_{\Sigma}^* \tilde{\Sigma} (x_2^* > 0)$

と identify する。

$$\Phi: \mathcal{C}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{C}_{\Lambda} \quad \Psi: \mathcal{C}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}.$$

を如く定義する。

$$\Phi: u(x_2, \dots, x_n) \longmapsto u(x_2 + \alpha x_1^2, x_3, \dots, x_n, \frac{1}{t})$$

$$= \int -\frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \frac{u(x_2', x_3, \dots, x_n, t)}{x_2 + \alpha x_1^2 - x_2'} dx_2'$$

$$\Psi: v(x_1, \dots, x_n) \longmapsto K v|_{x_1=0}.$$

の場合

$$1 = \Psi \Phi: \mathcal{C}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}.$$

$$K = \Phi \Psi: \mathcal{C}_{\Lambda} \longrightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}$$

が成立する。



更に我々、 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ cohomology 群 $\text{Ext}_{\mathbb{F}}^p(m, \mathbb{C}_1^2)$
 は、 $N = \{ (x, t) \in M; x_1 = \dots = x_d \}$

$$\Sigma = \{ \sqrt{-1} T^* N \ni \cdot; \xi_{d+1} = \dots = \xi_n = 0 \}$$

とある時 $\mathbb{C}_{\Sigma}^2$ と同型 $\mathbb{C}^n$ であることが分る。

————— $\langle \cdot \rangle$ ————— $\langle \cdot \rangle$ —————

この定理の証明は [S-K-K] 第3章定理 2.3.6
 の主張を繰り返すこととなる。これは省略する。

§3.2. de Rham system に関する準備。

この §3.2. は次の状況の議論をする。

$$(3.9) \begin{cases} X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}_z^{n_0} \times \mathbb{C}_w^{n_1} \\ \mathcal{L} = \{ (z, w; \zeta dz + \theta dw); \zeta = 0 \} \subset T^*X. \end{cases}$$

$T_{\mathcal{L}}^* \mathcal{L}$ の座標 $(z, w; \theta dw; z^* dz)$ とし

$T_{\mathcal{L}}^* \mathcal{L}$ の点 $\dot{p} = (0; dw; dz)$ の近傍では

2-microdifferential equation がある。

(3.10)

$$m \begin{cases} \{ p_{z_1} + Q_1(z, w; D_z, D_w) \} u = 0 \\ \vdots \\ \{ D_{z_d} + Q_d(z, w; D_z, D_w) \} u = 0 \end{cases}$$

、 $Q_l, Q_d(z, w; D_z, D_w)$ は $\bar{p}$ に対する $\bar{p}$ 条件を満たす。

(3.11)

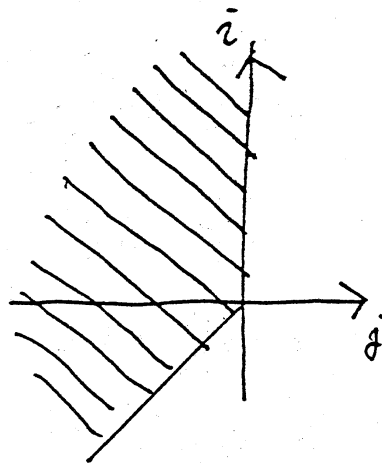
$$Q_l \in \bigwedge^2(\infty, 1) [0, 0] \quad (l=1, \dots, d)$$

即ち $Q^l = \sum Q_{ij}^{(l)}$ と i -homogeneous であるとき

$$\{ (i, \bar{i}) ; Q_{ij} \equiv 0 \}$$

は右図に示す。更に, symbol ideal

は simple である。



、 $\bar{p}$ 条件を満たす $\bar{p}$ 条件を満たす。

[命題 3.4] $\bar{p}$ の近傍で

$$(3.12) \quad m \simeq \mathcal{E}_1^2 / \mathcal{E}_1^2 D_1 + \dots + \mathcal{E}_1^2 D_d$$

なる同型を得る。

(証明) 第2條論文 [1] の第2章に於いて,
我々は R_1 主張を得ている。即ち,

$$R_1 \in \mathcal{E}_{\Lambda}^{2(\infty,1)}[0,0] \text{ が存在して,}$$

$$(3.13) \begin{cases} R_1 (D_{z_1} + Q_1) R_1^{-1} = D_{z_1}, \\ R_1 \text{ は invertible in } \mathcal{E}_{\Lambda}^{2(\infty,1)} \end{cases}$$

が成立する。従って induction に依り

$$(3.14) \mathcal{E}_{\Lambda}^2 / \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_1} + \dots + \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_k} + \sum_{l=k+1}^d \mathcal{E}_{\Lambda}^2 (D_{z_l} + Q_l) \\ \simeq \mathcal{M}$$

の仮定が成り立ち,

$$(3.15) \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_{\Lambda}^2 / \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_1} + \dots + \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_{k+1}} + \\ \sum_{l=k+2}^d \mathcal{E}_{\Lambda}^2 (D_{z_l} + Q_l)$$

を証明すればよい。

(3.14) の左辺に於ける generator を用いる。

$$(3.16) \quad p_l = D_{z_l} + Q_l \quad (l = k+1, \dots, d)$$

と定める。

$$(3.17) \quad D_{z_l} u = 0 \quad (l = 1, \dots, k)$$

より、我々は。

$$(3.18) \quad Q_l = Q_l(z, w, D_{z_{k+1}}, \dots, D_{z_{n_0}}, D_w)$$

と仮定(2)より。Weierstraßの定理(1)より、初めから

$$(3.19) \quad p_{k+1} = D_{z_{k+1}} + Q_{k+1}(z, w, D_{z_{k+2}}, \dots, D_{z_{n_0}}, D_w)$$

と仮定(2)より。

$$(3.20) \quad (D_{z_{k+1}} + Q_{k+1}) u = 0$$

なる関係式より

$$(3.21) \quad Q_l = Q_l(z, w; D_{z_{k+2}}, \dots, D_{z_{n_0}}, D_w)$$

と仮定(2)より。以下同様に手続きを繰り返して、

(3.22)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{z_l} u = 0 \quad (l = 1, \dots, k) \\ p_l = \{ D_{z_l} + Q_l(z, w; D_{z_{k+1}}, \dots, D_{z_{n_0}}, D_w) \} u = 0 \\ \quad (l = k+1, \dots, d) \end{array} \right.$$

と仮定 $12 \in \mathcal{L}'' = \mathcal{L}''' \cap \mathcal{L}$ 。

$$l = 1, \dots, k \quad 1 \leq j \leq l$$

$$[P_{2j}, P_{k+1}] u = 0$$

と仮定する、実は $[D_{2p}, Q_{k+1}] = 0$ である、
symbol ideal なる simple 条件は成り立つ。

(S.K.K) 第 2 版 prop. 5.1-2. 参照)

$$\bar{\mathcal{D}}_1 = R(w, z_{k+1}, \dots, z_{n_0}, D_{z_{d+1}}, \dots, D_{z_{n_0}}, p_w)$$

2" in vertible tilting 0" 存在 12.

$$(3.23) \quad R^{(k+1)T} (D_{z_{k+1}} + Q_{k+1}) R^{(k+1)} = D_{z_{k+1}}.$$

1211

$$(3.24) \quad R^{(k+1)^{-1}} D_{Z_l} R^{(k+1)} = D_{Z_l} \quad (l=1, \dots, k)$$

が成立するの2 (3.15) が証明されるの2
命題の証明を終える。

§3.3. L^2 同型定理 1212

＝ 9 節 2 は以下 の 状 況 の 中 に 議 論 す る。

(3.25) $M = \mathbb{C}_z^{n_0} \times \mathbb{R}_t^{n_1} \cong \mathbb{R}_{(x,y)}^{2n_0} \times \mathbb{R}_t^{n_1}$

$$(3.26) X = M_9 \text{ 纤维化 } \mathbb{Z} \quad A_2^{n_0} \times C_{\mathbb{Z}}^{n_0} \times C_w^{n_1}$$

$$(3.27) \mathcal{L} = \left\{ (x, y, t; \eta(\xi dx + \eta dy + \tau dt) \in \eta T^*M; \right. \\ \left. \xi = \eta = 0 \right\}$$

$$\left(\simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{n_0}_z \times \eta T^*\mathbb{R}^{n_1} (t, \eta \tau dt) \right) \text{ と同一視}$$

$f(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^{n_0} \simeq \mathbb{R}^{2n_0}$ 上 η 実数値 実解析的函数
 $\text{と } 1.2, \{f(z, \bar{z}) = 0\} \text{ 上の } \mathbb{C}^{n_0}_z \text{ 上 非特異な,}$
 実解析的超曲面 Σ を定める と仮定する。

$$(3.28) N = \{(z, t) \in M; f(z, \bar{z}) = 0\}$$

と 1.2

$$(3.29) \gamma: N \rightarrow X \text{ 中 に おける 複素化}$$

と 3.3. $\Sigma \in$

$$(3.30) \Sigma := \bigwedge_{\mathcal{M}} \times N (= t \in \eta T^*N)$$

η regular involutive submanifold と見做す。

$$(3.31) \mathcal{L}_{\pm} := \{(z, t; \eta \tau dt) \in \mathcal{L}; \pm f(z, \bar{z}) > 0\}$$

と定める。

$$(3.32) \mathcal{M} = \mathcal{D}^2_{\mathcal{L}} / \sum_{j=1}^{n_0} \mathcal{D}^2_{\mathcal{L}} \partial \bar{z}_j$$

なる $\mathcal{L}$ は ∂ 上 partially elliptic system

と 1.2, 第 2 章 η 結果に適用する。

$$(3.33) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_{\Lambda}^2) \simeq \mathcal{C}\mathcal{O}$$

は容易に分る。 $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \mathcal{Z}'' \mathcal{C}\mathcal{O} \in \Lambda \perp$ a sheaf $\mathcal{Z}''$
 $\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}$ 正則 $105 \times - \delta - \epsilon$ 12 特 $\rightarrow$ micro 数 ϵ 12 見做す。

$$(3.34) \quad \pi_{\Sigma} : \mathcal{T}_{\Sigma}^* \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$$

Σ canonical projection ϵ する。

$G_{\pm} \in \mathcal{Z} \frac{1}{4} \mathcal{Z}$ 定 $\alpha \mathcal{T} = \{ \alpha \in \mathcal{T} \}$ 。

$$(3.35) \quad \rho : \mathcal{S}_{\Sigma}^* \widetilde{\Lambda} \xrightarrow[\mathcal{S}_{\Sigma}^* \widetilde{\Lambda}]{} \mathcal{S}_{\Sigma}^* \widetilde{\Sigma}$$

ϵ projection ϵ 12

$$(3.36) \quad \mathcal{N}_{\pm} = \rho_* \left(\mathcal{E}_{\Sigma^c}^2 \rightarrow \mathcal{A}^c \otimes \mathcal{M} \Big|_{\mathcal{E}_{\Lambda^c}^2} \right)_{G_{\pm}}$$

ϵ $\mathcal{Z} \frac{1}{4} \mathcal{Z}$ $\alpha \mathcal{T} <$ 定 ϵ する時,

$$(3.37)$$

$$R\Gamma_{\Lambda^{\pm}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\Lambda^c}^2}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_{\Lambda}^2) \Big|_{\Sigma} \xrightarrow{\sim} R\pi_{\Sigma*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Sigma^c}^2}(\mathcal{N}_{\pm}, \mathcal{C}_{\Sigma}^2)[-1]$$

定 ϵ する。 (3.33) ϵ (3.37) $\mathcal{F}'$

$$(3.38) \quad R\Gamma_{\Lambda^{\pm}}(\mathcal{C}\mathcal{O}) \Big|_{\Sigma} \simeq R\pi_{\Sigma*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{\Sigma^c}^2}(\mathcal{N}_{\pm}, \mathcal{C}_{\Sigma}^2)[-1]$$

柏原-河合 [3], [4] と同様 =,

$$(3.39) \quad \sigma: S^*_\Sigma \tilde{\Lambda} \setminus S^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \longrightarrow S^*_\Sigma \Lambda$$

と canonical morphism σ を定め,

$$(3.40) \quad Z = \text{supp} \left(\mathcal{E}_\Sigma^2 \hookrightarrow \Lambda^2 \otimes_{\mathcal{O}_\Sigma^2} \mathcal{M} \Big|_{S^*_\Sigma \tilde{\Lambda}} \right)$$

と σ と τ と,

$$\sigma: Z \longrightarrow S^*_\Sigma \tilde{\Sigma}$$

は closed embedding $z^* \mathcal{E}$ である。

$$\sigma: Z \longrightarrow S^*_\Sigma \Lambda$$

は isomorphism $z^* \mathcal{E} = \sigma^* \mathcal{E}$ である。 (relation

と $z^* \mathcal{E} = \sigma^* \mathcal{E}$ である。 [3] 及び [4] 参照。

この $z^* \mathcal{E}$ は $z^* \mathcal{E}$ の $z^* \mathcal{E}$ である。

$$(3.41) \quad \Sigma_{\pm} = \left\{ (z; t; \sqrt{t} \tau dt; z^* dz \otimes \omega) ; (z, t) \in N \right\}$$

$$z^* = \pm \text{grad}_z f(z, \bar{z})$$

と定める時。

$$(3.42) \quad S^*_\Sigma \Lambda = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$$

と直和に分解される。

3.43)

$$\text{supp}(\mathcal{M}_{\Sigma^c}) = \left\{ (z, \bar{z}; w; z^*, \bar{z}^*; \theta); f_j = 0 \right\} \\ (j=1, \dots, n_0-1)$$

と書ける。

更に,

$$(3.44) \quad \text{Re } f_j = g_j, \quad \text{Im } f_j = h_j \\ (j=1, \dots, n_0-1)$$

と定める。更に θ, w 及び $z, \bar{z}$ に関する g_j, h_j ($j=n_0, \dots, 2n_0-2$)

2-値数値 $g, h \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$ に関する $f \in \mathbb{R}$ 及び $u \in \mathbb{R}$ 2-値数値 u real valued $f \in \mathbb{R}$ $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に関する relation ε 満足

する。

$$(3.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \{g_j, h_j\}_{\Sigma^c} = -1 \quad j=1, \dots, p, n_0, \dots, 2n_0-2 \\ (ii) \quad \{g_j, h_j\}_{\Sigma^c} = 1 \quad j=p+1, \dots, n_0-1 \\ (iii) \quad \{g_j, h_k\}_{\Sigma^c} = 0 \quad (j \neq k) \\ (iv) \quad \{g_j, g_k\}_{\Sigma^c} = \{h_j, h_k\}_{\Sigma^c} = 0 \quad (j, k) \\ (v) \quad \{g_j, u\} = \{h_j, u\} = 0 \quad (j=1, \dots, 2n_0-2) \end{array} \right.$$

$= \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$,

$$(3.46) \left\{ \begin{array}{l} z_j' = g_j G^{-1} \\ z_j^{*'} = \bar{g}_j G \quad (j=1, \dots, p, n_0, \dots, 2n_0-1) \\ z_j^{*'} = -\bar{g}_j G \quad (j=p+1, \dots, n_0-1) \\ z_{2n_0-1}^{*'} = G^2 \end{array} \right.$$

と定めた時, 更に z_{2n_0-1}' を定めた

$$(3.47) \quad T^* \{ (z, \bar{z}); f(z, \bar{z}) = 0 \} \longrightarrow T^* \mathbb{C}^{2n_0-1} \\ \downarrow \\ (z', z'^* dz')$$

the canonical transform $(\frac{1}{h} \rightarrow \frac{1}{h'})$ と $\{ \bar{z}, z \} \rightarrow \{ \bar{z}', z' \}$ である。

$\bar{z} = 1,$

$$(3.48) \left\{ \begin{array}{l} Y' = \mathbb{C}^{2n_0-1}_{z'=(z'_1, \dots, z'_{2n_0-1})} \times \mathbb{C}^{n_1}_{w'} \\ N' = \mathbb{R}^{2n_0-1}_{x'} \times \mathbb{R}^{n_1}_{t'} \\ \Sigma' = \{ (x', t'; \int (\xi' dx' + \tau' dt') \in T^* N'; \xi' = 0 \} \end{array} \right.$$

と定めた

$M_{\Sigma}^{\pm}$ は, 変換後 Σ は $P_{12}^{\pm}$ 型 Σ 消滅

(3.52)

$$M_0: \begin{cases} \left(D_{z_j'} + \sqrt{t} z_j' D_{z_{2n_0-1}} \right) u = 0 \\ \quad (j=1, \dots, p) \\ \\ \left(D_{z_j'} - \sqrt{t} z_j' D_{z_{2n_0-1}} \right) u = 0 \\ \quad (j=p+1, \dots, n_0-1) \end{cases}$$

1. $\{1, 2, \dots, p\}$ 型 Σ 型 Σ 得る。

(3.53)

$$\left. \varepsilon_{xt}^{k-1} (n_0; e_{\Sigma}^2) \right|_{\Sigma_+, p^*} \sim \left. \varepsilon_{xt}^{k-1} (m_0; e_{\Sigma}^2) \right|_{W_0^+, b^*}$$

但し W_0^+ は $\Sigma = \Sigma_+$ 型 Σ 。

(3.54)

$$\begin{aligned} V_0 &= \text{supp} (M_0) \cap \frac{0^*}{\Sigma}, \tilde{\Sigma}' \\ &= \left\{ (x', t'; \int \tau' dt'; \int x'^* dx'); \right. \\ &\quad \left. \begin{aligned} x_1^* &= \dots = x_{n_0}^* = 0 \\ x_1 &= \dots = x_{n_0} = 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$(3.55) W_0^+ = \left\{ (x', t'; \int \tau' dt'; \int x'^* dx') \in V_0 \right. \\ \left. x_{2n_0-1}^* > 0 \right\}$$

§3.1. の定理 3.3. によること。

$$(3.56) \sum_{\substack{\tau \in \Sigma' \\ \tau \in \Sigma'}}^k (m_0, \tau_{\Sigma'}) \Big|_{\overline{W}_0^+} \simeq \tau_{\Lambda_0}^2$$

2nd 条件 = 2nd 条件。但し

$$(3.57) M_0 = \{ (x', t) \in N'; x'_1 = \dots = x'_{n_0-1} = 0 \}$$

$$(3.58) \Lambda_0 = \left\{ (x'_{n_0}, \dots, x'_{2n_0-1}; t'; \tau'(\xi'_{n_0} dx'_{n_0} + \dots + \xi'_{2n_0-1} dx'_{2n_0-1} + \tau' dt')) ; \right. \\ \left. \xi'_{n_0} = \dots = \xi'_{2n_0-1} = 0 \right\}$$

と定める。

従って、 $g^* \in \overset{\circ}{T}_{\Lambda_0}^* \widetilde{\Lambda_0}$ と表わす。

$$(3.59) \text{ 則 } \frac{1}{\Lambda_+^{p+1}} (e\theta) \Big|_{\sum_{p^*}} \simeq \tau_{\Lambda_0, g^*}^2$$

より同型定理を得る。

§ 3.4. 計算例.

$$(3.60) \quad M := \mathbb{R}^{2n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t$$

$$(3.61) \quad \mathcal{L} := \{(x, t; \mathcal{H}(\xi dx + \tau dt)) \in \mathcal{H}^* M; \xi = 0\}$$

は regular involutive submanifold $\Sigma \in \mathcal{S}$.

更には, $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ は partially elliptic system $\in \mathcal{I}$

2 節 § と同様に

$$(3.62) \quad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathcal{H} \frac{\partial}{\partial x_{n_0+1}}) u = 0 \\ \vdots \\ (\frac{\partial}{\partial x_{n_0}} + \mathcal{H} \frac{\partial}{\partial x_{2n_0}}) u = 0 \end{cases} m;$$

$\Sigma \in \mathcal{S}$. $\mathbb{A} \mathbb{F} \mathbb{S} = \mathbb{H}$,

$$(3.63) \quad N = \{(x, t) \in M; x_{n_0} - (x_1^2 + \dots + x_{n_0-1}^2) = 0\}$$

は microlocal な境界値問題 $\Sigma \in \mathcal{S}$. 同様に,

$$(3.64) \quad \mathcal{L}_\pm := \{(x, \tau; \mathcal{H} \tau dt) \in \mathcal{L}; \pm [x_{n_0} - (x_1^2 + \dots + x_{n_0-1}^2)] > 0\}$$

$$(3.65) \quad \Sigma := \mathcal{L} \times_M N \\ = \{(x, t; \mathcal{H} \tau dt) \in \mathcal{L}; x_{n_0} - (x_1^2 + \dots + x_{n_0-1}^2) = 0\}$$

と可. 具体的な計算 α 為

$$(0, 0) \in M \text{ の近傍 } \mathbb{R}^{2n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t \text{ に変数変換 } \mathbb{E}$$

2 節 § 3.

$$(3.66) \quad \begin{cases} \tilde{x}_j = x_j & (j \neq n_0) \\ \tilde{x}_{n_0} = x_{n_0} - (x_1^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2) \end{cases}$$

= a 変換 a と 方程式 (3.62) は $D_j = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}$ と 12

$$(3.67) \quad \begin{cases} \left\{ (D_j - x_j D_{n_0}) + \sqrt{-1} D_{n_0+j} \right\} u = 0. \\ \quad (j=1, \dots, n_0-1). \\ (D_{n_0} + \sqrt{-1} D_{2n_0}) u = 0 \end{cases}$$

と変換される = 12 注意。更に $(\tilde{x}, t)$ の dual variable $\varepsilon (\tilde{\xi}, \tau)$ と定める。

$$(3.68) \quad X = \mathbb{C}_{\tilde{z}}^{2n_0} \times \mathbb{C}_w^{n_1} \simeq \mathbb{C}_z^{2n_0} \times \mathbb{C}_w^{n_1}$$

εM の複素化 $\varepsilon 12$, T^*X 中の Λ の複素化 $\varepsilon 12$

$$(3.69) \quad \Lambda^{\mathbb{C}} = \{ (\tilde{z}, w; \zeta dz + \theta dw) \in T^*X; \zeta=0 \}$$

$\varepsilon 12$, $\tilde{\Lambda} \in \Lambda^{\mathbb{C}}$ の部分複素化 ε する。

$T^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda}$ の座標

$$(3.70) \quad T^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda} \ni (\tilde{x}; t; \sqrt{-1} \tau dt; \sqrt{-1} \tilde{x}^* d\tilde{x})$$

同じく $T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}}$ の座標 ε

$$(3.71) \quad T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}} \ni (\tilde{z}, w; \theta dw; \tilde{z}^* d\tilde{z})$$

と $\varepsilon 3$ 。= 12 注意。2,

$$(3.73) \quad S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda} \ni (\tilde{x}'; t; \sqrt{t} \tau dt; (\tilde{z}_{n_0}^* d\tilde{z}_{n_0} + \sqrt{-1} \tilde{x}'^* d\tilde{x}')_{\infty})$$

とある。但し

$$\begin{cases} \tilde{x}' = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2n_0}) \\ \tilde{x}'^* = (\tilde{x}_1^*, \dots, \tilde{x}_{2n_0}^*) \end{cases}$$

とある。

$$(3.74) \quad Z := \text{supp} \left(\mathcal{E}_{\Sigma}^2 \rightarrow \mathcal{I}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{I}^{\mathbb{C}}} \mathcal{M} \Big|_{S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda}} \right)$$

定義する時,

$$(3.75) \quad Z = \left\{ \begin{aligned} &(\tilde{x}'; t; \sqrt{t} \tau dt; (\tilde{z}_{n_0}^* d\tilde{z}_{n_0} + \sqrt{-1} \tilde{x}'^* d\tilde{x}')_{\infty}) \\ &\in S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda}; \\ &\text{Im } \tilde{z}_{n_0}^* = 0; \quad \text{Re } \tilde{z}_{n_0}^* = \tilde{x}_{2n_0}^* \\ &\tilde{x}_1^* = \dots = \tilde{x}_{n_0-1}^* = 0 \\ &\tilde{x}_{n_0+1}^* = -2\tilde{x}_1 \tilde{x}_{2n_0}^*; \quad \dots; \quad \tilde{x}_{2n_0-1}^* = -2\tilde{x}_{n_0-1} \tilde{x}_{2n_0}^* \end{aligned} \right\}$$

とあることが容易にわかる。前記と同様、

$$(3.76) \quad S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda} \setminus S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda} \longrightarrow S_{\Sigma}^* \tilde{\Sigma}$$

$$(3.77) \quad S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda} \setminus S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda} \longrightarrow S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda}$$

とある。

$\mathfrak{g}|_Z, \sim|_Z$ は座標を用いて $\mathfrak{g}, \sim$ に書ける。

(3.78)

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\tilde{x}', t; \hbar \tau dt; \pm \{ d\tilde{x}_{n_0} + \hbar(-2\tilde{x}_1 d\tilde{x}_{n_0+1} - \dots - 2\tilde{x}_{n_0-1} d\tilde{x}_{2n_0-1} \\
 & \nearrow \sigma & + d\tilde{x}_{2n_0}) \infty \}) \\
 & & \uparrow \mathfrak{g} \\
 (\tilde{x}', t; \hbar \tau dt; \pm d\tilde{x}_{n_0}) & & \downarrow \\
 & & \mathfrak{p}_{\pm} := (\tilde{x}', t; \hbar \tau dt; \pm \hbar(-2\tilde{x}_1 d\tilde{x}_{n_0+1} - \dots - 2\tilde{x}_{n_0-1} d\tilde{x}_{2n_0-1} \\
 & & + d\tilde{x}_{2n_0}) \infty)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{と, 同-視} & \sigma: Z & \xrightarrow{\sim} S_{\Sigma}^* \wedge \\
 \text{±埋め込み} & \mathfrak{g}: Z & \hookrightarrow S_{\Sigma}^* \widetilde{\Sigma}
 \end{array}$$

が記述できる。また, § 3.3. の結果を用いると,

(3.79)

$$R\Gamma_{\wedge_{\pm}}(e\theta) \Big|_{\Sigma} (\tilde{x}', t; \hbar \tau)$$

$$\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(\mathcal{N}_{\pm}, e^2_{\Sigma})_{\mathfrak{p}_{\pm}}^{[-1]} (\tilde{x}' \text{ と } \mathfrak{g} \text{ 同値})$$

但し, $\eta_{\pm}$ は

(3.80)

$$\Gamma_{\pm} = \{ \pm \operatorname{Re} \tilde{z}_{n_0}^* > 0 \} \subset S_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda}$$

と定めて

$$(3.81) \quad \eta_{\pm} := p_* \left(\mathcal{E}_{\Sigma^c}^2 \rightarrow \mathcal{A}_{\Sigma^c}^2 \otimes \mathcal{M} \Big|_{\Gamma_{\pm}} \right)$$

と定めたものとする。

== 2" $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ は bicannonical transform $\mathcal{E}$ apply 可。(3.79) の右辺に)

$$(3.82) \quad S_{\Sigma}^* \tilde{\Sigma} \xrightarrow{\mathcal{E}} S_{\Sigma}^* \tilde{\Sigma}$$

$$(3.83) \quad T_{\Sigma^c}^* \tilde{\Sigma}^c \xrightarrow{\mathcal{E}^c} T_{\Sigma^c}^* \tilde{\Sigma}^c$$

$$(3.84) \quad (\tilde{z}'; w, \sigma dw; \tilde{z}'^* dz)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{E}^c} (y; w, \sigma dw; y^* dy) \quad (y = (y_1, \dots, y_{2n_0}))$$

と

$$\begin{cases} y_j = \tilde{z}_j + \frac{1}{2} \tilde{z}_{n_0+j}^* \tilde{z}_{2n_0}^{*-1} & (1 \leq j \leq n_0-1) \\ y_{n_0+j} = \tilde{z}_{n_0+j} + \frac{1}{2} \tilde{z}_j^* \tilde{z}_{2n_0}^{*-1} & (1 \leq j \leq n_0-1) \\ y_{2n_0} = \tilde{z}_{2n_0} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq n_0-1} \tilde{z}_{2n_0}^{*-2} \tilde{z}_{n_0+k}^* \tilde{z}_k^* \end{cases}$$

$$(y_j^* = z_j^* \quad (j=1, \dots, n_0-1, n_0+1, \dots, 2n_0).$$

と定めた時.

(3.85)

$$\varphi(p_{\pm}) = \varphi(\tilde{x}'; t; \pm \sqrt{1} \tau dt; \pm \sqrt{1} (-2\tilde{x}_1 d\tilde{x}_{n_0+1} - \dots - 2\tilde{x}_{n_0-1} d\tilde{x}_{2n_0-1} + d\tilde{x}_{2n_0}))$$

$$= (0 \dots 0 x_{n_0+1} \dots x_{2n_0}, \pm \sqrt{1} (-2x_1 dx_{n_0+1} - \dots - 2x_{n_0-1} dx_{2n_0-1} + dx_{2n_0}) \infty)$$

2"は3 = とおいた。 φ は量子化された。 附随する,

quantized bicannonical transform Σ と記す時.

$M_{\Sigma} \subset$ は $\mathbb{R}^n$ の形式系 M の変換 Σ である。

(3.89)

$$m_0 : (p_j + \sqrt{1} y_j D_{2n_0}) u = 0 \quad (j=1, \dots, n_0-1)$$

従って 2. (3.90)

$$\varphi^{-1} \text{Relom}_{\mathbb{R}^2_{\Sigma}} (n_{\pm}, \ell_{\Sigma}^2) p_{\pm}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_{\Lambda_0, p_+}^{2[n_0-1]} \\ \ell_{\Lambda_0, p_-}^2 \end{cases}$$

2° $\mathcal{A}_3 = \mathcal{C} \cap \mathcal{B}_3$. $\{ \mathcal{A} \}$.

(3.91)

$$M_0 = \{ (y, t) \in N; y_1 = \dots = y_{n_0-1} = 0 \}$$

(3.92)

$$L_0 = \left\{ (y_{n_0+1}, \dots, y_{2n_0}, t; \int (\tau dt + \eta_{n_0+1} dy_{n_0+1} + \dots + \eta_{2n_0} dy_{2n_0}); \eta_{n_0+1} = \dots = \eta_{2n_0} = 0 \right\}$$

と定める。

1° $\mathcal{A} \subset (3.79)$ 及 $v \subset (3.90)$ に $\mathcal{A}'$).

(3.93)

$$\int \frac{1}{\Lambda_-} (\mathcal{C}\theta) \Big|_{\sum} (\tilde{x}', t; \int \tau dt)$$

$$\leadsto \mathcal{C}_{\Lambda_0, P_-}^2$$

2° $\mathcal{A}_3 = \mathcal{C} \cap \mathcal{B}_3$.

§3.5 層 $\mathcal{C}_{S'}^{2-}$ (3.94) X : 複素多様体 ($n_0 = 2n$)

(3.95) $\Omega_+ := \{x \in X; s(x) > 0\}$

 Ω_+ は 擬凸領域 である。

(3.96) $\tilde{\Lambda} = \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{n_1} \times X$

(3.96) $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}} \ni x \in X$ に対して $1.5x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ 持つmicro 函数 η 層 である。

(3.97) $S' = \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{n_1} \times \partial\Omega_+$

 $\frac{1}{2}$, 柏原 - Schapire [2] の analogy による $\mathcal{C}_{S'}^{2-}$ は 定義される。

(3.98) $(T_{S'}^*\tilde{\Lambda})^- = \{(p; -ads(z)) \in T_{S'}^*\tilde{\Lambda}; a > 0, z \in \partial\Omega_+\}$

 $\frac{1}{2}$

[定義 3.5]

(3.99) $\mathcal{C}_{S'}^{2-} := \mathcal{H}_{T_{S'}^*\tilde{\Lambda}}^1 \left(\pi_{S|\tilde{\Lambda}}^{-1} \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}^a \right) \Big|_{(T_{S'}^*\tilde{\Lambda})^-}$

[注意 3.6] $p \in \pi^* R^{n'}$, $z \in \partial \Omega^+$ に対し.

$$\begin{aligned}
 (3.100) \quad \mathcal{L}_{S, (p, -\text{ads}(z))}^2 &= \mathcal{H}_{\pi^* \tilde{\Lambda}}^1 (\pi_{S, \tilde{\Lambda}} \mathcal{L}_{\tilde{\Lambda}})_{(p, \text{ads}(z))} \\
 &= \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda} \setminus (\pi^* R^{n'} \times \Omega_+)}^1 (\mathcal{L}_{\tilde{\Lambda}}) \Big|_{(p, z)} \\
 &\quad \pi^* R^{n'} \times \partial \Omega_+. \\
 &= \left(j_* \mathcal{L}_{\tilde{\Lambda}} / \mathcal{L}_{\tilde{\Lambda}} \right)_{(p, z)}
 \end{aligned}$$

但し $j: \pi^* R^{n'} \times \Omega_+ \hookrightarrow \pi^* R^{n'} \times X$.
 とする。

[例 3.7] 前節の定理 3.6 と 3.7 の (ii) が
 得られる。

$$\begin{aligned}
 (3.101) \quad \mathcal{L} &= \pi^* R_p^{n_1} \times R_x^{n_0} \hookrightarrow \pi^* R^{n_0+n_1} \\
 &= \pi^* R^{n_0+n_1} \text{ a regular involutive} \\
 &\text{submanifold と見做す.}
 \end{aligned}$$

$$(3.102) \quad \tilde{\mathcal{L}} = \pi^* R^{n_1} \times \mathbb{C}_z^{n_0}$$

$$\begin{aligned}
 (3.103) \quad \mathcal{L}^c &= \pi^* \mathbb{C}_p^{n_1} \times \mathbb{C}_z^{n_0} \\
 &= \pi^* \tilde{\mathcal{L}}, \quad \pi^* \tilde{\mathcal{L}}^c \text{ の座標 } z, \bar{z} \text{ とする}
 \end{aligned}$$

$(p; x, \pi^* x^* dx)$, $(p; z, z^* dz)$ と記す。

$$(3.104) \quad \Omega_+^0 = \{z \in \mathbb{C}^{n_0}; x_{n_0} > x_1^2 + \dots + x_{n_0-1}^2\}$$

とす。 ($z = x + iy$)

$$(3.105) \quad S_0 = \pi T^* R^{n_1} \times \partial \Omega_+^0$$

とす。とす。

は, bicanonical transformation Σ による。

即ち,

$$\frac{0}{T}^* \tilde{\Lambda}^c \setminus \{z_{n_0}^* \neq 0\} \ni (p, z; z^* dz)$$

$$(3.106) \quad \xrightarrow{\varphi} (p, iz + d_z^* \varphi(z^*), -iz^*) \in \frac{0}{T}^* \tilde{\Lambda}^c \quad (\varphi(z^*) = -\frac{z_1^{*2} + \dots + z_{n_0-1}^{*2}}{4z_{n_0}^*})$$

= φ により $\frac{0}{T}^* \tilde{\Lambda} \in \frac{0}{T}^* \tilde{\Lambda}_{S_0}$ は exchange である。

更に前節の結果により, Σ は Δ 上の Σ である。

[命題 3.8]

$$(3.107) \quad \varphi^{-1} e^2_{\Lambda} \xrightarrow{\sim} e^2_{S_0}.$$



次に, 正則 1×1 の 2 -micro 函数 φ がある。

e^2_{Λ} に定義する。

$\tilde{\Lambda}$ は (3.102) の $1, 2, 3$ の sub-manifold

Σ 上の Σ に定義する。

$$(3.108) \quad \Sigma = \{ (p, z) \in \tilde{\Lambda}; \operatorname{Im} z_{d+1} = \dots = \operatorname{Im} z_{n_0} = 0 \}$$

(ただし $d < n_0$)

ある ε , 正則 n_0 個の x - y - z - w - μ micro 函数の層 $\mathcal{C}^2_\Sigma|_{\tilde{\Lambda}}$ は次のように定義出来る。

[定義 3.9]

$$(3.109) \quad \mathcal{C}^2_\Sigma|_{\tilde{\Lambda}} = \mathcal{H}^{n_0-d}_{T^*\Sigma|_{\tilde{\Lambda}}}(\pi_{\Sigma|_{\tilde{\Lambda}}}^{-1} \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}^a)$$

[注意 3.10] 和原 - Yves Laurent [7] によれば, $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}$ は "Edge of the wedge" (= $\tilde{\Lambda}$)

$$(3.110) \quad \mathcal{H}^k_{T^*\Sigma|_{\tilde{\Lambda}}}(\pi_{\Sigma|_{\tilde{\Lambda}}}^{-1} \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) = 0 \quad (k < n_0 - d)$$

が成る。野呂正行氏の論文 [8] によれば,

$$\Omega_0 \subset \sqrt{-1} T^* \mathbb{R}^{n_1} \quad (\text{homogeneous to proper convex open set})$$

$$\Omega_1 \subset \mathbb{C}^{n_0} \quad (\text{Stein open set}).$$

よって, $\Omega_0 \times \Omega_1$ は $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\tilde{\Lambda}} = \mathbb{R}^{n_1}$ の cohomological = trivial である。

$$(3.111) \quad \mathcal{H}^k_{T^*_{\Sigma} \tilde{\Lambda}} (\pi_{\Sigma| \tilde{\Lambda}}^* \mathcal{L}_{\tilde{\Lambda}}) = 0$$

$$(k > n_0 - d)$$

2. 取 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\Sigma| \tilde{\Lambda}}$ である。



前節 § 3.4. と同様の direct calculation を経て
後述 § 3.9. 同型を得る。

$$(3.112) \quad \Omega_+^1 := \{ z \in \mathbb{C}^{n_0}; x_{n_0} > x_{d+1}^2 + \dots + x_{n_0-1}^2 \}$$

$$(3.113) \quad \mathcal{N}_1 = \pi^* T^* \mathbb{R}^{n_1} \times \partial \Omega_+^1$$

我々定義: $\mathcal{L}T = \text{canonical transformation (3.106)}$

α φ による

$$\pi_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda} \subset \pi_{\Sigma_1}^* \tilde{\Lambda} \quad \text{if } \varphi \text{ is a diffeomorphism}$$

変化する。更に、

[命題 3.11]

$$(3.114) \quad \varphi^{-1} \mathcal{L}_{\Sigma| \tilde{\Lambda}}^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\Sigma_1}^2$$



α 同型を用いて $\mathcal{L}_{\Sigma| \tilde{\Lambda}}^2$ の結果を用いて示す。

$T_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda}$ の座標を $(p; z', x''; \sqrt{x''^*} dx'')$ と
 とる。 (但し, $z' = (z_1, \dots, z_d)$ $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_{n_0})$
 $x''^* = (x_{d+1}^* \dots x_{n_0}^*)$ とする。) すると, $e_{\Sigma}^2 \tilde{\Lambda}$
 は, $z' \mapsto$ "2 接続の一意性" を有する = と分かる。
 これの述べる為には $\tilde{\Lambda}$ に対する local Bochner の
 定理を用意する。

$$(3.115) \quad T := \sqrt{T^*} \mathbb{R}^n$$

とて,

X : 複素多様体に対して, X 上正則パラメータ x と
 (2 重) micro 函数の層を $\mathcal{F}_X$ と記す。

$$(3.116) \quad X \rightsquigarrow \mathcal{F}_X.$$

と functorial に定まる。

($\mathcal{F}_X$ は $T \times X$ 上の sheaf であることに注意する。)
 柏原 - Laurent [7] にある Abstract な Edge of
 the wedge の定理の証明からいくつかの事実を採り出す。

[定義 3.12] $G \subset X$ locally closed set
 の q -proper であるとは, 任意の複素多様体
 Y と T の任意の開集合 W に対して $\square$ 成立する
 こと。

$$(3.117) \quad \forall i < q \quad H_{G \times Y \times W}^i (X \times Y \times W; \mathcal{F}_{X \times Y}) = 0 \quad \square$$

[Fact 3.13] (i) $Z: X$ の閉集合, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ X の開集合の増大列で $X = \bigcup_n U_n$ ならば Z は g -proper である。

任意の $n \in \mathbb{N}$ に對し $Z \cap U_n$ は g -proper.

$\Rightarrow Z$ は g -proper

(ii) $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: X の閉集合の減少列に對し,

任意の $n \in \mathbb{N}$ に對し Z_n は g -proper

$\Rightarrow Z := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ は g -proper $\square$

[Fact 3.14] $\gamma: \text{compact}$ な連続写像, $G: X$ の閉集合, $K: \gamma$ の閉集合 Z ならば $K \subseteq \gamma$ である。

この時, G は X 中の g -proper

$\Rightarrow G \times K$ は $(g+1)$ -proper in $X \times Y$ $\square$

[Fact 3.14.の系]

$K_1, \dots, K_n : \mathbb{C}$ の compact set

X : 連結な連続写像, $G(\subseteq X)$: 閉集合

この時

$G \times K_1 \times \dots \times K_n$ は $X \times \mathbb{C}^n$ 中の $(n+1)$ -proper $\square$

[Fact 3.15] $Z \subset X$ 閉集合.

$f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ (正則).

$df \neq 0$ on X . $\varepsilon > 0$ $Y = f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon(a) = a$ 時

Z 0- f -propre $\Rightarrow Z \cap Y$ is $(f-1)$ propre $\square$

以上の準備ができたとき a vanishing theorem を掲げよう.

成立する a は, 柏原-Y. Laurent [7], 証明は
読者のための modification を証明出来ることである.

[定理 3.16] $K_1, K_2: \mathbb{C}^n$ の 正則凸 compact set に対して

(3.118) $K_1 \setminus K_2$ は n -propre in $\mathbb{C}^n$ $\square$

証明は, 前掲の Lemma を用いる.

[Lemma 3.17] $K \subset \mathbb{C}^n$ 正則凸 compact set in $\mathbb{C}^n$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ open set, $Z \subseteq \Omega$ closed

$\Rightarrow$ 1° K は n -propre in $\mathbb{C}^n$

2° $K \times Z$ は $(n+1)$ -propre

(証明). 初め $K \subset \{z \in \mathbb{C}^n; |z_j| \leq 1 (j=1, \dots, n)\}$

と仮定しよう.

$f_j(z) = z_j (j=1, \dots, n)$ と定め,

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C}^n; |f_k(z)| \leq 1\}$$

と表す。 (= $z \mapsto f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ ($k=1, 2, \dots$))

$$K_N := \{z \in \mathbb{C}^n; |f_k(z)| \leq 1 \quad (k=1, \dots, N)\}$$

と置く。 Fact 3.14, 9. Σ_1 (= 2.1)

$$T_N := \{z \in \mathbb{C}^N; |z_k| \leq 1 \quad (k=1, \dots, N)\} \times \Sigma$$

は $(N+1)$ propre in $\mathbb{C}^N \times \Sigma$. $\vdash$

$$Y_N := \{z \in \mathbb{C}^N; z_j = f_j(z_1, \dots, z_n) \quad (n+1 \leq j \leq N)\}$$

と定めるとき

$(Y_N \cap T_N) \times \Sigma$ は $(n+1)$ propre in $Y_N \times \Sigma$

$$\pi: \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad (= \pi')$$

$$Y_N \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$$

$\cup$

$$T_N \cap Y_N \xrightarrow{\sim} K_N$$

$\Sigma \text{ (2.1) } \vdash$, $K_N \times \Sigma$ は $(n+1)$ propre

Fact 3.13. (= 2.1), $K \times \Sigma$ は $(n+1)$ propre.

$\bar{K}$ is Fact 3.15. $\exists \bar{K}$ "3" ϵ , K is n -proper 2"

$\bar{K}$ 3 = ϵ 3" 3 3.

(Lemma 3.17 証 3)

□

[定理 3.16 の証明] $p \in \text{complex manifold } \epsilon 12$.

$W \subset T$ open set $\epsilon 3$.

$$\begin{array}{ccc}
 & H^i(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{F}_{\mathbb{C}^n \times Y}) & \\
 & \downarrow \quad \quad \quad \swarrow +1 & \\
 H^i(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{F}_{\mathbb{C}^n \times Y}) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K_1 \times Y \times W & & (K_1 \setminus K_2) \times Y \times W
 \end{array}$$

$\pi_1 \cong \pi_2 \epsilon$, Lemma 3.17 2) 3 3

$$H^i_{K_1 \times Y \times W}(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{F}_{\mathbb{C}^n \times Y}) = 0 \quad (i < n)$$

$$H^i_{(K_1 \cap K_2) \times Y \times W}(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{F}_{\mathbb{C}^n \times Y}) = 0 \quad (i < n).$$

2')

$$H_{k_1 \setminus k_2 \times Y \times W}^i(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n \times Y}) = 0 \quad (i < n-1)$$

かゝる。 故ては

$$H_{k_1 \cap k_2 \times Y \times W}^n(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n \times Y})$$

$$\longrightarrow H_{k_1 \times Y \times W}^n(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n \times Y})$$

が injective であることは Σ, π は "証明" される。

初めより, $k_2 \subset \{z; |z_j| \leq 1 \quad (j=1, \dots, n)\}$

と仮定してよい。 先程と同様に

$$f_j(z) = z_j \quad (j=1, \dots, n)$$

と置く。

$$k_2 := \bigcap_{k \in N} \{z \in \mathbb{C}^n; |f_k(z)| \leq 1\}$$

と表す。 ($f_k(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ である。 ($k=1, 2, \dots$))

$$K^N := k_1 \cap \bigcap_{1 \leq k \leq N} \{z \in \mathbb{C}^n; |f_k(z)| \leq 1\}$$

と定める。

$$K_{N-1} \setminus K_N = \{z \in K_{N-1}; |f_N(z)| > a_N\}$$

と表す。 (a_N は τ に近い。

K_{N-1} は $\mathbb{C}^n$ 中正則凸 2" 域 α 2", Lemma 3.17
 Σ 用 113 と

$K_{N-1} \times \{t \in \mathbb{C}; 1 < |t| \leq a_N\}$ は
 $(n+1)$ propre in $\mathbb{C}^n \times \{t \in \mathbb{C}; |t| > 1\}$
 $\{(z, t) \in \mathbb{C}^n \times \{t \in \mathbb{C}; |t| > 1\}; t = f_N(z)\}$

と $\S 1$ Prop 33 $\wedge$ Fact 3.15 Σ 用 113 と,

$K_{N-1} \setminus K_N$ は n -propre 2" 域 α 2". 従って
 $H^n_{K_N \times Y \times W}(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n \times Y})$
 $\longrightarrow H^n_{K_{N-1} \times Y \times W}(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n \times Y})$

は injective. 更に

$\lim_{\longleftarrow N} H^n_{K_N \times Y \times W}(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n \times Y})$

$\longrightarrow H^n_{K_1 \times Y \times W}(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n \times Y})$

は $\mathbb{R}$ 射 2" 域 α 2".

$K_1 \cap K_2 = \bigcap_{N \geq n} K_N$ 2" K_N は n -propre
 2" 域 α 2", Mittag-Leffler 論法 (2.11)

$$\varprojlim_N H^n(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n \times Y}) \cong H^n_{k_1 \cap k_2 \times Y \times W}(\mathbb{C}^n \times Y \times W; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n \times Y})$$

かゝる $\mathcal{F}$ の問題となつてゐる単射性が得られた。
従つて証明が完了。 $\square$

この定理 3.16. を用ゐると、 $\mathbb{R}^n$ の正則 n 次元 X 上の $\mathcal{F}$ 型 micro 函数 に対する "local Bochner" type theorem が成立する事は、本原-河合-村松 [5] と同様。

[命題 3.18] $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$G_\varepsilon := \left\{ (x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2) \in \mathbb{C}^2; \begin{aligned} &0 \leq y_1 \\ &0 \leq y_2, y_1 + y_2 < 1, \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + (y_1 + y_2) \\ &\quad - \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) < 1 - \varepsilon \end{aligned} \right\}$$

$$F_\varepsilon = G_\varepsilon \cap \{y_1 = 0 \text{ or } y_2 = 0\}$$

に對し、 $2 G_\varepsilon, F_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$ に定義する。 $U' \in F_\varepsilon$ を含む開集 A とする。更に、

$$U = \{ (x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2) \in U'; y_1 < 0 \text{ or } y_2 < 0 \}$$

と定める。この時、 $\forall W_0 \subset \mathbb{C}^n$ open set

$$\# W_1 \subset T \text{ is } \#12.$$

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}^2 \times W_0} ((U \cup G_\varepsilon) \times W_0 \times W_1)$$

$$\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{C}^2 \times W_0} (U \times W)$$

は全射 2" である。

[問題 3.19] $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ とする。

$= 2''$,

$$F_1 := \left\{ (x_1 + \sqrt{\varepsilon} y_1, x_2 + \sqrt{\varepsilon} y_2) \in \mathbb{C}^2; y_1 = 0, 0 \leq y_2 < 1 \right. \\ \left. x_1^2 + x_2^2 < 4 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\}$$

$$F_2 := \left\{ (x_1 + \sqrt{\varepsilon} y_1, x_2 + \sqrt{\varepsilon} y_2) \in \mathbb{C}^2; y_2 = 0, 0 \leq y_1 < 1 \right. \\ \left. x_1^2 + x_2^2 < 4 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\}$$

$$G_1 = \left\{ (x_1 + \sqrt{\varepsilon} y_1, x_2 + \sqrt{\varepsilon} y_2) \in \mathbb{C}^2; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \right. \\ \left. y_2 + (1-2\varepsilon)(y_1-1) < 0, x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ (x_1 + \sqrt{\varepsilon} y_1, x_2 + \sqrt{\varepsilon} y_2) \in \mathbb{C}^2; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \right. \\ \left. y_1 + (1-2\varepsilon)(y_2-1) < 0, x_1^2 + x_2^2 < \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\}$$

is $\mathcal{F}$, F_1, F_2, G_1, G_2 is defined.

$F = F_1 \cup F_2$, $G = G_1 \cup G_2$ とおく, $U' \in F$ の近傍とく

$U = U' \cap \{y_1 < 0 \text{ 又 } y_2 < 0\}$
 と定める. 任意の開集合 $W_0 \subset \mathbb{C}^n$, $W_1 \subset T$
 に対して

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}^2 \times W_0}((U \cup G) \times W_0 \times W_1)$$

$$\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{C}^2 \times W_0}(U \times W_0 \times W_1)$$

は全射的である. $\square$

とく, (3.108), 状況は同じ, 正則 $n_0 \times n_1$ -形式
 micro 係数の層 $\mathcal{E}^2 \cong \tilde{\Lambda}$ の正則 $n_0 \times n_1$ -形式
 に関する接続の一意性を示す。

$$(3.119) \quad M = \mathbb{R}^{n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t$$

$$(3.120) \quad \Lambda = \{(z, t; \sqrt{-1}(\xi dx + \tau dt)) \in \sqrt{-1}T^*M; \xi = 0\}$$

$$(3.121) \quad \tilde{\Lambda} = (\Lambda \text{ の 平行移動素集合})$$

$$\cong \mathbb{C}^{n_0}_z \times \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{n_1}_t$$

$p = (t; \sqrt{-1}\tau dt)$

$d < n$ とく

$$(3.122) \quad \Sigma = \{(z, p) \in \tilde{\Lambda}; \operatorname{Im} z_{d+1} = \dots = \operatorname{Im} z_{n_0} = 0\}$$

証明の便宜を爲に少し Notation を準備する。

$$(3.123) \hat{M} = M \times \mathbb{R}_s.$$

$$(3.124) \hat{\Lambda} = \left\{ (x, t, s; \Pi(\xi dx + \tau dt + \sigma ds) \in \Pi^0 \hat{T}^* \hat{M}; \right. \\ \left. \xi = 0, \sigma = 0 \right\}$$

$$(3.125) \tilde{\Lambda} \simeq \Delta_{(z, v)}^{n_0+1} \times \Pi^0 T^* \mathbb{R}_p^{n_1}$$

と表す。

$$(3.126) \hat{\Sigma} = \left\{ (z, v; p); \operatorname{Im} z_{d+1} = \dots = \operatorname{Im} z_{n_0} \right. \\ \left. = \operatorname{Im} v = 0 \right\}$$

と表す。 $T_{\hat{\Sigma}}^* \tilde{\Lambda}$, $T_{\hat{\Sigma}}^* \hat{\Lambda}$ の座標を z と z'' とし、

$$(p; z', x''; \Pi x''^* dx''), \quad (p; z', x'', s; \Pi(x''^* dx'' + s^* ds))$$

と記すことにする。

[定理 3.20] $u \in C_{\hat{\Sigma}}^2 \tilde{\Lambda}$ の section である。

($U \subset T_{\hat{\Sigma}}^* \tilde{\Lambda}$ に a section がある。) すると, $\operatorname{supp} u$

$$\text{は } \{ p = \text{const}, x'' = \text{const}; x'^* = \text{const} \}$$

なる Π の連結成分の union である。

(証明) 1°

$$U \cap \{ T_{\hat{\Sigma}}^* \tilde{\Lambda} \text{ の } 0\text{-section} \} = \emptyset \quad \text{a.e. } \frac{dx}{b}$$

に reduce されるから、

$$u \otimes \delta(1) \in \Gamma(\tilde{U}; e^2_{\Sigma} | \tilde{\Lambda})$$

$$\hat{U} = \left\{ (p; z', x'', \sqrt{x''^* dx'' + s^* ds}); s^* \neq 0 \right. \\ \left. (p, z'; x'', \sqrt{x''^*/s^*} dx) \in U \right\}$$

2. 仮定),

$$(p; z', x'', 0; \sqrt{x''^* dx'' + ds}) \in \text{supp}(u \otimes \delta(s))$$

$$\Leftrightarrow (p; z', x''; \sqrt{x''^* dx''}) \in \text{supp } u$$

$$\text{に注意するとき, } U \cap \{T^*_{\Sigma} \tilde{\Lambda} \text{ a 0-section}\} = \emptyset$$

が容易に帰着されることを示す。

$$2. U \cap \{T^*_{\Sigma} \tilde{\Lambda} \text{ a 0-section}\} = \emptyset$$

が容易に示す, 命題 3.11 の同型 (3.114) と

命題 3.11 を用いると容易に示す。

(cf. Schapira [10] の定理 2.1 の証明)

□

次節の 為には prop. を証明して置く。

[命題 3.21] canonical $\pm$ morphism

$$(3.127) \quad e^2_{\Sigma} | \tilde{\Lambda} \quad \Bigg| \quad T^*_{\Sigma} \tilde{\Lambda} \cap T^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda} \quad \longrightarrow \quad e^2_{\Lambda}$$

定義), injective である。

(証明)

正則 n -形式 $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$ の場合 $d=1$ の場合
 reduce できる。

$T^*_{\Sigma} \tilde{\Lambda}$ の coordinate $\in C^p; z_1, x', \wedge x'^* dx'$

(但し $x' = (x_2, \dots, x_{n_0})$ と置く。

と表す時, (i) $x'^* \neq 0$ の時 & (ii) $x'^* = 0$
 の時 $n=2$ に分かれる。

(i) $x'^* \neq 0$ の時.

$$\dot{p} = (0, \wedge dt_1; 0; \wedge dx_2) \quad (\dot{p} = (0; \wedge dt_1))$$

に $n=2$ 証明する。

$$e^2_{\Sigma \tilde{\Lambda}, \dot{p}} = \lim_{\Omega, \omega, \Gamma} H^{n_0-1}(\omega \times \Omega; e_{\tilde{\Lambda}})$$

$$\Omega, \omega, \Gamma \rightarrow \omega \times (\Omega \cap (\mathbb{C}^n_{z_1} \mathbb{R}^{n-1} + i\Gamma))$$

但し,

(3.128) Γ は $\mathbb{R}^{n_0-1}$ の closed convex cone 2"

$\dot{p} \in S^{n_0-2}$ かつ $\wedge dx_2$ の基本近傍となす

$n < \infty$ 3."

(3.129) ω は $\wedge S^* \mathbb{R}^{n_1}$ 中の $\dot{p}$ の基本近傍
 Ω は $0 \in \mathbb{C}^{n_0}$ 中の 0 の基本近傍

$\Sigma \neq \emptyset$.

要は

$$(3.130) \quad e_{\tilde{\lambda}, i}^2 = \frac{\dim}{\omega, \Omega, G} H^{n_0}(\omega \times \Omega; e_{\tilde{\lambda}})_{\omega \times (\Omega \cap (\mathbb{R}^{n_0} + iG))}$$

但し

(3.131) G は $\mathbb{R}^{n_0}$ の closed convex cone かつ
 G° in S^{n_0-1} 上の $\text{Ad} x_2$ の 基本近傍系
 とおくと $\delta = \mathbb{R} \times \{0\}$ となる。

$$\delta = \mathbb{R} \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_0-1} \quad \text{と見做す}$$

要は

$$\delta^\pm = \mathbb{R}_\pm \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_0-1} \quad \text{と定める。}$$

$$G + \delta = (G + \delta^+) \cup (G + \delta^-)$$

$$G = (G + \delta^+) \cap (G + \delta^-)$$

注意 12. ω の support は $\mathbb{R}^n$ 上の triangle
 を得る。

(3.132)

$$R\Gamma(\omega \times \Omega; e_{\tilde{\lambda}})_{\omega \times (\Omega \cap (\mathbb{R}^{n_0} + iG))}$$

+1.

$$\bigoplus_{\pm} R\Gamma(\omega \times \Omega; e_{\tilde{\lambda}})_{\omega \times (\Omega \cap (\mathbb{R}^{n_0} + i(G + \delta^\pm)))} \longrightarrow R\Gamma(\omega \times \Omega; e_{\tilde{\lambda}})_{\omega \times \Omega \cap (\mathbb{R}^{n_0} + i(G + \delta))}$$

板原. - Laurent [7] Edge of the wedge

(3.133) $\lim_{\omega, \Omega} H^{n_0-1}(\omega \times \Omega; \mathcal{C}_\Lambda) = 0.$
 $\omega \times (\Omega \cap (\mathbb{R}^{n_0} + i(G + \delta^\pm)))$

また (3.132) と (3.127) を
 得る。

(ii) $x^* = 0$ の時

これは (i) の場合と同様に証明される。 

§6. すいか割りりの定理.

この §6 において、柏原-Yve. Laurent [7] において証明されている、Microlocal な Holmgren の定理を所謂 "Watermelon Cut" type theorem に拡張する。(柏原-Yve Laurent の証明は cohomological なものであったが、最近野呂正行氏がこの修訂論^[8]において β_λ^2 の平面波分解を用いた証明を見出したことと注記しておく。)

まず第二章の §2.2. で考察した層 $\mathcal{C}_{\Sigma, \lambda}^2$ について、接束の一貫性を調べる。これが、 $\mathcal{C}_{\Sigma, \lambda}^2$ は cosphere bundle ではなく、cotangent bundle であることと定義し直す。

$$(3.133) \quad \mathcal{L} = \{ (x, t; \sqrt{\epsilon} (dx + \tau dt)) \in T_M^* X; \quad \xi = 0 \}$$

$$\text{但し } X = \mathbb{C}_z^{n_0} \times \mathbb{C}_w^{n_1}, \quad M = \mathbb{R}_x^{n_0} \times \mathbb{R}_t^{n_1}.$$

とする。

$\tilde{\lambda} \in \lambda$ の部分複素化とあるとき、 $\lambda \in \Sigma_0, \Sigma_1$

と定める。但し

$$(3.134) \quad \tilde{\lambda} \simeq \sqrt{\epsilon} T^* \mathbb{R}_p^{n_1} \times \mathbb{C}_z^{n_0}$$

と同-視する。

$$(3.135) \quad \Sigma_0 = \{(p; z) \in \tilde{\Lambda}; z_1 = 0, \operatorname{Im} z_2 = \dots = \operatorname{Im} z_{n_0} = 0\}$$

$$(3.136) \quad \Sigma_1 = \{(p; z) \in \tilde{\Lambda}; \operatorname{Im} z_2 = \dots = \operatorname{Im} z_{n_0} = 0\}$$

[定義 3.22]

$$e^2_{\Sigma_0 | \tilde{\Lambda}} = \mathcal{H}^{n_0}_{T^*_{\Sigma_0} \tilde{\Lambda}} (\pi_{\Sigma_0 | \tilde{\Lambda}}^{-1} e_{\tilde{\Lambda}})$$

$$\text{但し } \widetilde{\Sigma_0 \tilde{\Lambda}}^* = \frac{\pi_{\Sigma_0 | \tilde{\Lambda}}}{T^*_{\Sigma_0} \tilde{\Lambda} \cup (\tilde{\Lambda} \setminus \Sigma_0)} \tilde{\Lambda}$$

Σ comonoidal 変換 とする。

前節 2-定義した $e^2_{\Sigma_1 | \tilde{\Lambda}} \in e^2_{\Sigma_0 | \tilde{\Lambda}}$ は

second-microlocal な Legendre 変換 (= $\mathcal{F}'$)

互いに同型に 移り合ふ。 = Σ を用いて $\Sigma = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}'$

命題 3.23 Σ 得る。

[命題 3.23]

$$(3.137) \quad e^2_{\Sigma_0 | \tilde{\Lambda}} \Big| \overset{\circ}{T}^*_{\Sigma_0} \tilde{\Lambda} \cap \overset{\circ}{T}^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda} \longrightarrow e^2_{\tilde{\Lambda}}$$

な injective な morphism がある。 $\square$

[命題 3.24] $T_{\Sigma}^* \tilde{\Lambda}$ の座標系 $(p; x'; z_1^* dz_1 + \sqrt{-1} x_1^* dx_1')$

と表す。(但し, $x' = (x_2 \dots x_n)$ と記す。)

すると $\mathcal{C}_{\Sigma}^2 \tilde{\Lambda}$ は $z_1^* = 0$ 上の一意的連続性を持つ。

(証明) 定理 3.20. の証明と同様に相原。主に $\mathbb{R}$ の dummy の technique を用いて $x_1^* \neq 0$ の場合に帰着される。

$x_1^* \neq 0$ の時は, 定理 3.20 より Legendre 変換を経て, 直ちに証明される。 $\square$

[定理 3.25] (microlocal version of Water-Melon Cut) $\dot{p} = (p; x=0)$ とする。

$u \in \mathcal{B}_{\Lambda, \dot{p}}^2$ に対して条件を満たす Γ_2 とする。

$$(3.138) \text{supp } u \subset \{ (p, x) \in \Lambda; x_1 \geq 0 \}$$

$$\Rightarrow \text{ある時 } (p; 0; \sqrt{-1} x_1^*, \sqrt{-1} x_1'^*) \in SS_{\Lambda}^2(u).$$

$$\Rightarrow (p, 0; \sqrt{-1} x_1^*, \sqrt{-1} x_1'^*) \in SS_{\Lambda}^2(u). \\ (\forall x_1^* \in \mathbb{R})$$

(証明)

定理 3.20 の $\overline{\tau} = \tau, \gamma$ と同様に $x'^* \neq 0$ の
 時に帰着される。

$x'^* \neq 0$ と仮定する。

$u \in \mathcal{B}_\Lambda^2$, i から $\omega \in \Lambda$ に定義される

とする。 $q \in \Lambda$ の変数 と表す。

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_{\Lambda+}(\omega; \mathcal{B}_\Lambda^2) & \xrightarrow{\text{Sp}_\Lambda^2} & \Gamma\left(\frac{\sigma^*}{\Lambda} \tilde{\Lambda} \cap \tilde{\Lambda}^{-1}(\omega); \mathcal{C}_\Lambda^2\right) \\
 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\
 \Gamma(G_+; \mathcal{C}_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}}^2) & \longrightarrow & H_{\frac{\sigma^*}{\Lambda} \tilde{\Lambda} \cap \frac{\sigma^*}{\Sigma_0} \tilde{\Lambda}}^1\left(\frac{\sigma^*}{\Sigma_0} \tilde{\Lambda} \cap \tilde{\Lambda}^{-1}(\omega); \mathcal{C}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}^2\right)
 \end{array}$$

(3.139)

但し

(3.140)

$$G_+ = \{(q, z_1^* dz_1 + \sqrt{q} x'^* dx'); \operatorname{Re} z_1^* > 0\}$$

と 12 上の可換図式が存在する。

(Schapira [10] 参照 $q = 1$). $== 2$,

第 2 行と第 2 列が単射であることを示す。(後述)

$(\dot{p}; 0; \sqrt{x_1^*}, \sqrt{x_1'^*}) \notin SS_{\Lambda}^2(u)$ と

仮定する。第2行の injectivity より

$$u=0 \leadsto (\dot{p}; 0; \sqrt{x_1^*}, \sqrt{x_1'^*})$$

$e_{\Sigma_0}^2 | \tilde{\Lambda}$ の z_1^* に関する連続性より

$$(\dot{p}, 0; z_1^*; \sqrt{x_1'^*}) \in G_+ \text{ なる所て } u=0$$

で $\{z_1^*\} = \{z_1^*\}$ が分る。

(第2列の injectivity より) 直ちに.

$$(\dot{p}; 0; \sqrt{x_1^*}, \sqrt{x_1'^*}) \notin SS_{\Lambda}^2(u) \text{ なる所て}$$

証明する。

第2行の injectivity より

$$T_{\Sigma_0}^* \tilde{\Lambda} \text{ の coordinate } \varepsilon (\dot{p}; x_1', z_1^*; \sqrt{x_1'^*}) \text{ と}$$

$$\varepsilon \dot{p} = (\dot{p}; 0; 0; \sqrt{x_1'^*}) \text{ である。}$$

$$\Omega \varepsilon \dot{p} \text{ の } T_{\Sigma_0}^* \tilde{\Lambda} \text{ への近接性より}$$

$$\mathcal{H}^1 \left(e_{\Sigma_0}^2 | \tilde{\Lambda} \right) \dot{p} \\ \dot{p}^* \tilde{\Lambda} \cap \dot{p}^* \tilde{\Lambda}_{\Sigma_0}$$

$$= \lim_{\Omega} \left(\frac{\prod_{\pm} \left(\prod_{\{z_i^* > 0\}} e_{\Sigma/\tilde{\Lambda}}^2 \right) / \prod(\Omega; e_{\Sigma/\tilde{\Lambda}}^2)}{\prod(\Omega; e_{\Sigma/\tilde{\Lambda}}^2)} \right)$$

2)

$$\prod(G+; e_{\Sigma/\tilde{\Lambda}}^2) \longrightarrow \mathcal{H}^1_{\tilde{T}_\Lambda^* \tilde{\Lambda} \cap \tilde{T}_{\Sigma_0}^* \tilde{\Lambda}} \left(e_{\Sigma/\tilde{\Lambda}}^2 \right)$$

は容易に定まり injective であることがわかる。

第2 3) の injectivity について。

我々は $e_{\Sigma_0}^2, e_{\Sigma_1}^2$ の言葉で表現する。

$$Z_0 = \{ z = x + iy \in \mathbb{C}^{n_0}; x_{n_0} \leq x_1^2 + \dots + x_{n_0-1}^2 \}$$

$$Z_1 = \{ z = x + iy \in \mathbb{C}^{n_0}; x_{n_0} \leq x_2^2 + \dots + x_{n_0-1}^2 \}$$

更に

$$Z_2^+ = \left\{ z; x_1 \leq 0 \text{ かつ } x_{n_0} \leq x_2^2 + \dots + x_{n_0-1}^2 \right\} \\ \cup \left\{ z; x_1 \geq 0 \text{ かつ } x_{n_0} \leq x_1^2 + \dots + x_{n_0-1}^2 \right\}$$

Z_2^- も同様に定める。

今までの議論と同様に

$$N_j^{(\pm)} = 0 \quad Z_j^{(\pm)} \text{ と定めて.}$$

$$e^2_{N_j^{(\pm)}} = \mathcal{H}^1_{\mathcal{H}T^*R^{n_1} \times Z_j^{(\pm)}}(e\sigma) \Big|_{\mathcal{H}T^*R^{n_1} \times N_j^{(\pm)}}$$

と定めて。このとき $\{e^2_{N_j^{(\pm)}}\}$ は exact sequence を存在する。

$$0 \rightarrow e^2_{N_1} \Big|_{\mathcal{H}T^*R^{n_1} \times (S_1 \cap S_0)} \longrightarrow \bigoplus_{\pm} e^2_{N_2^{(\pm)}} \Big|_{\mathcal{H}T^*R^{n_1} \times (S_1 \cap S_0)}$$

$$\longrightarrow e^2_{S_0} \Big|_{\mathcal{H}T^*R^{n_1} \times (S_1 \cap S_0)} \longrightarrow 0$$

これは $\{e^2_{N_j^{(\pm)}}\}$ は exact sequence を存在する。

$\Omega \in \mathcal{H}T^*R^{n_1} \times (S_1 \cap S_0)$ の基本近傍 in

$\mathcal{H}T^*R^{n_1} \times S_0$ 上。

$$0 \rightarrow \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega; e^2_{S_0}) \rightarrow \bigoplus_{\pm} \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega \cap [x_1, x_0], e^2_{N_2^{(\pm)}})$$

$$\longrightarrow \mathcal{H}^1_{(S_1 \cap S_0) \times \mathcal{H}T^*R^{n_0}}(e^2_{S_0}) \longrightarrow 0.$$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$

$$e^2_{S_2^{(\pm)}, \mathfrak{g}} \xrightarrow{b_{\pm}} \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega \cap \{\pm x, x > 0\}, e^2_{S_0})$$

この morphism を 定義する

$$b_{\pm}(e^2_{S_1, \mathfrak{g}}) \subset \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega; e^2_{S_0})$$

は容易に示す。従って、

$$\bigoplus_{\pm} e^2_{S_2^{(\pm)}, \mathfrak{g}} / e^2_{S_1, \mathfrak{g}} \longrightarrow \varinjlim_{\Omega} \bigoplus_{\pm} \Gamma(\Omega \cap \{\pm x, x > 0\}, e^2_{S_0}) / \Gamma(\Omega; e^2_{S_0})$$

を 定義する。これは injective であることは明らか。

これは F1)

$$e^2_{S_0, \mathfrak{g}} \longrightarrow \mathcal{H}^1_{\sqrt{t}T^*R^n \times S_1 \cap S_0} (e^2_{S_0})_{\mathfrak{g}}$$

これは injective であることは容易に示す。

このようにして

$$e^2_{\Lambda} \longrightarrow \mathcal{H}^1_{T^*_{\Sigma, \Lambda} \cap T^*_{\Lambda}} (e^2_{\Sigma, \Lambda})$$

これは injective であることは容易に示す。



[文献]

[1] Bony - Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles., Ann. Inst. Fourier, Grenoble 26, 1 (1976) 81-140.

[2] 柏原-河合 : On the Boundary Value Problem for elliptic system of Linear Differential Equations I. Proc. Japan. Acad, 48 (1972) 712 ~ 715.

[3] 柏原-河合. Some applications of Boundary value problems For elliptic systems of Linear Differential Equations: Annals of Mathematics Studies 93; "Seminar on Micro Local Analysis"

[4] 柏原-河合 : Theory of elliptic boundary value problems and its applications. 数研研 講究録. 238, pp 1 ~ 59.

[5] 柏原-河合-木村; 代数解析学の基礎
紀伊国屋書店

[6] Yves Laurent : Théorie de la Deuxième Microlocalisation dans le Domaine Complexe :

Thesis presented to Univ. Paris Sud, Centre d'Orsay. (Birkhäuser, Progress in Mathematics vol 53. 412 出版).

[7] 柏原 - Yves Laurent : Theoremes d'annulation et deuxième Microlocalisation. Prepublication d'Orsay.

[8] 野呂正行, 修士論文 (東京大学に1985年1月に提出)

[9] [SKK] 佐藤・柏原・可合; Hyper functions and pseudo-differential equations. Springer Lecture Note in Math vol 287.

[10] Schapira; Propagation at the Boundary of analytic singularities; "Singularities in Boundary Value Problems" 185 ~ 212

[11] 戸澤良信之: 才2 修士論文

[12] 柏原 - Schapira, Micro hyperbolic systems. Acta Math 142 (1979) 1 ~ 55