

Bifurcation について

広大理 井上 淳

最近 Bifurcation 関係の出版物が急激に増加しているのですが、必ずしも当地では その理論の *raison d'être* が知られているとはいえないようなので、その解説を試みるものです。

さて、我々の出会う多くの非線型方程式は、多くの場合、いくつかの *parameter* を含んでいます。一般的に

$$(1) \quad u_t = F(\nu; t, u)$$

の形をしているものと考えられます。例えば、

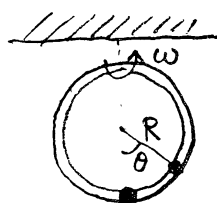
Ex 1 (Navier-Stokes equation)

$$(2) \quad \begin{cases} u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{\partial \Omega} = b \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

この式の物理的意味は、適当な教科書にゆずることにして、

$R = \frac{1}{\nu}$ は Reynolds 数 と呼ばれる parameter.

Ex.2 (Calabi の例)



左図のように天井からフープをつるし、中にパチンコ玉を入れ角速度 ω で回わします。 g を重力として、Newton の

法則に従ってパチンコ玉の動きを表わすと

$$(3) \quad \ddot{\theta} = \sin \theta \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \quad \theta = \theta(t), \quad \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \theta.$$

ここでは ω を parameter とみます。

他にいくつもの例はありますが、差し当りこれだけにしましょう。尚、parameter がいくつが入っている場合もあり、それも又面白い問題を提供してくれます。([2])

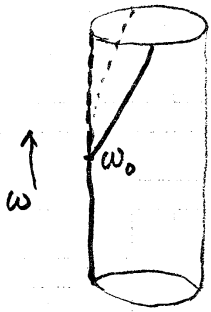
以後簡単の爲、 $F(\nu; t, u) = F(\nu; u)$ となっているとしましょう。

今、 (ν_0, u_0) が $F(\nu_0, u_0) = 0$ を満たしているとき、 u_0 を (1) の 平衡解 (stationary solution) といいます。さて、この平衡解 u_0 を少しゆずってみましょう。すなわち、 $u(t) = u_0 + v(t)$ 、として (1) 式に代入します。

$$(4) \quad v_t = F(\nu_0; u_0 + v(t)), \quad v(0) = \text{given}$$

このとき、 $v(0)$ が小さければ、 $v(t)$ も小さく、かつその影響が時間と共に小さくなることが望ましいわけですから、これを 安定 (stable) ということにします。

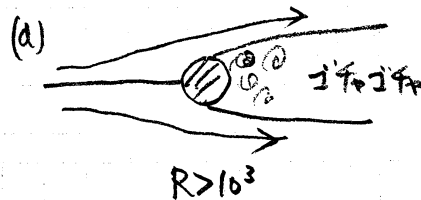
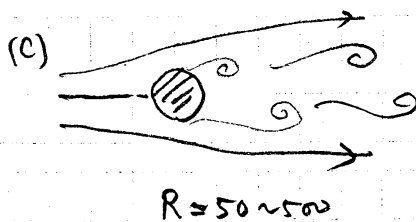
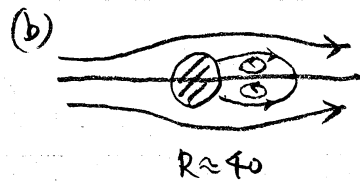
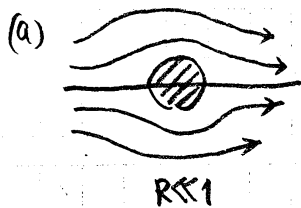
例2の場合で ω を大きくしていくと下図のようになります。



$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$. (2) の stationary sol. は $\theta = 0$ と $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$ です。 $\omega < \omega_0$ のときはパチンコ玉はフウフーの下端にいて $\omega \geq \omega_0$ となると、一般に段々上にあがってきます。すなわち、 $\omega = \omega_0$ だけ

stationary sol. は2つあって、一つは安定、もう片方は不安定になります。このように parameter がある点 (臨界点) を越えると解のあり方が変わるとき、Bifurcation が起こるといいます。

Ex3 (円柱のまわりの一様流) 一様な水の流れの中に円柱を固定して R を変化させるとしましょう。(空隙には、流れを運く)。今井[7]によれば、大体以下のようになります。



上のようにして乱流が現われるのですが、これに対し、Hopf と Landau は、「乱流は安定性と不安定性とをくり返して生ずる」と予想しました。すなわち (a) では一様流は安定な平衡解、それが R が大きくなると (b) となって違う安定な平衡解、又 R が大きくなると (c) となって、今度は時間的に周期的な安定な解がでる。それをくり返し、今度は周期がこつこつと、こつこつと、こつこつととなって (d) に到る。

最近、ある stationary sol. が bifurcation point を過ぎると periodic sol. となるという現象、(Hopf Bifurcation) が説明され (Ruelle-Takens [5], Marsden-McCracken [4]), 又 periodic sol. から quasi-periodic sol. がでてくる様子が少しずつ分かってきたようです。筆者は不勉強にして「具体的」問題についてどこ迄わかっているのか定かではありませんが、極く最近でた Joseph [3] の力作には色々と説明してあるようです。

Ex. 4. (Yamabe の問題) 有名な山辺の問題とは、 M を n 次元 Riemann manifold とし、 (η, φ) $\eta \in \mathbb{R}$ $\varphi > 0$ on M と

$$(5) \quad 4 \frac{n-1}{n-2} \Delta \varphi + R \varphi = \eta \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{on } M$$

なるものをみつけることにあります。 R は given. 上のいみで、 $\varphi = 0$ がいつ bifurcate するかと考えることができます。これが、この Bifurcation theory をこの symposium で紹介して

みたかった一つの動機です。

まだいくらでも考えることはあるようですが、今回はこれで終わらせていただきます。

文献

- [1] T. Aubin : Equations différentielles non linéaires et
Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire
- [2] C.N. Chow, J.K. Hale & J. Mallet-Paret : Applications of
Generic Bifurcation I. II. Arch. Rat. Mech. Anal. 59 (75)
159-188.
- [3] D.D. Joseph : Stability of fluid motions I. Springer (76)
- [4] J.E. Marsden & M. McCracken : The Hopf Bifurcation and its
applications. Springer, Appl. Math. Sci. #19 (76)
- [5] D. Ruelle & F. Takens : On the nature of turbulence
Comm. Math. Phys. 20 (71) 167-192
- [6] D.H. Sattinger : Topics in stability and bifurcation theory
Springer Lec. notes 309 (73)
- [7] 今井功 : 流体力学 (前編) 裳華房.