

多変数正則写像の星型性と凸型性

熊本大学 教育 金丸忠義 (Tadayoshi Kanemaru)

1変数関数の場合, 単位円板で単葉な正則関数が星型, 凸型になるための必要十分条件はそれぞれよく知られている. 多変数の場合, 定義域が多重円板または球である単葉な正則写像の星型, 凸型条件はT. Matsuno ([1]), T.A. Suttcliffe ([2]) によって, それぞれ独立に得られている. ここでは, 定義域がなめらかな境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の有界領域の場合に双正則写像が星型, 凸型になるための必要十分条件を求める.

1. 準備

$\mathbb{C}^n$ の点 z を $z = (z_1, \dots, z_n)'$ と列ベクトルで表す. z のノルム $|z|$ を $|z| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$ と定義する. ここに, $'$ は転置を $*$ は転置共役を表す. 正則写像を $w = W(z) = (w_1(z), \dots, w_n(z))'$ と列ベクトルで表す. ここに, 各 $w_j(z)$, $j=1, 2, \dots, n$ は正則関数とする.

正則写像のヤコビアン行列を

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \times W = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

で表す。ここに、 X はフロネッカー積で、

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \text{ とする。このとき、}$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial Z} dZ$$

が成り立つ。ただし、 $dZ = (dz_1, \dots, dz_n)'$ とする。

また、次のように定める。

$$\frac{\partial}{\partial Z^*} = \left(\frac{\partial}{\partial Z} \right)^*, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial Z^* \partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z^*} \times \frac{\partial}{\partial Z} \times W.$$

後に用いる行列の微分に関する公式をあげる。

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial Z} (AB) = \frac{\partial A}{\partial Z} (E_n \times B) + A \frac{\partial B}{\partial Z},$$

ここに、 A, B はそれぞれ $n \times l, l \times m$ 行列、 E_n は n 次単位行列とする。

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial Z} A^{-1} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial Z} (E_n \times A^{-1}),$$

ここに、 A は $m \times m$ 正則行列とする。

$$(3) \quad \frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial Z} \times E_q \right),$$

ここに、 A は $p \times q$ 行列、 Z, z は同次元のベクトルとする。

$\mathbb{C}^n$ のベクトル X, Y のなす角 $\text{ang}(X, Y)$ を

$$\cos \text{ang}(X, Y) = \frac{\text{Re}(X^* Y)}{|X||Y|} \quad \text{で定義する.}$$

$D_z \subset \mathbb{C}^n$ で定義された写像 $w = w(z): D_z \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は正則で 1対1, $\det \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0 \quad \forall z \in D_z$ のとき, 双正則写像とよばれる.

2. 凸型性

D_z をなめらかな境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする. $\varphi(z)$ を D_z の定義関数とする. すなわち, $\varphi(z)$ は $\mathbb{C}^2$ 級実数値関数で,

$$D_z = \{z \mid \varphi(z) < 0\}, \quad \partial D_z = \{z \mid \varphi(z) = 0\} \quad \text{とする.}$$

$w = w(z)$ は $\overline{D_z}$ 上の正則写像とし, 写像 w による D_z の像領域 $D_w = w(D_z)$ は次で与えられているとする.

$D_w = \{w \mid \psi(w) < 0\}, \quad \partial D_w = \{w \mid \psi(w) = 0\}$, ことに, $\psi(w)$ は $\mathbb{C}^2$ 級実数値関数である D_w の定義関数とする. このとき, $z \in \partial D_z$ に対して, $\psi(w) = \psi(w(z)) = \varphi(z) = 0$ が成り立つことに注意する. また, $z \in \partial D_z$ に対して,

$$d\varphi(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + dz^* \frac{\partial \varphi}{\partial z^*} = 2 \text{Re} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = 0.$$

したがって, $\frac{\partial \varphi}{\partial z^*}$ と dz は直交している.

合成関数の微分法より

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}.$$

$w = w(z)$ は正則だから $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$ が成り立ち,

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \quad \text{を得る. さらに,}$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial w} dw \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} dz \right) = 0.$$

したがって, $\frac{\partial \psi}{\partial w^*}$ は ∂D_w 上の法ベクトルである.

定義 D_z 上の双正則写像 $w = w(z)$ は, それによる D_z の像領域 $D_w = w(D_z)$ が凸領域になるとき, すなわち, 各 $w \in \partial D_w$ と $|h|$ が十分小さい実数 h に対して $\psi(w + h dw) > 0$ が成り立つとき, 凸型写像という.

このとき, 次の定理を得る.

定理 D_z をなめらかな境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする.

$\varphi(z)$ を D_z の定義関数とする. $w = w(z)$ を D_z 上の双正則写像とする. このとき, $w = w(z)$ が凸型写像になるための必要十分条件は次が成り立つことである.

$$(5) \quad \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) (dz \times dz) + d\bar{z}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^* \partial z} dz \right\} > 0, \quad z \in \partial D_z.$$

証明 C^2 級実数値関数 $\psi(w + h dw)$ は次のように展開される.

$$\begin{aligned} \psi(w + h dw) &= \psi(w) + h \left(\frac{\partial \psi}{\partial w} dw + d\bar{w}^* \frac{\partial \psi}{\partial w^*} \right) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} dw^2 + 2 d\bar{w}^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^* \partial w} dw + d\bar{w}^{*2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^{*2}} \right) + \dots, \end{aligned}$$

したがって, $\psi(w + h dw) > 0$ になるためには,

$$(6) \quad \psi(w) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} dw + dw^* \frac{\partial \psi}{\partial w^*} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} dw^2 + 2 dw^* \frac{\partial^2}{\partial w^* \partial w} dw + dw^{*2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^{*2}} > 0.$$

すなわち,

$$(8) \quad \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} dw^2 + dw^* \frac{\partial^2}{\partial w^* \partial w} dw \right) > 0$$

が成り立つことが必要十分である。公式(1), (2), (3), (4)を用いて計算すると次を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \right) \left(\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \times E \right) \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \left(E \times \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \right\} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \times E \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (9) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} dw^2 &= \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \times \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \times E \right) \right\} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z} \times \frac{\partial w}{\partial z} \right) (dz \times dz) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (dz \times dz) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left(E \times \frac{\partial w}{\partial z} \right) (dz \times dz) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (dz \times dz) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left(E \times \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \right) \left(E \times \frac{\partial w}{\partial z} \right) (dz \times dz) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} (dz \times dz) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} (dz \times dz) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) (dz \times dz). \end{aligned}$$

さらに,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^* \partial w} = \frac{\partial}{\partial w^*} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^* \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1}.$$

$$(10) \quad d\bar{w}^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{w}^* \partial w} dw = d\bar{z}^* \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right)^* \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^* \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = d\bar{z}^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^* \partial z} d\bar{z}.$$

(9), (10) を (8) に代入して (5) を得る.

系 単位球 $\{z \in \mathbb{C}^n \mid z^* z \leq 1\}$ 上の双正則写像 $w = w(z)$ が凸型になるための必要十分条件は $z^* z = 1$ に対して次が成り立つことである.

$$(11) \quad \operatorname{Re} \left\{ -z^* \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} (d\bar{z} \times d\bar{z}) + d\bar{z}^* d\bar{z} \right\} > 0.$$

証明 $\varphi(z) = z^* z - 1$ だから, $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = z^*$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^* \partial z} = E$.

これらを (5) に代入して, (11) を得る.

系 単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 上で単葉, 正則な関数 $w = w(z)$ が凸型になるための必要十分条件は, $|z| = 1$ に対して,

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{w''}{w'} + 1 \right) > 0 \quad \text{が成り立つことである.}$$

証明 $|z| = 1$ より $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とかける. したがって, (11) は次のようになる.

$$\operatorname{Re} \left\{ -z^* \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} \right) (-z^2 d\theta^2) + z^* z d\theta^2 \right\} > 0.$$

$$\operatorname{Re} \left\{ |z|^2 \left(z \frac{w''}{w'} + 1 \right) d\theta^2 \right\} > 0 \quad \therefore \operatorname{Re} \left(z \frac{w''}{w'} + 1 \right) > 0.$$

3. 星型性

定義 有界領域 $D_z \subset \mathbb{C}^n$ 上の双正則写像 $w = w(z)$ が星型とは $w = w(z)$ による D_z の像領域 $D_w = w(D_z)$ が原点に関

して、星型であるときにいう。すなわち、次が成り立つことである。 $0 < \arg\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}, w\right) < \frac{\pi}{2}$, $w \in \partial D_w$.

この定義のもとで次の定理を得る。

定理 D_z をなめらかな $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする。 $\varphi(z)$ を D_z の定義関数とする。 $\bar{D}_z$ 上の双正則写像 $w = w(z)$ が星型になるための必要十分条件は次が成り立つことである。

$$(12) \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} w \right\} > 0, \quad z \in \partial D_z.$$

証明 定義より,

$$\cos \arg\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w^*}, w\right) = \frac{\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} w\right)}{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial w^*}\right| |w|}.$$

$0 < \arg\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w^*}, w\right) < \frac{\pi}{2}$, $w \in \partial D_w$ なるためには,

(13) $\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} w\right) > 0$ が成り立つことが必要十分である。
しかるに, $\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}$. したがって, (13) は (12) となる。

系 単位球 $\{z \in \mathbb{C}^n \mid z^* z \leq 1\}$ 上の双正則写像 $w = w(z)$ が星型になるための必要十分条件は $z^* z = 1$ に対して, 次が成り立つことである。

$$\operatorname{Re} \left\{ z^* \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} w \right\} > 0$$

証明 $\varphi(z) = z^* z - 1$ だから $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = z^*$. したがって定理から直ちに系が従う。

注意 特に $n=1$ のとき, (12) は

$$\operatorname{Re} \left(\bar{z} \frac{w'}{w} \right) > 0 \quad \text{すなわち} \quad \operatorname{Re} \left(z \frac{w'}{w} \right) > 0 \quad \text{となる.}$$

これはよく知られた1変数における結果である。

References

- [1] T. Matsuno, On star-like theorems and convex-like theorems in the complex vector space, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku 5 (1955), 88-95.
- [2] T. A. Suffridge, The principle of subordination applied to functions of several variables, Pacific J. Math., 33 (1970), 241-248.