

モデ-7と Chow 群上の filtration

東大 教理 斎藤秀司

以下 $\mathcal{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の smooth projective varieties のカテゴリ-とする。 $X \in \mathcal{C}$ に対し $CH^r(X)$ を余次元 r の Chow 群, つまり X 上の余次元 r の代数的サイクルの有理同値類の群とする。 $CH^r(X)$ が代数幾何における重要な研究対象であることは言うまでもないであろう。さらに最近(といってもかなり以前より)は整数論においても欠く事のできない研究対象となっている。つまり X が数体上定義される時その L -函数の整数点での位数及いはその留数と $CH^r(X)$ の神秘的な関係に因し多くの興味深い研究がなされているのである。(例えば "Tate 予想

Bloch, Deligne, Beilinson, Bloch-Kato, Kato 等の仕事がある) このような重要性にもかかわらず $CH^r(X)$ の構造についてはつい最近まである特殊な場合を除いてはあまりよくわかっていなかった。というより 60 年代終わりに Mumford の示した定理は " $CH^r(X)$ ($r \geq 2$) は無秩序なものである" との印象を人々に与えた。ところが最近 Bloch-Beilinson による革新的な哲学が登場し Chow 群の研究が大変に見通しがよくなってきた。本稿ではこれについて簡単に解説していきたい。

以下 Abel 群 M に対し $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする。

§1 古典的な事実からの動機付けと Beilinson 予想

古くから知られている サイクルのコホモロジー類によって定まる サイクル写像

$$p_0^r : CH^r(X) \longrightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z})$$

を考えよう。コホモロジーの Hodge structure を考えてみると

p_0^r はもっと自然に

$$(1-1) \quad p_0^r : CH^r(X) \longrightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z}(r)) \cap H^{0,0}$$

と書き直せる。今

$$F^1 CH^r(X) = \text{Ker}(p_0^r)$$

とするとこれは homologically equivalent to zero (以下 $\sim_{\text{hom}} 0$)

なるサイクルの類よりなる部分群に他ならない。有名な Hodge

予想は

$$\text{Im}(p_0^r)_{\mathbb{Q}} = H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r)) \cap H^{0,0}$$

という事に他ならない。次に Griffiths の周期写像 c ([Gr1], [Bl-L, §2])

$$(1-2) \quad p_1^r : F^1 CH^r(X) \longrightarrow J^r(X)$$

を考えよう。ここは $J^r(X)$ は complex torus である

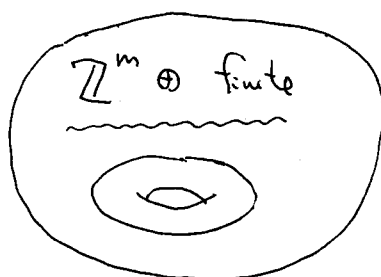
$$J^r(X) = H^{2r-1}(X, \mathbb{C}) / F_H^r + H^{2r-1}(X, \mathbb{Z}(r))$$

で与えられる。ここに F_H^r は Hodge filtration を表す。

ここでの古典的定理を思いだそう。

定理 (Abel-Jacobi) $r=1$ の時 P_1^r は同型。

かくも美しい定理を預えて P_1^r は Abel-Jacobi 写像とも呼ばれている。かくして $CH^1(X)$ は以下のように見えるいか



にもなじみ深いものであることが判明したわけである。

さて $CH^r(X)$ が $r \geq 2$ の場合にも同様になじみ深いものであって欲しいと思うのは人情であり実際はならくの間人々はそう信じていたのだが、この甘い憶測は次の Mumford の定理により無情にもコッパみじんに砕かれたのである。

定理 (Mumford) ^{x)} X を smooth projective surface/ $\mathbb{C}$ で

$P_g = \dim H^0(X, \Omega_X^2) \neq 0$ とする。この時 $\text{Ker}(P_1^2)$ は“巨大”である。

ここで“巨大”の意味をもう少し正確に定義しよう。今曲面 X 上の余次元 2 の Chow 群を考えているのだがこれは X 上の zero-cycle の有理同値類 $CH_0(X)$ に他ならない。又 ^{任意次元の X 上の zero-cycle} については $H^1 CH_0(X) = A_0(X) = \{\text{degree zero の cycle classes}\}$ なることが見てとれる。この時次の定義を導入する。

x) cf. [Mum-2]

定義 (1-3) $X \in \mathcal{C}$ (次元は任意) に対し

“ $A_0(X)$ は有限次元である”

ということはある必ずしも連結でない $\mathbb{C}$ 上の smooth projective curve C と morphism $f: C \rightarrow X$ が存在し

$f_*: A_0(C) \rightarrow A_0(X)$ が全射

ということを定義する。

Weak Lefschetz 定理を用いて ($n = \dim X$)

“ $A_0(X) \simeq J^n(X)$ ” ならば “ $A_0(X)$ は有限次元”

であることがわかる。さて先の Mumford の定理を正確に言うと

定理 (1-4) $X \in \mathcal{C}$, $\dim X = 2$ のとき

$A_0(X)$ は有限次元 $\Rightarrow H^0(X, \Omega_X^2) = 0$ //

つまり $H^0(X, \Omega_X^2) \neq 0$ なら $A_0(X)$ は次元 1 の X 内の部分多様体の中に押し込められる。

さて一般に

$$F^2 CH^r(X) = \text{Ker}(P_1^r: F^1 CH^r(X) \rightarrow J^r(X))$$

とある。Mumford の定理により一般に $F^2 CH^r(X)$ は自明でないとしてよいだろう。(実際一般に $F^2 CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0$ なる例はない最近まで Mumford の結果以外知られていなかった。)

そこで $F^2 CH^r(X)$ をいかたと考えようか? Mumford の定理はこれは Abel 多様体 (あるいはもう少し一般に complex torus) といふ幾何学的対象では一般に捉えられないことを

* $n = \dim X$ のとき $J^n(X) \simeq H^0(X, \Omega_X^1)^* / H_1(X, \mathbb{Z})$ は X の Albanese variety $\text{Alb}(X)$ に同型である。

意味している。しかしの間これは人々に一種の絶望感を与えていた。しかし以下の observation をしてみることにする。

HS を $\mathbb{Q}$ 上の Hodge structure のカテゴリ-

MHS を $\mathbb{Q}$ 上の mixed Hodge structure のカテゴリ-とする。

この時

$$\begin{aligned} \cdot H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r)) \cap H^{0,0} &= \text{Hom}_{\text{HS}}(\mathbb{Q}, H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r))) \\ &= \text{Ext}_{\text{MHS}}^0(\mathbb{Q}, H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r))) \\ \cdot J^r(X)_{\mathbb{Q}} &= \text{Ext}_{\text{MHS}}^1(\mathbb{Q}, H^{2r-1}(X, \mathbb{Q}(r))) \end{aligned}$$

最初の式は自明。次式は Carlson によって示された。これによつて次の事実が成り立たないかという naive な期待がする。

② $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ 上に descending filtration

$$\{F^{\nu} CH^r(X)_{\mathbb{Q}}\}_{\nu \geq 0}$$

が存在し $F^0 CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$, $F^1 CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$, $F^2 CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の通り。

そしてある自然な単射

$$P_{\nu}^r : Gr_F^{\nu} CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Ext}_{\text{MHS}}^{\nu}(\mathbb{Q}, H^{2r-\nu}(X, \mathbb{Q}(r)))$$

が存在するのでは?

(しかしこれは以下の Carlson の結果により アウト いうまに否定されてしまう)

定理 $\text{HS} \rightarrow (\text{Abel 群}) : H \mapsto \text{Ext}_{\text{MHS}}^1(\mathbb{Q}, H)$

左は functor だが右完全。よつて $\text{Ext}_{\text{MHS}}^{\nu}(\mathbb{Q}, H) = 0 \quad \nu \geq 2$ 。

(註) 実は MHS には injective object が十分にあるので上の statement は不正確なのだが、ここは感心を送るためにこう書いた。お許し下さい

上の Chow 群をホモロジ-代数に捉えようという発想は、スゴイという他はない。(Chow 群の定義からみてそれが Ext というホモロジ-代数的なものに捉えられるとは想像もつけない) しかしそんなスゴイことをするには mixed Hodge structure には少々役不足であったということなのだろうか? (この数行に書かれた内容に肉しては様々な方からのご非難、ご反論があるやもしれませんが前もってお詫びしておきます。)

そこで Beilinson は以下の革新的 idea を提出した。上の HS を M (Grothendieck の定義した pure motives のカテゴリー - (cf. [K1-2])) に置きかえ MHS を MM (これはまた誰と其の本当の姿を見たことのない mixed motives のカテゴリー - その存在は予想の段階) に置きかえれば同様の話しかうまく進行するのではないか? (Beilinson が キリスト教信者か否かは知らないが上の story は、世に突如として救済者が現われ衆生を救うという救済者思想に idea の起源があるのかもしれない。) もう少し正確に彼の予想を定式化してみよう。

予想(4-5)以下の性質を持つ カテゴリー- MM (category of mixed motives) がある

- (1) MM は Tannakian カテゴリー-^{*} (cf. [DMOS, II])
- (2) M を Grothendieck の定義した (homological equivalence に肉付) (pure) motives のカテゴリー-とする (cf. [K1-2])。 M は MM に subcategory として埋め込まれ、 MM の semi-simple object の全体と一致。

*) 簡単にはアーベル圏で ランサー積, inner Hom を持ち、体上のベクトル空間の $\otimes$ カテゴリー-に似たもの。

各 $X \in \mathcal{C}$ に対し

(3) $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ 上には descending filtration

$$\{F_M^{\nu} CH^r(X)_{\mathbb{Q}}\}_{\nu \geq 0}$$

が定まり 自然な同型

$$Gr_{F_M}^{\nu} CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \simeq Ext_{MM}^{\nu}(\mathbb{1}, h^{2r-\nu}(X)(r))$$

がある。ここに $\mathbb{1}$ は M の unit object (つまり tensor product に由 (unit))
 $h^{2r-\nu}(X)(r) \in M$ は X に付随する $\wedge$ (pure) motive.
あり

§2. Beilinson の予想の言い換え:

さて Beilinson の予想も述べたわけであるが、このままだけは
 どうもスッキリしない。また誰も想像もしたことの無い、ありもし
 ない mixed motives があってと言われても、ハア、それだ?
 という感じである。凡人が旧約聖書の一節を引き合いに出さ
 れて説教を受けても今ひとつ心には直接伝わらないのではない
 だろうか? そこで (1-5) を凡人にもある程度納得できる形に
 言い換える必要があるだろう。それを以下に書く。

定義 $\mathcal{C}$ 上の filtration $F^{\bullet} CH^*$ とは 各 $X \in \mathcal{C}$ と 各 $r \geq 0$ に対
 し $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ 上の descending filtration $\{F^{\nu} CH^r(X)_{\mathbb{Q}}\}_{\nu \geq 0}$ が
 与えられていることをいう。

予想 (2-1) $\mathcal{C}$ 上の filtration $F^\bullet CH^*$ を次の条件 (BB0) ~ (BB3) を満たすものが少くとも一つは存在する。

$$(BB0) \quad \forall X \in \mathcal{C} \quad \forall r \geq 0 \quad \text{に対し} \quad F^0 CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$$

(BB1) $F^\bullet CH^*$ は代数対応で保たれる。言い換えると次の条件が満たされる。 $\forall W, X \in \mathcal{C}$ と $\forall \Gamma \in CH^0(W \times X)_{\mathbb{Q}}$ に対し

$$\Gamma_* (F^\nu CH^s(W)_{\mathbb{Q}}) \subset F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \quad \forall \nu \geq 0.$$

$$= 2 \text{ かつ } 8 + s - \dim W = r \text{ かつ}$$

$$\Gamma_* : CH^s(W)_{\mathbb{Q}} \rightarrow CH^r(X)_{\mathbb{Q}} ; d \mapsto (pr_X)_* (cpr_W^* d) \cdot \Gamma).$$

$$\text{上で} \quad Gr_F^\nu \Gamma_* : Gr_F^\nu CH^s(W)_{\mathbb{Q}} \rightarrow Gr_F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$$

を各 Graded piece 上に誘導される写像とする。

(BB2) 上の仮定の下。

$$\varphi_{\Gamma}^{2r-\nu} : H^{2s-\nu}(W, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2r-\nu}(X, \mathbb{Q})$$

を Γ が代数対応としてコホモロジー群上に誘導する写像とする。

$$\text{この時} \quad \varphi_{\Gamma}^{2r-\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad Gr_F^\nu \Gamma_* = 0$$

(BB3) $F^\bullet CH^*$ は discrete。つまり $\forall X \in \mathcal{C}; \forall r \geq 0$ に対し

$N > 0$ を十分大にすれば

$$F^N CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = 0$$

重要なポイントは3つある。第1に (1-5) は (2-1) を直ちに導くということ。第2に (2-1) では motive とか mixed motive とかいった“専門用語”は全て排除=以代数対応といた、ごく普通の“日常用語”によ、て述べられている。さうと重要なのは 条件 (BB0)~(BB3) が F^*CH^* をユニークに特徴付けし、まうという結果 (以下に述べる cf (3-2)) が示せるという事である。話しを進めるために以下の定義を導入する。

定義 (2-2) 上の filtration F^*CH^* が Bloch-Beilinson type (略し FBBT とかく) とは (2-1) の (BB0), (BB1), (BB2) を満たす時をいう。この時 各 $X \in \mathcal{C}$, $r \geq 0$ に対し

$$D_F^r(X) = \bigcap_{\nu \geq 0} F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}},$$

$$CH_F^r(X) = CH^r(X)_{\mathbb{Q}} / D_F^r(X)$$

とかく。 $D_F^r(X)$ ($X \in \mathcal{C}$, $r \geq 0$) は $\mathbb{Q}$ 上の smooth projective varieties 上の代数的サイクル ($\mathbb{Q}$ -linear) 上のある equivalence relation を定めていると見れる。これを D_F -equivalence relation と呼ぶ。

上の定義によれば (2-1) は以下のように言いかえす。

予想 (2-3) ある $\mathcal{C}$ 上の FBBT, $F_M^*CH^*$ が存在して D_{F_M} -equivalence と rational equivalence が一致する。

定義 (3-1) $\mathcal{C}$ 上の FBBT (cf (2-2)), $F_B^\bullet CH^*$ を以下のよう
に帰納的に定義する。

- (1) $\forall X \in \mathcal{C}, \forall r$ に対し $F_B^0 CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$
 (2) $\nu \geq 0$ を整数とし, $\forall V \in \mathcal{C}, \forall s \geq 0$ に対し $F_B^\nu CH^s(V)_{\mathbb{Q}}$ が定
義されたとする。この時

$$F_B^{\nu+1} CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = \sum_{V, g, \Gamma} \text{Im}(\Gamma_* : F_B^\nu CH^{r+d_V-g}(V)_{\mathbb{Q}} \rightarrow CH^r(X)_{\mathbb{Q}})$$

と定義する。ここに V, g, Γ は以下の通り。

- (a) $V \in \mathcal{C}$ of dimension d_V
 (b) g 整数, $r \leq g \leq r + d_V$
 (c) $\Gamma \in CH^g(V \times X)_{\mathbb{Q}}$ 且 $\varphi_{\Gamma}^{2r-\nu} = 0$ (cf. (2-1) (BB2))
 $\times \Gamma_*$ は (2-1) (BB1) の通りとする。

上の定義から $F_B^\bullet CH^*$ が FBBT を与えている事はすぐわかる。

§3 始めの (1) に因する結果を述べよう, $X \in \mathcal{C}$ に対し

$$[\Delta_X] = \sum_{i=1}^{2d} \pi_X^i, \quad \pi_X^i \in H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X, \mathbb{Q})$$

を diagonal $\Delta_X \subset X \times X$ のコホモロジー類の Künneth 分解とする。

次の条件を考える

$C(X)$: 各 π_X^i は $\mathbb{Q}$ -algebraic, つまり $\exists \Delta_X^i \in CH^d(X \times X)_{\mathbb{Q}}$ があ.
 Δ_X^i のコホモロジー類が π_X^i を与える。

$C(X)$ は一般に成り立つと予想されている (cf [K1-17]), 実際 $X \times X$ に対する Hodge 予想から従う。又次の場合には成り立つことは知られている。

- (a) $\dim X \leq 2$
- (b) X は $\mathbb{P}^N$ 内の complete intersection
- (c) X は Abel 多様体
- (d) X は linear variety

定理 (3-2) $C(X)$ が $\forall X \in \mathcal{C}$ に対し成り立つと仮定する。この時予想 (2-1) は次の予想 (3-3) と同値。又それらが正しいとすると $F_B^* CH^*(X)$ は (BB0) ~ (BB3) を満たすただ一つの Filtration.

予想 (3-3) D_{F_B} -equivalence = rational equivalence

こゝに左辺は $D_{F_B}^r(X) = \bigcup_{\nu \geq 0} F_B^\nu CH^r(X) \quad (X \in \mathcal{C}, r \geq 0)$

により定まる equivalence relation.

次に §3.4 の (2) に関する決果を述べる。前に述べたように $F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$, $\nu \geq 2$ にはもはや一般には幾何学的構造が入らないのであるから「次元」といった概念は通用しない。その替りに「rank」という概念を以下に導入して、その「巨大小」を測ることにする。後にも述べるがこれは (1-3) の自然な一般化になっている。

定義 (3-4)

$X \in \mathcal{C}$, $\dim X = n$ に対し $A^r(X) \subset CH^r(X)$ を algebraic equivalent
to zero なるサイクル類たちによる部分群とし $A_m(X) = A^r(X)$
とかく。ただし $m+r=n=\dim X$ 。今任意の subspace $\Xi \subset CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$
が与えられた時 " $A^r(X)$ の modulo Ξ の rank" と呼ばれる整数

$$0 \leq r(A^r(X) \bmod \Xi) \leq r$$

を以下に定義する。まず $r(A^r(X) \bmod \Xi) = 0$ というのを

$$\dim_{\mathbb{Q}} (A^r(X)_{\mathbb{Q}} / A^r(X)_{\mathbb{Q}} \cap \Xi) < \infty$$

なる時と定義。そうでない場合、それを以下の条件を満たす
最小の自然数 $\mu \geq 1$ として定義する。 (cf. $m+r=n=\dim X$)

(条件): (必ずしも連結でない) smooth projective Y で $\dim Y \leq m+\mu$
なるもの π と morphism $f: Y \rightarrow X$ があ、2次が成立。

$$A^r(X)_{\mathbb{Q}} \subset \Xi + \text{Im}(f_*: A_m(Y)_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_m(X)_{\mathbb{Q}}). \quad *)$$

特に $\Xi=0$ の時簡単に $r(A^r(X) \bmod \Xi) = r(A^r(X))$ とかく。

定義より直ちに

$$r(A_0(X)) \leq 1 \Leftrightarrow A_0(X) \text{ は有限次元 (cf (1-3))}$$

又 $P^r: A^r(X) \rightarrow J^r(X)$ を Griffiths の周期写像とした時

$$\text{Ker}(P^r)_{\mathbb{Q}} \subset \Xi \Rightarrow r(A^r(X) \bmod \Xi) \leq 1$$

一言でいえば $r(A^r(X) \bmod \Xi)$ は $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}/\Xi$ 内で alg. equiv.
to zero なるサイクル類を生成する subspace の大きさを測る量で、

$CH^r(X)_{\mathbb{Q}}/\Xi$ が幾何学的になじみ深いものなる、という事。

$r(A^r(X) \bmod \Xi) \leq 1$ である、という事はないわけではない。

*) 既に述べて $A^r(X)_{\mathbb{Q}}$ は modulo Ξ で次元 $\leq m+\mu$ の部分多様体の中へ押し込める。

$$A_m(X)_{\mathbb{Q}}$$

$X \in \mathcal{C}$ に対し $N_H^p H^i(X, \mathbb{Q}) \subseteq H^i(X, \mathbb{Q}) \cap F_H^p H^i(X, \mathbb{Q})$ の
 の maximal sub-Hodge structure とする. これは F_H^p は Hodge
 filtration.

定理 (3-5) $W, X \in \mathcal{C}$ $\Gamma \in CH^r(W \times X)_{\mathbb{Q}}$ とし

$$\varphi_{\Gamma}^{2r-\nu} : H^{2d-\nu}(W, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2r-\nu}(X, \mathbb{Q})$$

を Γ が生成する元として誘導する写像とする. これは $d = \dim W$, ν は
 $r \geq \nu \geq 0$ なる整数. 今

$$Z_m(\varphi_{\Gamma}^{2r-\nu}) \not\subseteq N_H^{r-\nu+1} H^{2r-\nu}(X, \mathbb{Q})$$

と仮定するならば

$$r(A^r(X) \bmod F_B^{\nu+1} CH^r(X)_{\mathbb{Q}}) \geq \nu$$

$$(\text{特に } r(A^r(X) \bmod D_{F_B}^r(X)) \geq \nu)$$

(*)

(3-5) を使えば $CH_{F_B}^r(X) = CH^r(X)_{\mathbb{Q}} / D_{F_B}^r(X)$ が “巨大” なる
 いくつかの例が構成できる.

(a) (zero-cycle の場合) $0 \leq \nu \leq n = \dim X$ に対し

$$H^0(X, \mathbb{Q}_X^{\nu}) \neq 0 \Rightarrow r(A_0(X) \bmod D_{F_B}^{\nu}(X)) \geq \nu$$

これは (3-5) で $W = X$, $\Gamma = \Delta_X$ diagonal とすることに依り

直ちに得られる. (a) は Mumford 定理の一般化であることに注意.

実際彼の定理を言いかえれば, $\dim X = 2$ の場合 (cf. (1-4))

$$H^0(X, \mathbb{Q}_X^2) \neq 0 \Rightarrow r(A_0(X)) \geq 2 \quad \square$$

(*) (3-5) の証明には一切説明(ないか) 使用する理論として

Weak and Hard Lefschetz theorem

Hodge 理論, 特に Hodge-Riemann bilinear relations

がある.

(b) X を $\mathbb{C}$ 上の Abel 多様体とすると $0 \leq r \leq \dim X$ に対し

$$r(A^r(X) \bmod D_{F_0}^r(X)) = r$$

これは Abel 多様体に対しては Lieberman により示されている

Hard Lefschetz 予想 (cf. [K1-1]) を使って (3-5) より導かれる

(c) $X \subset \mathbb{P}^N$ を complete intersection で $\dim X = n \geq 4$ とする。今

$$H^0(X, \Omega_X^n) = 0 \quad \text{かつ} \quad H^1(X, \Omega_X^{n-1}) \neq 0$$

と仮定すると

$$r(A^{n-1}(X) \bmod D_{F_0}^{n-1}(X)) \geq n-2$$

これは X 上にのっている $\mathbb{P}^N$ 内の line たちを modulo する Fano 多様体の理論を使い (3-5) より導かれる。

§4. 応用編

さて §3 の結果により代数的サイクルを modulo D_{F_0} -equivalence で考えてもかなり巨大な部分を取っていることがわかった。又もし Beilinson 予想が正しいならばそれは有理同値に等しいことも見た。我々のアプローチの利点は一方代数的サイクルを modulo D_{F_0} -equiv で考えると今まで全く手の届かなかった種々の予想、問題が実際解けてしまうところにある。言いかえれば、今まで一見には肉連性のなかった Chow 群に対するいくつかの予想が Beilinson 予想 (2-1) よりまとめて従うという点もよい。あるいはこれは予想 (2-1) よりそれと同値な (3-3) を解くのはとても難しいだろうということを予言している

さてここではその応用のうち 2 つを特に述べる。以下の結果は特に $F_0 CH^*$ でなくとも一般の FBDT, $F^* CH^*$ で次の条件 (DB) を満たすものについて成立するのと同じような $F^* CH^*$ をいって選んで話を進める。

(*) D_F -equivalence は homological equivalence より細かい。

まず最初に Chow 群に対する Hard Lefschetz isomorphism と primitive decomposition について。今 $X \in \mathcal{C}$ に対しその上の ample line bundle $\mathcal{L}$ を固定し $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_\mathbb{C}(X) \simeq CH^1(X)$ をその類とする。整数 $r, t \geq 0$ に対し次の写像を考える。

$$\Lambda_{\mathcal{L}}^t : CH^r(X) \rightarrow CH^{r+t}(X) ; \omega \mapsto \omega \cdot \mathcal{L}^t.$$

$F^* CH^*$ に対する性質 (DB1) には $\Lambda_{\mathcal{L}}^t$ は各 $r \geq 0$ に対し

$$G_F^\nu \Lambda_{\mathcal{L}}^t : G_F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow G_F^\nu CH^{r+t}(X)_{\mathbb{Q}}$$

を誘導する。今 $2r - \nu \leq d = \dim X$ のとき

$$\mathcal{P} G_F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = \text{Ker}(G_F^\nu \Lambda_{\mathcal{L}}^{d-r-2r+1})$$

とある。

定理 (4-1) $X \in \mathcal{C}$ of dimension d Hard Lefschetz 予想 $B(X)$ が成立するとする。 $B(X)$ には t が長くなるのと同様 (あるいは $C(X)$ と同様 $X \times X$ に対する Hodge 予想より) 従い、又 $C(X)$ が成立すると仮定した例にかた $B(X)$ は成立するとは知られている (実際 $B(X)$ が $C(X)$ を導くとは知られている (cf [K]-17).)

(1) $2r - \nu \leq d$ の時 $G_{r,F}^\nu \wedge_x^{d-2r+\nu}$ は同型。

(2) $S = \max \{0, 2r - \nu - d\}$ とした時 自然な同型がある

$$G_{r,F}^\nu \text{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}} \subset \bigoplus_{\substack{R \in \mathbb{Z} \\ R \geq \frac{\nu}{2}}} (G_{r,F}^\nu \wedge_x^R) (PG_{r,F}^\nu \text{CH}^{r-R}(X)_{\mathbb{Q}}).$$

$X \in \mathcal{C}$ が与えられた時 X 上の異なる余次元の Chow 群の subquotient 同士に 同型があるというのは Bloch [B1-2] により既に予想されていた。

次に line bundle についてはよく知られている Theorem of cube を一般の余次元の Chow 群に拡張してみよう。(この予想は以前より立っていた) modulo D_F -equiv Chow 群については

定理(4-2) $1 \leq \nu \leq n$ に対し $X_\nu \in \mathcal{C}$, $x_\nu \in X_\nu$ を固定した基点とする。今 $C(X_\nu)$ が成立するとする。(例えば X_ν abelian 多様体)

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

$$Z_\nu = X_1 \times \cdots \times \{x_\nu\} \times \cdots \times X_n$$

とし $i_\nu : Z_\nu \hookrightarrow X$ を inclusion とする。今 $2r - s < n$ とする

$$\{i_\nu^*\}_{1 \leq \nu \leq n} : G_{r,F}^s \text{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bigoplus_{\nu=1}^n G_{r,F}^s \text{CH}^r(Z_\nu)_{\mathbb{Q}} \quad (\text{cf. (2-2)})$$

は単射。特に $2r < n$ とする

$$\{i_\nu^*\}_{1 \leq \nu \leq n} : \text{CH}_F^r(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bigoplus_{\nu=1}^n \text{CH}_F^r(Z_\nu)_{\mathbb{Q}} \quad (\text{cf. (2-2)})$$

は単射。つまり X 上の代数的サイクル $\alpha \in \text{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}}$ はその $\mathbb{Z}_\ell$ への制限 $\alpha|_{\mathbb{Z}_\ell} \in \text{CH}^r(\mathbb{Z}_\ell)_{\mathbb{Q}}$ が各 ℓ について D_F -equivalent to zero の時、又その時に限り、 α は D_F -equivalent to zero. $\square$

$r=1$ の場合 $d_{F\mathbb{B}}^1(X)=0$ が示せるので (4-2) のこの特別な場合は古典的な line bundle に対する theorem of cube に当たる (cf. [Mum-1, § 6])。

REFERENCES

- [Bl-1] S. Bloch, "Lectures on Algebraic Cycles," Duke Univ. Math. Series, Durham, 1980.
- [Bl-2] S. Bloch, *Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties*, Invent. Math. **37** (1976), 215-228.
- [DMOS] P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K. Shih, *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math. **900** (1982).
- [Gri] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals: I and II*, Ann. of Math. **90** (1969).
- [Kl-1] S.L. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, Dix Exposes sur La Cohomologie des Schemas (1968), North-Holland.
- [Kl-2] S.L. Kleiman, *Motives*, In: Algebraic Geometry, Oslo 1970, Wolters-Noordhoff, Groningen.
- [Mum-1] D. Mumford, "Abelian Varieties," Tata Institute Studies in Math., Oxford Univ. Press, 1970/1974/1985.
- [Mum-2] D. Mumford, *Rational equivalence of 0-cycles on surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **9** (1969), 195-204.
- [Sa-1] S. Saito, *Motives and filtrations on Chow groups*, Preprint (revised).
- [Sa-2] S. Saito, *Remarks on algebraic cycles*, Preprint.