

確率微分方程式と微分同相写像

阪大 理学部 池田信行

1. 序. なめらかな多様体上の確率微分方程式は係数を
 与えるベクトル場とラングリアス力を与える semi-martingale の
 組によって定まる。その解は初期条件とその semi-martingale
 を変数とする汎関数になる。解の定める拡散過程の測度は良
 く研究されているが、近年汎関数そのものの構造が注目され
 て来ている。その考察から対応する拡散過程について一歩進
 んだ研究が進められている。ここではこれらについて、2,
 3の注意を与えるのが目的である。

2. 確率微分方程式とリー代数. M は σ -compact, connected
 な d 次元 C^∞ 多様体で、 $A_1, A_2, \dots, A_m$ は M 上の完備な C^∞
 なベクトル場とする。 $[0, \infty) \rightarrow M$ なる連続写像 w の作る
 空間を $W(M)$ とする。同様に $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ なる連続写像 w の
 作る空間を W^m とする。これは通常の距離で完備可分な距離

空間になる。 W^m の位相的 σ -field を $\mathcal{F}$ とし、確率 P は $\{W^m, \mathcal{F}\}$ 上の Wiener 測度とする。確率空間 $\{W^m, \mathcal{F}, P\}$ 上で確率微分方程式

$$(1) \quad dx_t = \sum_{j=1}^m A_j \circ dw_t^j$$

を考へる。この意味は M 上の任意の C^∞ 関数 f に対して

$$(2) \quad df(x_t) = \sum_{j=1}^m (A_j f)(x_t) \circ dw_t^j$$

が成立する $\Leftrightarrow$ である。 $\Rightarrow$ は Stratonovich の対称な確率微分を表わす。任意の $x \in M$ を初期条件とする (1) の解 $x(t, w; x)$ が存在する $\Leftrightarrow$ が知られている。事情を簡単にするために $\Leftarrow$ の仮定が常に成立するとする。

仮定 1. 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $x(t, w; x) \in M$ 。つまり $[t \mapsto x(t, w; x)] \in W(M)$ とする。

注意。一般の M の場合にはこの仮定 1. が与えられる条件を $A_1, A_2, \dots, A_m$ の言葉で具体的に表わすのは必ずしも簡単ではない。しかし多くの場合充分条件が知られている。

P に関し殆んどすべての w に対して事後

$$(3) \quad W^m \ni w \longmapsto x(t, w; x) \in M$$

$$(4) \quad W^m \ni w \longmapsto [t \longmapsto X(t, w; x)] \in W(M)$$

$$(5) \quad M \ni x \longmapsto X(t, w; x) \in M$$

が定まるが、 $\Rightarrow$ は (4), (5) の写像に特に注目する。最も簡単なのは次の例の場合である。 $\Rightarrow$ $\mathcal{G} = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ は $A_1, A_2, \dots, A_m$ の生成するリー代数とする。

例. 2.1. (Doss [2]). $M = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{G}$ が Abelian の場合。いま

き

$$A_i = \sum_{j=1}^d A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

とおけば全微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial \beta^i} h^j(\alpha, \beta) = A_i^j(h(\alpha, \beta)), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq d, \\ \alpha \in \mathbb{R}^d, \quad \beta \in \mathbb{R}^m$$

が完全積分可能になり、

$$X(t, w; x) = h(x, w_t)$$

となる。 $\Rightarrow$ より (4), (5) の写像の $\Rightarrow$ の場合の性質が容易にわかる。例えば (4) の写像は W^m の連続写像になっている。

(4) の写像の W^m 上の連続性は一般に成立しないことは、McShane [5] によって指摘されている。その事情は次の例で知ることも出来る。

例. 2.2. (McShane [5], Gaveau [5]). Heisenberg 群の場合。 $H_{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ の座標を $(z, \eta) = (z^1, z^2, \dots, z^n, \eta)$, $z^j = x^j + i y^j$ とし、

積を $(z, \eta)(z', \eta') = (z+z', \eta+\eta' + 2\text{Im} \sum_{j=1}^n z^j \bar{z}'^j)$ を定めると, 2-step の中零群になる。この時不変なベクトル場

$$(b) \quad A_{2j+1} = \frac{\partial}{\partial x^j} + 2y^j \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad A_{2j} = \frac{\partial}{\partial y^j} - 2x^j \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad j=1, 2, \dots, n$$

が得られる。この $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ に対する方程式 (1) ($m=2n$) の解はつぎの形で与えられる。

$$X^i(t, w; 0) = w_t^i, \quad i=1, 2, \dots, 2n, \quad X^{2n+1}(t, w; 0) = 4 \sum_{j=1}^n S_t^{2j+1, 2j}(w)$$

$$(7) \quad S_t^{2j+1, 2j}(w) = \frac{1}{2} \int_0^t (w_s^{2j} \circ dw_s^{2j+1} - w_s^{2j+1} \circ dw_s^{2j})$$

この $S_t^{2j+1, 2j}(w)$ は (w_s^{2j+1}, w_s^{2j}) , $0 \leq s \leq t$, より定まる確率積分と呼ばれ, W^m 上で連続である。この証明については例えば Ikeda-Nakao-Yamato [7] 参照。

これらの例は写像 (4) や (5) の考察に $\mathcal{G}$ の代数的性質が重要な役割を持つことを示している。この考えを推進するのは役に立つのは例 [48] によつて具体的に指摘された次の事実である。いま connected リー群 G が M 上に変換群として effective に作用しているとする。 G の右不変ベクトル場の生成するリー代数 $\mathcal{G}$ に対応して M 上のベクトル場の生成するリー代数 $\mathcal{G}$ が自然に対応する。これは $\mathcal{G}$ の元 X に対応して M 上の 1 変数変換群が定まるので、これは M

上のベクトル場 A が定まる。この対応で $\tilde{g}$ と g の間の同型が得られる。いま $A_1, A_2, \dots, A_m \in g$ に対応して, $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m \in \tilde{g}$ が対応しているとする。このとき

(I) G 上の確率微分方程式,

$$(8) \quad dg_t = \sum_{i=1}^m \tilde{A}_i \circ dw_t^i, \quad g_0 = e$$

(II) M 上の確率微分方程式,

$$(9) \quad dx_t = \sum_{i=1}^m A_i \circ dw_t^i, \quad x_0 = x$$

を考へる。この二つの方程式の解について

命題。1。(皇川 [18])。殆んどすべての w に対して, t を固定すれば写像

$$(10) \quad M \ni x \longmapsto X(t, w; x) \in M$$

が M の微分同相写像になっている。さらにこれは (8) の解 $g(t, w)$ である。すなわち

$$(11) \quad X(t, w; x) = g(t, w)x$$

と表す。

この方程式 (1) を考へる時, もし

仮定。2. $g = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_{2m})$ が有階元,

が満たされているならばリー群論の結果より, 先に述べた形

のリー群が存在することを知ることが出来る。したがって命題 1 が使えることになり、確率微分方程式 (1) の構造はリー群上の確率微分方程式で決定されることになり、さらに (8) の形の解より定まる拡散過程は群上で定義された加法過程になっていることも知られている (McKean [4] 参照)。

注意。このように多様体上の確率微分方程式を微分同相写像の値をとる確率微分方程式に帰着して考察する試みは、仮定 2 が満たされる場合にも、たとえば M が compact の時は Elworthy [3] によって行われている。ここで微分同相写像の全体が写像の合成によって作る群を用いている。

このようにして、仮定 2 の下ではリー群上の確率微分方程式の考察が基本であることがわかったが、その時々の群が有効に使える。

connected なリー群 G_1, G_2 があり、 G_1 は simply connected とする。さらに $G_i, i=1, 2$ の右不変なベクトル場の生成するリー代数を $\mathfrak{g}_i, i=1, 2$ とする。いま $\alpha: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ なる準同型が存在するとする。その時準同型 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ で $\varphi_* = \alpha$ とするものが存在する。いま確率微分方程式

$$(12) \quad dx_t = \sum_{i=1}^m A_i \circ dw_t^i, \quad A_i \in \mathfrak{g}_1, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$(13) \quad dY_t = \sum_{i=1}^m \alpha(A_i) \circ dw_t^i$$

をえられ G_1, G_2 上で成り立つとき、つぎのことが成り立つ。

命題. 2. $x \in G_1$ なる値に $i \in \mathbb{N}$, $X_0 = x$ とおいた (12) の解を $X(t, w; x)$, $y \in G_2$ に $i \in \mathbb{N}$, $Y_0 = y$ なる (13) の解を $Y(t, w; y)$ とする、このとき

$$(14) \quad Y(t, w; \varphi(x)) = \varphi(X(t, w; x)).$$

この事実より、リー群 G しか simply connected の場合には成り立つ本質的には構造が定まってしまうことがわかる。

3. 中零なリー代数の場合。仮定 2 が満たされる典型的な場合が中零の場合である。しかも simply connected の場合も成り立つ。すなわち、 m 生成元の p -step 自由中零リー代数 $\mathcal{L}_{m,p}$ の場合を任意の $p \in \mathbb{N}$ として成り立つ。 (この極限については Jacobson [8], Rothschild-Stein [17] 等参照)。通常のリー群論と話を進めるためにはリー代数はリー群の左不変なベクトル場より生成されるように、この節では成り立つ。

この時

$$(15) \quad \mathcal{L}_{m,p} = \sum_{i=1}^p \oplus V^i$$

$\Rightarrow$ V^1 の基を $A_1, A_2, \dots, A_m$ とし、各 V^i は

$$[A_{j_1} [A_{j_2} \dots [A_{j_{i-1}}, A_{j_i}] \dots]] , \quad j_1, j_2, \dots, j_i = 1, 2, \dots, m$$

で生成される。 $N_{m,p}$ はリー代数 $\mathcal{N}_{m,p}$ を持つ simply connected な connected リー群とし、 $\mathcal{Z}$ の上には確率微分方程式

$$(16) \quad dg_t = \sum_{i=1}^m A_i(g(t)) \cdot dw_t^i$$

を考へる。この解については $p=2$ の時 Gaveau [5] により、一般の p については Yamato [20] により詳細に考察されている。 $\mathcal{Z}$ についてはいま述べた方針によれば次の形になる。

$$E = \{i_1, i_2, \dots, i_a\}, \quad E[1, \infty) = \{(i_1, \dots, i_a); i_1, \dots, i_a \in E, 1 \leq a < \infty\}$$

$E[1, p] = \{(i_1, i_2, \dots, i_a) \in E[1, \infty); 1 \leq a \leq p\}$, (A_E, τ) は E の生成する自由代数, $(\mathcal{L}_E, \tau')$ は E の生成する自由リー代数とする。

$$E[1, \infty) \ni I = (i_1, i_2, \dots, i_a) \text{ に対し } [I] \in \mathcal{L}_E \text{ と}$$

$$(17) \quad [i_1 i_2 \dots i_a] = [[i_1 i_2 \dots i_{a-1}], i_a], \quad [i] = i \in E$$

で定める。 $[I]$, $I \in E[1, p]$ の生成する $\mathcal{L}_E$ の部分空間を $\mathcal{L}_{E[1, p]}$

とする。この時 $S \subset E[1, p]$ で $\{[I], I \in S\}$ が $\mathcal{L}_{E[1, p]}$ の基となるものか少くとも一つとれる、つまり $I = (i_1, \dots, i_a) \in E[1, \infty)$ に対す

し

$$A_{[I]} = [\dots [[A_{i_1}, A_{i_2}] \dots] A_{i_a}]$$

とおけば、

$$(18) \quad \mathbb{R}^{\#S} \ni \{u^{[I]}; I \in S\} \longrightarrow \exp \left\{ \sum_{I \in S} u^{[I]} A_{[I]} \right\} \in N_{m,p}$$

により $N_{m,p}$ に座標が定まる。この座標を用いて、(16)

の解 $g_t(w)$ は $g_t(w) = (\xi_t^{[I]}; I \in S) \in \mathbb{R}^{\#S}$ と表わす

14"

$$(19) \quad d\zeta_t^{[I]} = \sum_{k=1}^p \sum_{\substack{I_1, \dots, I_{k-1} \in S \\ |I_1| + \dots + |I_{k-1}| = |I|-1}} K^{[I]}(k, i; [I_1], \dots, [I_{k-1}]) \zeta_t^{[I_1]} \dots \zeta_t^{[I_{k-1}]} dw_t^i$$

が成立する。ここで $|I|$ は $I \in S$ の表す要素の。また係数 $K^{[I]}(k, i; [I_1], \dots, [I_{k-1}])$ は Campbell-Hausdorff の公式を用いて具体的に決定される定数である。よって、 $\{\zeta_t^{[I]}; |I| \leq \delta\}$ がわかると、これらの積の確率積分の一次結合として、 $\zeta_t^{[I]}$, $|I| = \delta+1$ が求まる。また $\mathcal{G}$ が step p の中階リ-代数で対応するリ-群を G とする。この時は準同型 $\alpha: \mathcal{M}_{m,p} \rightarrow \mathcal{G}$, 準同型 $\varphi: \mathcal{M}_{m,p} \rightarrow G$, $\varphi_* = \alpha$ により

$$(20) \quad \varphi\left(\exp\left\{\sum_{I \in S} \zeta_t^{[I]} A_{[I]}\right\}\right) = \exp\left\{\sum_{I \in S} \zeta_t^{[I]} A_{\alpha([I])}\right\}$$

となるので、2節の命題2を用いると $\mathcal{G}$ に対応する確率微分方程式の解は $\mathcal{M}_{m,p}$ の場合の解よりきわめて単純な方法で得られる。

特に $p=2$ のときは $S = \{1, 2, \dots, m, (1,2), (1,3), \dots, (1,m), (2,3), (2,4), \dots, (2,m), \dots, (m-1,m)\}$ にとると加えられるので、

$$(21) \quad \begin{aligned} d\zeta_t^{[J]} &= dw_t^J, \quad |J|=1 \text{ のとき} \\ d\zeta_t^{[J]} &= \frac{1}{2} (w_t^i \circ dw_t^j - w_t^j \circ dw_t^i), \quad J=(i,j) \text{ のとき,} \end{aligned}$$

となり, Gaveau [5] の結果が得られる。Heisenberg 群の時の例 2.2 に述べたことは, (20), (21) より容易に導かれる。

また Kaplan [9] は 2-step 中階で 2 次形式に閉じて定まるリー代数のあるクラスについて, 対応するラプラス作用素の基本解を求めているが, この場合も (20), (21) を用いて確率微分方程式によって考察することが出来る。逆に解の持つべき性質によって, Kaplan が考えたクラスを特徴づけることも出来る。

注意。重川 [8], 国田 [10] で論じられている解の分解に関する公式を用いると, 仮定 2 の下でもっと一般の場合の考察が出来る。たとえば国田 [10] は g が可解の場合を論じている。

4. 近似論, $g = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ が有限次元の時はこれまで述べたように, リー群上の確率微分方程式の解により, 微分同相写像の値をとる加法過程に帰着された。しかるものの構造も具体的に説明されることが多い。この内容を g が有限次元でない時に研究することは興味深いことである。既に述べたように Elworthy [3] はその一つの方法を提供している。M がコンパクトな時は大森 [6] が研究している ([4] 参照)。とくにこの問題を系統的に追求しているのは Malliavin [2], たとえば [27, 13] 等で考察されている。彼の考えは確率微分方

程式 (1) でブラウン運動 W を適当に近似した W_n でおきか
 え常微分方程式系を得ることを基礎にしている。この近似 W_n
 に対応する方程式の解 $X_n(t, W, x)$ は近似が全く一般では $X(t, W, x)$
 に収束しないことは既に述べたが、適当な近似をすれば収束
 することは知られている。しかも近似の段階で目的の性質を
 示すことは比較的容易に出来る。たとえば $X_n(t, W, x)$ の持つこ
 いろ性質の極限移行として $X(t, W, x)$ の性質を示そうとするの
 が Malliavin [12] [13] の方法である。 $M = \mathbb{R}^d$ の場合には、こ
 の Malliavin の考えに詳細な証明が Ikeda-Watanabe [6] でな
 されている。たとえば $M = \mathbb{R}^d$ とし、例えば $A_1, A_2, \dots, A_n$
 の係数が 1 次の増大度で、すべての次数の偏微分が有界の時
 に、任意に ε を固定すると、 $a.a.w(P)$ に対して

$$(22) \quad \mathbb{R}^d \ni x \longmapsto X(t, W, x) \in \mathbb{R}^d$$

が微分同相写像になることを示している。最近 Bismit [7] は
 $a.a.w(P)$ に対して、任意の t に対して (22) が微分同相写
 像になることを上の結果より導く方法を述べている。

78 お Ikeda-Watanabe [6] で示した近似の方法による時は、
 単に収束を示すだけでなく、特定の性質が保存されるような
 収束であることを示す必要がある。そのために近似について
 の結果について新たな考察をすることが必要である。たと

2 は

$$(23) \quad W_n(t) = n \left[\left(\frac{j+1}{n} - t \right) w\left(\frac{j}{n}\right) + \left(t - \frac{j}{n} \right) w\left(\frac{j+1}{n}\right) \right], \quad \frac{j}{n} \leq t \leq \frac{j+1}{n}$$

に 対し 2,

$$(24) \quad \frac{dX_n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^m A_i(X_n(t)) \frac{dW_n^i(t)}{dt}$$

の解で初期条件 x のものは $X_n(t, w; x)$ とする。そのとき、
任意に固定し $T = T$ と N に 対し 2

$$(25) \quad \sup_{|x| \leq N} \sup_n E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|D^\alpha X_n(t, w; x)\|^p \right] < \infty, \quad p \geq 2$$

を示す必要がある。ここで D^α は multi-index α に関する偏
微分を表す。 (24) の形の近似の特徴として、 $X_n(t, w; x)$ が
およそ w の微分
 $X(t, w; x)$ への収束する証明の評価で直接的なマルチンゲール不
等式の使用だけでなく工夫を要する部分があるが、(25) の評
価では特にこれらの工夫が重要になる。

a.a.w に 対して、任意の t に 対し 2 (22) の写像が微分
同相写像であることを示す時の onto, 1 対 1 の部分の証明
は Varadhan [19] は最近新たな考えを提出した。彼の考え
は $\mathbb{R}^d$ を一対コンパクト化し、 ω の連続性を確かめること
と、伊藤の公式より $\frac{d}{dt} X(t, w; x) - X(t, w; y)$ のノルムの平均
に關する評価の不等式を基礎にしている。国田 [17] はこの

未とを用いて、係数がめらかでない時には位相同型の問題と論じている。

一般にここでの問題を論ずることは、関連の問題もともに未解明の点が多い。

- [1] Bismut, 未発表。
- [2] H. Doss, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, Ann. Inst. H. Poincaré 13 (1977).
- [3] K. D. Elworthy, Stochastic dynamical systems and their flows, Stochastic Analysis ed. by A. Friedman and M. Pinsky 79-95. 1978.
- [4] T. Funaki. Construction of a solution of random transport equation with boundary condition, J. Math. Soc. Japan 31 (1979)
- [5] B. Gaveau, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certain groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977)
- [6] N. Ikeda - S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, 講談社, 近刊。
- [7] N. Ikeda, S. Nakao and Y. Yamato, A class of approximations of Brownian motion. Publ. RIMS., Kyoto Univ. 13 (1977).
- [8] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience. Publ.
- [9] A. Kaplan, Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms. Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980).
- [10] H. Kunita, On the representation of solutions of stochastic differential equation. Lecture Notes, No. 784, 1980.
- [11] H. Kunita, 1980年阪大集中講義。
- [12] P. Malliavin, Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976, ed. by K. Itô, 1978.
- [13] P. Malliavin, C^k -hypoellipticity with degeneracy, Stochastic Analysis, ed. A. Friedman and M. Pinsky, 1978.

- [14] H. P. McKean, Stochastic integrals. Academic Press, 1969.
- [15] E. J. McShane, Stochastic differential equations and models of random processes. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 1972.
- [16] H. Omori, Symp.の報告。
- [17] L. P. Rothschild and E. M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups Acta Math. 137 (1977).
- [18] I. Shigekawa : 阪大確率論セミナー報告, 1980.
- [19] S. R. S. Varadhan : 未発表(阪大における討論)。
- [20] Y. Yamato, Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebras, Z. Wahr. Geb. 47 (1979).