

マルコフ作用素における周期的な部分 σ -加法族について

岩田 友紀子

YUKIKO IWATA

東北学院大学情報学部データサイエンス学科

DEPARTMENT OF DATA SCIENCE, FACULTY OF INFORMATICS, TOHOKU

GAKUIN UNIVERSITY

1 はじめに

確率空間 (X, Σ, m) 上で定義された可積分関数の空間 $L^1(X, \Sigma, m)$ における線形作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \rightarrow L^1(X, \Sigma, m)$ が以下の 3 つの条件：

- (i) 任意の $f \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して, $f \geq 0 \Rightarrow Pf \geq 0$,
- (ii) $P\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X$,
- (iii) $P^*\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X$,

を満たすとき, P を **bi-stochastic** マルコフ作用素と呼ぶとする. ここで, P^* は P の共役作用素とする. 上の条件 (ii) は

$$0 \leq f \in L^1(X, \Sigma, m) \quad \Rightarrow \quad \|f\|_1 = \|Pf\|_1$$

を満たすことと同値であるので, bi-stochastic マルコフ作用素は conservative positive contraction であることに注意する.

上で定義した bi-stochastic マルコフ作用素が **asymptotically periodic**[6] を参照) であるとは何が周期的な挙動を表しているかについて考察する. つまり, bi-stochastic マルコフ作用素に対して, ある自然数 $d \in \mathbb{N}$, ある全単射写像 $\alpha : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$, $i \neq j$ のとき $g_i(x)g_j(x) = 0$ 満たす非負関数 $g_1, \dots, g_d \in L^1(X, \Sigma, m)$ と, $L^1(X, \Sigma, m)$ 上の非負線形汎関数 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ が存在し, 全ての $i = 1, \dots, d$ に対して $Pg_i = g_{\alpha(i)}$ を満たし,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P^n u - \sum_{i=1}^d \lambda_i(u) g_{\alpha^n(i)}(x) \right\|_1 = 0 \quad \forall u \in L^1(X, \Sigma, m)$$

がどのような条件で成り立つかという事について,

1. bi-stochastic マルコフ作用素 P が asymptotic periodicity である場合, Σ の部分 σ -加法族 Σ_0 で, ある種の周期性がみられるものの存在,
2. 上で述べたある種の周期性がみられる部分 σ -加法族 Σ_0 の周期 k のサイクリックな atom $W \in \Sigma_0$ がもし存在するならば, W の部分集合 $A \subset W$ に対して, 関数列 $\{P^{*nk}\mathbf{1}_A(x)\}$ が概収束するときの挙動,

の 2 点に注目し考察した.

概収束についての先行研究として, ボレル可測空間 (X, Σ) 上で定義された作用素 P が Harris-recurrent であるとき, 即ち, σ -有限な測度 m に対して,

$$m(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} P^n \mathbf{1}_A(x) = \infty \quad \forall x \in X$$

を満たすとき, 1979 年に S. Horowitz が以下を証明した ([4] を参照) ;

- P が有限な不変測度 μ のもとで Harris-recurrent, かつ, aperiodic であるとき, 任意の $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n f(x) = \int_X f(x) d\mu \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ.

- P が σ -有限な不変測度 μ のもとで Harris-recurrent であるとき, 任意の $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n f(x) = 0 \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ.

上の結果を踏まえて, 確率空間上での作用素 P が bi-stochastic マルコフ作用素である場合について概収束を考察した.

2 周期的な部分 σ -加法族と結果

線形作用素 P を確率空間 (X, Σ, m) における bi-stochastic マルコフ作用素とし, P を $L^2(X, \Sigma, m)$ に制限したとき, 集合

$$K = \{f \in \mathcal{H} : \|P^n f\| = \|P^{*n} f\| = \|f\|, n = 1, 2, \dots\}$$

に対して、次の3つの Σ の要素の族を考える；

$$\Sigma_K = \{A \in \Sigma : \mathbf{1}_A \in K\},$$

$$\Sigma_i(P^k) = \{A \in \Sigma : P^k \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\Sigma_d(P) = \{A \in \Sigma : P^n \mathbf{1}_A = \text{characteristic function for } n = 1, 2, \dots\}.$$

Remark 2.1. *bi-stochastic* マルコフ作用素 P の定義より、 P を $L^2(X, \Sigma, m)$ に制限した $P|_{L^2}$ を考えた場合、 $P|_{L^2}$ の共役作用素 $\tilde{P}^*$ は $L^2(X, \Sigma, m)$ 上で P^* に一致することに注意する。

K と Σ_K に対して、次の命題が成り立つ (Foguel [2] の Theorem A, ChapVIII を参照)。

Proposition 2.1 ([2]). (X, Σ, m) を確率空間、線形作用素 $P : L^2(X, \Sigma, m) \rightarrow L^2(X, \Sigma, m)$ を *positive contraction* とする。更に、条件 (ii) と (iii) を満たすとする。このとき、以下が成り立つ：

- (1) $K = \{f \in L^2(X, \Sigma, m) : P^n P^{*n} f = P^{*n} P^n f = f, n = 1, 2, \dots\}$. 更に、 K は線形空間であり、 $PK, P^*K \subset K$ を満たす。ここで、 P^* は P の共役作用素とする。
- (2) 任意の $f \in K$ に対して、 $|Pf| = P|f|$ 、かつ、 $|P^*f| = P^*|f|$ が成り立つ。
- (3) 任意の $A \in \Sigma_K$ に対して、 $P\mathbf{1}_A$ と $P^*\mathbf{1}_A$ は特性関数となる。
- (4) Σ_K は Σ の部分 σ -加法族となる。
- (5) 各自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $\Sigma_i(P^k) \subset \Sigma_K$ 。

証明. (1) K の条件と P が contraction であることより、任意の $f \in K$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\|f\|^2 = \|P^n f\|^2 = \langle P^n f, P^n f \rangle = \langle P^{*n} P^n f, f \rangle \leq \|P^{*n} P^n f\| \cdot \|f\| \leq \|f\|^2$$

となるので、 $\|f\|^2 = \langle P^{*n} P^n f, f \rangle$ 、かつ、 $\|P^{*n} P^n f\| \leq \|f\|$ を満たすので、コーシー・シュワルツの不等式の等号が成り立つ。従って $f = P^{*n} P^n f$ を得る。同様に、 P^* も L^2 上で contraction であることより、 $f = P^n P^{*n} f$ を得る。

逆に、 $f \in L^2$ が、全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f = P^{*n} P^n f = P^n P^{*n} f$ を満たすとする。このとき、

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle P^{*n} P^n f, f \rangle = \langle P^n f, P^n f \rangle = \|P^n f\|^2$$

が成り立つ。同様に、 $f = P^n P^{*n} f$ の場合も成り立つので、 $\|f\|^2 = \|P^n f\|^2 = \|P^{*n} f\|^2$ を得る。以上より、

$$K = \{f \in L^2 : f = P^{*n} P^n f = P^n P^{*n} f, n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

また、上記の等式が成り立つことより、任意の $f \in K$ に対して、

$$\|P^n(P^*f)\| = \|P^{n-1}PP^*f\| = \|P^{n-1}f\| = \|f\|,$$

より、 $Pf \in K$. 同様に、 $P^*f \in K$ が成り立つので、 $PK, P^*K \subset K$ を得る. 更に、 P も P^* も線形作用素なので、任意の $f, g \in K$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} P^{*n}P^n(\alpha f + \beta g) &= P^{*n}(\alpha P^n f + \beta P^n g) = \alpha P^{*n}P^n f + \beta P^{*n}P^n g = \alpha f + \beta g, \\ P^n P^{*n}(\alpha f + \beta g) &= P^n(\alpha P^{*n} f + \beta P^{*n} g) = \alpha P^n P^{*n} f + \beta P^n P^{*n} g = \alpha f + \beta g. \end{aligned}$$

よって、 K は線形空間となる.

- (2) 任意の $f \in K$ に対して、 $\|f\|_2 = \|Pf\|_2$ であることと、 P は positive なので、 $|Pf| \leq P|f|$ を満たす. 従って、任意の $f \in K$ に対して、

$$\begin{aligned} \|P|f| - |Pf|\|_2^2 &= \int_X (P|f| - |Pf|)^2 m(dx) = \|P|f|\|_2^2 + \|Pf\|_2^2 - 2\langle P|f|, |Pf| \rangle \\ &\leq 2\|f\|_2^2 - 2\|Pf\|_2^2 = 0. \end{aligned}$$

よって、 $|Pf| = P|f|$ a.e. 同様にして、 $|P^*f| = P^*|f|$ a.e. が成り立つ.

- (3) 任意の $A \in \Sigma_K$ に対して、

$$\begin{aligned} 0 &= P(\mathbf{1}_A \wedge (\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A)) = P\left(\frac{\mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A) - |\mathbf{1}_A - (\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A)|}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(P\mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_X - P\mathbf{1}_A) - |P\mathbf{1}_A - (\mathbf{1}_X - P\mathbf{1}_A)|) \\ &= P\mathbf{1}_A \wedge (\mathbf{1}_X - P\mathbf{1}_A) \end{aligned}$$

となり、これは $P\mathbf{1}_A$ が特性関数であることを意味する.

- (4) 条件 (ii) と (iii) より、 $X \in \Sigma_K$ は明らか. 更に、 $A \in \Sigma_K$ と $n \in \mathbb{N}$ において、(1) の結果を用いると、

$$P^n P^{*n} \mathbf{1}_A^c = P^n P^{*n} (\mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A^c},$$

が得られる. よって、 $A^c \in \Sigma_K$.

一方、 P が L^2 上の contraction であるので、 $\|f\|_2 = \|P^n f\|_2 \leq \|P^n |f|\|_2 \leq \|f\|_2$ より、 $|f| \in K$ であることと、 K は線形空間であること ((1) の結果を参照) に注意すると、 $A, B \in \Sigma_K$ において、

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cup B} &= \frac{\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|}{2} \in K, \\ \mathbf{1}_{A \cap B} &= \frac{\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|}{2} \in K, \end{aligned}$$

より, $A \cup B, A \cap B \in \Sigma_K$.

最後に, 単調増加な集合列 $\{A_n\} \subset \Sigma_K$ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ を満たすとき, A は有限測度を持つ集合なので, $\mathbf{1}_A \in L^2$ である. 故に,

$$\begin{aligned} P^{*n} P^n \mathbf{1}_A &= \lim_{n \rightarrow \infty} P^{*n} P^n \mathbf{1}_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_A, \\ P^n P^{*n} \mathbf{1}_A &= \lim_{n \rightarrow \infty} P^n P^{*n} \mathbf{1}_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

以上より, Σ_K は部分 σ -加法族となる.

(5) この命題の厳密な証明は長いので, 今回は省くこととする.

□

Remark 2.2. 線形空間 K は閉部分空間となることが示される (Foguel [2] の Theorem A, Chap VIII を参照).

σ -加法族 Σ_K が測度 m の下で purely atomic になる場合, P のエルゴード性などいくつか良い性質が成り立つ;

Definition 2.1. 線形作用素 P を $L^1(X, \Sigma, m)$ 上の bi-stochastic マルコフ作用素とする. このとき,

- (1) $P\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A$ ならば $m(A)(1 - m(A)) = 0$ が成り立つとき, P は **ergodic** と呼ぶ.
- (2) 空ではない集合 $W \in \Sigma_K$ が周期 k のサイクリックな集合であるとは, $P^i \mathbf{1}_W = \mathbf{1}_{W_i}$ を満たすことである. ここで, $W_0 = W_k = W$, かつ, $0 \leq i < j < k$ において, $W_i \cap W_j = \emptyset$ を満たすとする.

このとき, Remark 2.1 より, Proposition 2.1 が成り立つことに注意すると, k 周期のサイクリックな atom $W \in \Sigma_K$ に対して, 作用素 $P^{nk} (n \in \mathbb{N})$ は, $L^1(W, \Sigma(W), m)$ 上で ergodic であることが示せる.

Proposition 2.2. 確率空間 (X, Σ, m) 上の bi-stochastic マルコフ作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \rightarrow L^1(X, \Sigma, m)$ において, 測度空間 (X, Σ_K, m) が purely atomic, かつ, k 周期のサイクリックな atom $W \in \Sigma_K$ が存在するならば, $P^k(\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} P^k$, $P^{*k}(\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} P^{*k}$ が成り立つ. 更に, P^{nk} の $L^1(W, \Sigma(W), m)$ への制限は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して ergodic である.

Proof. $0 \leq j \leq k-1$ に対して, $P^j \mathbf{1}_W = \mathbf{1}_{W_j}$ とおく. ここで, 各 $0 \leq f \leq 1$ と $0 \leq j \leq k-1$ に対して, $P^k(\mathbf{1}_{W_j} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_j} \cdot P^k f$ が成り立つことに注意する. 今, 条件

(ii) と (iii) より, $P^k \mathbf{1}_{W_i} = \mathbf{1}_{W_i}$ と $P^k \mathbf{1}_{W_i^c} = \mathbf{1}_{W_i^c}$ を満たすので, 全ての $0 \leq f \leq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{1}_{W^c} P^k (\mathbf{1}_W \cdot f) \leq \mathbf{1}_{W^c} P^k \mathbf{1}_W = 0, \\ 0 &\leq \mathbf{1}_W P^k (\mathbf{1}_{W^c} \cdot f) \leq \mathbf{1}_W P^k \mathbf{1}_{W^c} = 0. \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$P^k (\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} P^k (\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) + \mathbf{1}_{W_i} P^k (\mathbf{1}_{W_i^c} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} P^k f.$$

共役作用素 P^* に対しても同様の議論から, $P^{*k} (\mathbf{1}_{W_i} \cdot f) = \mathbf{1}_{W_i} P^{*k} f$ が全ての $0 \leq f \leq \mathbf{1}_X$ に対して満たされることが分かる.

次に, Proposition 2.1 の (5) より, $\Sigma_i(P^{nk}) \subset \Sigma_K$ が成り立つので, $A \subset W$ かつ $A = A \cap W \in \Sigma_K$ を満たす任意の $A \in \Sigma_i(P^{nk})$ に対して, W が k 周期のサイクリックな atom なので,

$$\Sigma_i(P^{nk}, W) := \{A \subset W : P^{nk} \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\} = \{\phi, W\},$$

が成り立つ. これは, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $L^1(W, \Sigma(W), m)$ への制限 P^{nk} が ergodic であることを意味する. ここで, $\Sigma(W) = \{A \in \Sigma : A \subset W\}$.

□

ここで,

$$h_{n,j}(x) = \sup\{(P^{*n+j} - P^{*n})f(x) : -1 \leq f \leq 1\}$$

を定義する. ここで, 右辺は a.e. の意味での sup である.

上で定義した関数 $h_{n,j}(x)$ に対して次が成り立つ ([3]).

- (1) $0 \leq h_{n,j}(x) \leq 2$ a.e.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $h_{n,j}(x) \geq h_{n+1,j}(x)$.
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,j}(x)$ は定数 α_j に収束する.

更に, Foguel が, $P^* : L^\infty \rightarrow L^\infty$ が ergodic, かつ, conservative な positive contraction であるとき, 各固定された自然数 $j \in \mathbb{N}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,j}(x) = 0$, または, 2 a.e. のどちらかが成り立つことを示した ([3] を参照). これは, Ornstein と Sucheston による “The 0-2 law” として有名な論文の結果から導かれた結果である ([7] 参照). これらの結果を踏まえて, 以下の定理が導かれた ([5] 参照).

Proposition 2.3. 確率空間 (X, Σ, m) 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \rightarrow L^1(X, \Sigma, m)$ と, *purely atomic* な測度空間 (X, Σ_K, m) において, $W \in \Sigma_K$ を k 周期のサイクリック *atom* とし, $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} W_i$ を満たすとする. このとき, もし

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{nk,k}(x) = 0 \quad a.e.$$

を満たすならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P^{nk}u - \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i} \right\|_1 = 0$$

が全ての $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して成り立つ.

Proof. まず, $P\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X = P^*\mathbf{1}_X$ なので,

$$m(W_i) = \langle P^i \mathbf{1}_W, \mathbf{1}_X \rangle = \langle \mathbf{1}_W, P^{*i} \mathbf{1}_X \rangle = \langle \mathbf{1}_W, \mathbf{1}_X \rangle = m(W)$$

が各 $0 \leq i \leq k-1$ に対して成り立つことに注意する. 更に, $P^k \mathbf{1}_{W_i} = \mathbf{1}_{W_i}$ であるので,

$$P^{nk} \left(\frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i} \right) = \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i}$$

が全ての $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して成り立つ.

各 $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ において,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|P^{nk}(I - P^k)u\|_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\langle P^{nk}(I - P^k)u, f \rangle| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\langle u, P^{*nk}(I - P^{*k})f \rangle| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \langle |u|, |P^{*nk}(I - P^{*k})f| \rangle \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle |u|, H_{nk,k} \rangle = 0. \end{aligned}$$

従って, $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ を任意にとつて固定する. $g_A = u - \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i}$ とおくと, Proposition 2.2 より, $L^1(W_i)$ への制限 P^k は *ergodic* である. 従って, $L^1(W_i)$ への制限 P^k に Ornstein と Sucheston の論文 [7] での Corollary 1.3 を当てはめると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^{nk}u\|_{L^1(W_i)} = 0 \quad \text{for all } u \in L^1(W_i) \text{ with } \int_{W_i} u dm = 0$$

が各 $0 \leq i < k$ に対して成り立つ. このとき, 各 $0 \leq j < k$ と $u \in L^1(X, \Sigma, m)$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_{W_j} g_A dm &= \int_{W_j} \left(u - \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle u, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \cdot \mathbf{1}_{W_i} \right) dm \\ &= \langle u, \mathbf{1}_{W_j} \rangle - \langle u, \mathbf{1}_{W_j} \rangle = 0 \end{aligned}$$

を得るので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^{nk} g_A\|_{L^1(W_i)} = 0$ が成り立つ. よって, $g_A = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{1}_{W_i} \cdot g_A)$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^{nk} g_A\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{1}_{W_i} \cdot P^{nk} g_A) \right\|_1 \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^{nk} g_A\|_{L^1(W_i)} \right) = 0$$

が成り立つ. これは, P^k asymptotically periodic であることを意味する. $\square$

更に, 以下の2つの定理が成り立つ ([5]);

Theorem 2.1. 確率空間 (X, Σ, m) 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \rightarrow L^1(X, \Sigma, m)$ と, *purely atomic* な測度空間 (X, Σ_K, m) において, $W \in \Sigma_K$ を k 周期のサイクリック *atom* とし, $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} W_i$ を満たすとする. このとき, もし任意の $A \subset W_i$ と $0 \leq i \leq k-1$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{*nk} \mathbf{1}_A(x) = \frac{m(A)}{m(W)} \mathbf{1}_{W_i}(x) \quad a.e.$$

を満たすならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{nk,k}(x) = 0$ *a.e.* が成り立つ.

Theorem 2.2 (2023). 確率空間 (X, Σ, m) 上の *bi-stochastic* マルコフ作用素 $P : L^1(X, \Sigma, m) \rightarrow L^1(X, \Sigma, m)$ と, *purely atomic* な測度空間 (X, Σ_K, m) において, $W \in \Sigma_K$ を k 周期のサイクリック *atom* とし, $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} W_i$ を満たすとする. このとき, もし任意の $x \in X$ と $A \subset W_i$ ($0 \leq i \leq k-1$) に対して, ある列 $\{M_n(x)\}$ で全ての $m \geq 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(x) = 0$ を満たすものが存在し,

$$|P^{*nk}(I - P^{*mk}) \mathbf{1}_A(x)| \leq M_n(x) \quad a.e.,$$

を満たすとしたら,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{*nk} f(x) = \frac{1}{m(W)} \sum_{i=0}^{k-1} \langle f, \mathbf{1}_{W_i} \rangle \mathbf{1}_{W_i}(x) \quad a.e.$$

が全ての $f \in L^\infty(X, \Sigma, m)$ に対して成り立つ.

※このとき, M_n は x と $A \subset W_i$ に依存することに注意する.

上記の定理を満たす例として、積分作用素があげられる ([1] を参照) ;

Example 2.1. 閉区間 $[0, 1]$ 上で定義されたルベグ測度を λ とし、可測関数 $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$k(x, y) = \begin{cases} 2 & (x, y) \in ([0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup ([\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

と定義する. このとき,

$$Pf(x) = \int_{[0,1]} k(x, y)f(y)\lambda(dy)$$

と定義すると, $P : L^1([0, 1], \lambda) \rightarrow L^1([0, 1], \lambda)$ は *ergodic bi-stochastic* マルコフ作用素となり, 実際には,

$$Pf = -f \quad \text{for} \quad f = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}.$$

を満たす, 周期 2 の *Harris* 作用素となる. 従って, *Theorem 2.1, 2.2* を満たす.

参考文献

- [1] G. Cohen, M. Lin, L^2 -Quasi-compact and hyperbounded Markov operators, arXiv:2206.08003.
- [2] S. R. Foguel, *The ergodic theory of Markov processes*, Van Nostrand Mathematical Studies 21, New York, 1969.
- [3] S. R. Foguel, A new approach to the study of Harris type Markov operators, Rocky Mountain Journal of Mathematics. 19(1989), 491-512.
- [4] S. Horowitz, Pointwise convergence of the iterates of a harris-recurrent Markov operator, Israel Journal of Mathematics. 33 (1979), 177-180.
- [5] Y. Iwata, Almost everywhere convergence of the iterates of a bi-stochastic Markov operator, Positivity (2023), preprint.
- [6] A. Lasota; M.C. Mackey, Chaos, fractals, and noise. Stochastic aspects of dynamics, Second edition. Applied Mathematical Sciences, 97. Springer-Verlag, New York, (1994).
- [7] D. Ornstein, L. Sucheston, An operator theorem on L^1 convergence to zero with applications to Markov kernels, Ann. Math. Stat. 41 (1970), 1631-1639.