

が、 $n \rightarrow \infty$ で固定点関数に近づくことを用いて説明される。この固定点関数をくりこみ群的に求めることはまだできていないが、この関数の曲率によって、

- 1) 各周期は接線分岐で生じ、接線分岐で消滅する。途中に superstable cycle はない。
- 2) 1)と同様だが、途中に2回、superstable cycle がある。
- 3) 接線分岐が始まるが、周期倍現象でカオスに至る（ないしは、周期倍現象が途中でとまり、
 $"p \rightarrow 2 \cdot p \rightarrow \dots \rightarrow 2^{k-1} p \rightarrow 2^k p \rightarrow 2^{k-1} p \rightarrow \dots p"$ のようになる）

の3つの場合があることがわかる。そのいずれもマップ(3)であらわれる。§1の例は3)にあっている。また、発達したカオスの中にあらわれる“窓”の構造の相似性（たとえば、マップ(3)で A を $D = 0.25$ に近づける時に見られる周期解）も3)として理解される。

§ 4. おわりに

ロッキングのメカニズムは、以上で多少わかってきたが、トーラスからカオスの問題はまだほとんど分っていない。ロッキングを経ずにカオスへ行く例、またロッキングをはさみながらカオスが発達していくメカニズム等をこれから調べていきたいと思っている。また、§1の2次元マップの問題としても、 $(4n-1)$ でなく $(8n-1)$ 周期が順次ロックされる理由、また、カオスに至る前にトーラスが必ず歪められるが、それを定量的に調べる方法はないのか（保存系での Kadanoff, Shenker らの仕事が1つの指針となる。）等さまざまな問題が残されている。

原理的には、ロッキングは任意の有理数で起るのだが、ここで述べた系列がもっとも安定に存在することを示せる。その点からも、ここで述べた現象が Benard 対流等の実験で見出されることが期待される。

概略のみを簡単に述べてきましたが、詳しくは、Prog. Theor. Phys. 68 No.2, 及び現在投稿準備中のものを（参考文献についても、その中の文献を）参照して下さい。

周期倍現象におけるフーリエ・ スペクトルのパラメーター依存性

京大・基研 大同寛明

周期倍現象 (period-doubling phenomenon) は近年、諸種の非線形非平衡系で観測されるようになってきた。しかも、それらの実験結果をみると、分岐の収束比およびフーリエ・

スペクトルの比率は、1次元写像をベースとした理論値とよい一致を示している。しかしながら分岐が進むにつれ、通常分岐のルートからずれはじめるという報告もあり、対流系等の高次元系の分岐現象に対して、1次元写像にもとづく記述がどれほど有効かは、未だ明確と思われない。そこで、何らかの方法で、1次元写像からの理論的帰結と実験結果との更なる比較が必要と思われる。筆者は、その1つの方法として、フーリエ・スペクトルのパラメーター依存性を調べることを提案したい。以下では、簡略に、その理論的結果について述べる。実験的研究が望まれる。

基本的方針は Feigenbaum¹⁾ に従うが、彼の方法では、異なるパラメーター値におけるフーリエ成分の比を問題とするので、実験との比較には不便である。そこで、ここでは、同一のパラメーター値における成分の比を取り、そのパラメーター依存性を調べる。そのために2つの2変数函数 $\hat{\sigma}_j$, $\hat{\rho}_j$ を次の式で導入する。

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{n+1}(\tau, y) &\equiv \{X^{(n+1)}(t) - X^{(n+1)}(t + T_n)\} / \{X^{(n)}(t) - X^{(n)}(t + T_{n-1})\} \\ \hat{\rho}_{n+1}(\tau, y) &\equiv \{X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)\} / \{X^{(n)}(t) - X^{(n-1)}(t)\}\end{aligned}$$

ここで、 $X^{(j)}(t)$ は T_0 を基本周期として、 $T_j \equiv 2^j T_0$ の周期を持つ解を表し、(但し、パラメーターはすべて r) $\tau \equiv t/T_{n+1}$, $y \equiv (r - r_{n+1}) / (r_{n+2} - r_{n+1})$ である。 r_j は、 $X^{(j)}$ の分岐するパラメーター値を表す。

$\hat{\sigma} \equiv \lim \hat{\sigma}_n$, $\hat{\rho} \equiv \lim \hat{\rho}_n$ とおくと、 $\hat{\sigma}$, $\hat{\rho}$ は、パラメーター依存を含む周期倍現象の理論²⁾を用いて計算できる。

原理的には、いくらでも精度よく計算できるが、実際上は、次のような階段函数近似で充分である(別図参照)。

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\tau, y) &\cong \hat{\sigma}_1(y) \\ (0 \leq \tau \leq 1/4), \\ \hat{\sigma}_2(y) &(1/4 < \tau \leq 1/2), \\ \hat{\rho}(\tau, y) &\cong \hat{\rho}^*(y) \\ (1/2 < \tau \leq 1)\end{aligned}$$

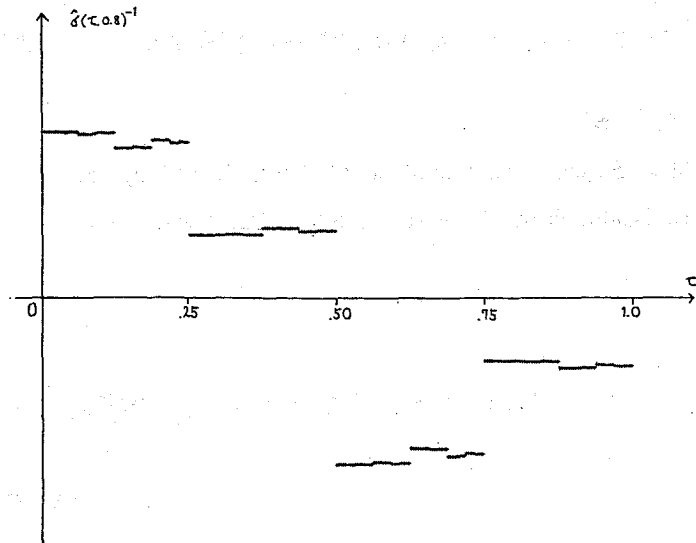


Fig. 1

大同寛明

ここで $\hat{\sigma}_i, \hat{\rho}^*$ は universal function $G(z, y)^{2)}$ を用いて表わすことができ, 例えば,

$$\hat{\rho}^*(y) = G(\hat{\varepsilon}(y), 1 + \delta^{-1} y)$$

である (δ は Feigenbaum constant)。詳細は略すが, これらの函数を用いて, 次の結果をうる。

$$\begin{aligned} \hat{X}^{(n+1)}(\omega) &\cong \phi(y) \cdot \tilde{X}^{(n+1)}(\omega) \\ \phi(y) &= \frac{\hat{\sigma}_1(y) - \hat{\sigma}_2(y) e^{-i\omega T_{n-1}}}{2 \{1 + \hat{\rho}^*(y)\} + \hat{\sigma}_1(y) + \hat{\sigma}_2(y)} \end{aligned} \quad (*)$$

ここで, $\hat{X}^{(n+1)}, \tilde{X}^{(n+1)}$ はそれぞれ, $X^{(n+1)}(t)$ の $2\pi(2k+1)/T_{n+1}$ 成分と $4\pi(2k+1)/T_{n+1}$ 成分を外挿してえられる函数である。(*)は位相まで含んだ extensive な関係式であるが, 実験では絶対値が問題となる。そこで, 上記2種の成分の絶対値の2乗を k につき平均したものの比率を $\phi_{n+1}(y)$ とおくと, これは次のような函数となることが導かれる。($n \gg 1$)

$$\phi_{n+1}(y) \cong \mu^{-2} y \quad (0 \leq y \leq 1), \quad \mu^{-2} \quad (1 \leq y \leq y_c)$$

ここで $\mu^2 = 20.963 \dots$ は Nauenberg-Rudnick の定数である。また $y_c = \delta/(\delta-1) = 1.272 \dots$ は r_c に対応する y の値である。上の結果は, 2変数の強制振動子系の数値計算からえた結果をよく説明している。こうして, フーリエ成分の比率は, 良い精度で, 台形則に従うパラメーター依存を持つことがわかった。この結果を使うと, r_c にある程度以上近い任意の r に対するフーリエ・スペクトルの形を理論的に構成することができる。

文 献

- 1) M. J. Feigenbaum, Comm. Math. Phys. 77 (1980) 65.
- 2) H. Daido, Prog. Theor. Phys. 67 (1982) 1698.

Hamilton 系のカオスと解の複素 t 平面上の特異点

東大・理・天文 吉 田 春 夫

一般に力学系, 特に Hamilton 系が与えられた時それが積分可能であるか否かを有限の手続きで判定する criterion は知られていない。力学系が積分可能であるか否かということが,