

A study of Bimodal exceptional singularity with holonomic system

(Bimodal 例外型特異点と holonomic 系)

Y. Nakamura, Ochanomizu univ.
(中村弥生, お茶の水女子大学)

本稿では, Bimodal 例外型特異点に台を持つ代数的局所コホモロジー類を考え, そのコホモロジー類を annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素により与えられるホロノミック系を構成し, その解空間について調べる.

$\mathbb{C}^n$ における原点 O の近傍 X で定義された正則関数 $f(z) \in \mathcal{O}_X$ が O で孤立特異点を持つとする. このとき, $f(z)$ の偏導関数により annihilate される原点に台をもつ代数的局所コホモロジー類 $\sigma \in \mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)$ を考えることができる. このコホモロジー類 σ の微分作用素環の層 $\mathcal{D}_X$ 上の零化イデアルを用いることにより, σ の具体的表現や σ に関する留数値等を計算することができる ([8]). しかし, 特異点の構造が複雑な場合には, 零化イデアル Ann を計算することは容易ではない. そこで, 高々 1 階の線形偏微分作用素からなる annihilator のイデアルを構成し, その解空間を調べることによって, 高々 1 階の偏微分作用素によって σ をどこまで特徴付けることができるかを調べる.

1970 年代, 斎藤恭司氏により, 擬斉次孤立特異点の微分作用素を用いた特徴付けに関する結果が与えられた ([6]). $f(z)$ は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍で定義された正則関数で, 原点に孤立特異点を持つとする. このとき, 次の条件は同値である.

(a) f は適当な正則座標変換によって, 擬斉次多項式となる.

(d) 関数 $a_j(z) \in \mathcal{O}_X$ ($j = 1, \dots, n$) が存在し,

$$f = a_1(z) \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + a_n(z) \frac{\partial f}{\partial z_n}$$

が成り立つ.

更に, 条件 (d) の関数 $a_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) に関し, 次が成り立つ.

$$\bullet \det \frac{\partial(a_1, \dots, a_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \Big|_{z=0} \neq 0.$$

$f(z)$ の偏導関数から決まる代数的局所コホモロジー類 σ に対し, $Ann_{\leq 1}$ を σ を annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素の生成する $\mathcal{D}_X$ 上のイデアルとする. このとき, 我々は, 条件

(e) $Ann = Ann_{\leq 1}$

(f) $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/Ann_{\leq 1}, \mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)) = \text{Span}\{\sigma\}$

も条件 (a), (d) と同値であるという結果を得た ([2], [4]).

さらに我々は, 擬斉次でない関数 $f(z)$ に対して代数的局所コホモロジー類 σ を考え, その annihilator のイデアル $Ann_{\leq 1}$ について考える. 特に, $f(z)$ が半擬斉次 (semiquasihomogeneous) 関数の場合, その標準形や擬次数に関して詳しい研究がなされていることから ([1]), それらの標準形について具体的に計算を行なう. $f(z)$ が Unimodal 例外型特異点の場合の結果や関連した我々の研究に関しては, [2], [3], [4], [7] 等を参照されたい. これらは, 新潟大学工学部田島慎一氏との共同研究である.

本稿では, $f(z)$ が Bimodal 例外型特異点の場合を扱う. 次の結果を得る.

定理 $f(z)$ は Bimodal 例外型孤立特異点の標準形 (2.1) を与えるとする. $f(z)$ の偏導関数により annihilate される原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類全体を考え, その $\mathcal{O}_X$ 上の生成元を σ と置く. σ を

annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素の生成するイデアル $\text{Ann}_{\leq 1}$ に対し、次が成り立つ.

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\text{Ann}_{\leq 1}, \mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)) = \text{Span}\{\delta, \frac{\partial}{\partial y}\delta, \sigma\},$$

ここで, $\delta \in \mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)$ は原点に台を持つデルタ関数である.

1 代数的局所コホモロジー類とホロノミック系

X を $\mathbb{C}^n$ 上の原点 O の開近傍とし, $\mathcal{O}_X$ を X で定義された正則関数の層とする. X 上定義された正則関数 $f = f(z) \in \mathcal{O}_X$ が原点に孤立特異点を持つとする. f の変数 $z_1, \dots, z_n$ による偏導関数をそれぞれ $f_1 = \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, f_n = \frac{\partial f}{\partial z_n}$ とおく. I を $f_1, \dots, f_n$ の生成する $\mathcal{O}_X$ 上のイデアルとする:

$$I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_{\mathcal{O}_X}.$$

Σ を, I に属する関数によって annihilate される原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類の集合とする:

$$\Sigma = \{\eta \in \mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X) \mid g\eta = 0, g \in I\}.$$

Σ は $\mathcal{O}_X$ 上 1 つの元で生成することができる. その生成元を σ とおく:

$$\Sigma = \mathcal{O}_X \sigma.$$

$\mathcal{L}$ を σ を annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素の集合とする:

$$\mathcal{L} = \{P = \sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + a_0(z) \mid P\sigma = 0, a_j \in \mathcal{O}_X, j = 0, 1, \dots, n\}.$$

$\mathcal{L}$ に属する作用素 $P \in \mathcal{L}$ は Σ に作用するという性質を持っている. ここで, $\text{Ann}_{\leq 1} = \mathcal{D}_X \mathcal{L}$ とおく. $\text{Ann}_{\leq 1}$ は代数的局所コホモロジー類 σ を annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素の生成する微分作用素の層 $\mathcal{D}_X$ 上のイデアルである. このとき, ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/\text{Ann}_{\leq 1}$ の解空間 $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\text{Ann}_{\leq 1}, \mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X))$ は Σ の部分空間となる.

さて, $\mathcal{V}$ を Σ に作用する 1 階の線形偏微分作用素 $v = a_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + a_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n}$, $a_j(z) \in \mathcal{O}_X$ ($j = 1, \dots, n$) の集合とする. 作用素 $v \in \mathcal{V}$ が Σ に作用することは, v が I に作用することと同値である. つまり,

$$\mathcal{V} = \{v = a_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + a_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n} \mid vg \in I, g \in I\}$$

とおくことができる. このとき, 次が成り立つ.

命題 1.1 $\mathcal{L}$ から $\mathcal{V}$ への全射を構成することができる.

$\mathcal{V}$ の元 v から $\mathcal{O}_X/I$ 上に作用する線形偏微分作用素を導くことができ, これを再び v で表すことにする. ここで,

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{O}_X/I \mid vh = 0, v \in \mathcal{V}\}$$

とおく. このとき次が成り立つ.

定理 1.1 $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\text{Ann}_{\leq 1}, \mathcal{H}_{[O]}^n(\mathcal{O}_X)) = \text{Span}\{h\sigma \mid h \in \mathcal{H}\}.$

この節で与えた記号の詳しい説明や結果の証明などについては [2], [4] を参照されたい.

2 Bimodal 例外型特異点について

Bimodal 例外型特異点の標準形は次の 14 個の多項式 f で与えられる (V.I. Arnold [1]) :

$$\begin{array}{ll}
 E_{18} & f = x^3 + y^{10} + (a + by)xy^7 \\
 E_{19} & f = x^3 + xy^7 + (a + by)y^{11} \\
 E_{20} & f = x^3 + y^{11} + (a + by)xy^8 \\
 Z_{17} & f = x^3y + y^8 + (a + by)xy^6 \\
 Z_{18} & f = x^3y + xy^6 + (a + by)y^9 \\
 Z_{19} & f = x^3y + y^9 + (a + by)xy^7 \\
 W_{17} & f = x^4 + xy^5 + (a + by)y^7 \\
 W_{18} & f = x^4 + y^7 + (a + by)x^2y^4 \\
 Q_{16} & f = x^3 + yz^2 + y^7 + (a + by)xy^5 \\
 Q_{17} & f = x^3 + yz^2 + xy^5 + (a + by)y^8 \\
 Q_{18} & f = x^3 + yz^2 + y^8 + (a + by)xy^6 \\
 S_{16} & f = x^2z + yz^2 + xy^4 + (a + by)y^6 \\
 S_{17} & f = x^2z + yz^2 + y^6 + (a + by)x^2y^3 \\
 U_{16} & f = x^3 + xz^2 + y^5 + (a + by)x^2y^2
 \end{array} \tag{2.1}$$

半擬斉次多項式の半擬斉次項 (擬斉次でない部分) は, 擬斉次項に対する Milnor algebra の基底単項式で, 擬斉次部分の擬次数よりも高い擬次数を持つものによって与えられ, よって, その計算法により形が異なる. 本稿で扱う形は標準基底の計算に基づいたものであり, S_{17} の半擬斉次項 $(a + by)x^2y^3$ は [1] で与えられている S_{17} の標準形と異なっている. 擬次数は [1] で与えられた半擬斉次項と等しくなっていることに注意しておく.

これらの標準形 f に対し, 標準基底の計算に基づき Milnor algebra の基底単項式を取り, 擬次数の低い順に並べたものを

$$M = \{m_1, \dots, m_{\mu-1}, m_{\mu}\}$$

と置く. なお, 項順序 $\succ$ は, z_i, z_j の擬次数が $d(z_i) \geq d(z_j)$ となるならば $z_i \succ z_j$ として定義する. ここで, μ はミルナー数 $\dim \mathbb{Q}[x, y]/I$ または $\dim \mathbb{Q}[x, y, z]/I$ である. また, $m_1 = 1$ である. 与えられた単項式 m の擬次数を $d(m)$ と置くと, $d(m_{\mu}) = nd_f - 2 \sum_{j=1}^n d(z_j)$ である. 但し, d_f は関数 f の擬次数である. 今, 上の標準形 (2.1) において, 変数 y の擬次数が x, z の擬次数に対し, 最も小さくなっている. つまり $d(y) < d(x), d(z)$ である. よって, $d(m_{\mu-1}) = nd_f - 2 \sum_{j=1}^n w_j - d(y)$ である. このとき, $d(m_{\mu}), d(m_{\mu-1}) > d_f$ であり, 各 f の半擬斉次項は $am_{\mu-1} + bm_{\mu}$ で与えられる.

ここで, 代数的局所コホモロジー類の擬次数を定義し, Σ と M の間に成り立つ関係をみておく.

定義 2.1 重みベクトル $w = (d(z_1), \dots, d(z_n))$ に対し, 代数的局所コホモロジー類 $\left[\frac{1}{z^{\mathbf{k}}} \right] = \left[\frac{1}{z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}} \right]$

の擬次数が $-d$ であるとは,

$$\langle w, \mathbf{k} \rangle = d(z_1)k_1 + \dots + d(z_n)k_n = d$$

が成り立つことを言う.

さらに, 代数的局所コホモロジー類 $\eta = \left[\sum_{\mathbf{k} \in E_{\eta}} c_{\mathbf{k}} \frac{1}{z^{\mathbf{k}}} \right]$ に対し, η の擬次数 $d(\eta)$ を η の項 $\left[\frac{1}{z^{\mathbf{k}}} \right]$ の最小擬次数で定義する:

$$d(\eta) = \min\{-\langle w, \mathbf{k} \rangle \mid \mathbf{k} \in E_{\eta}\}.$$

ここで E_{η} は η の零でない全ての項 $c_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{z^{\mathbf{k}}} \right]$ の指数 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ の集合である.

代数的局所コホモロジー類の集合 Σ は Milnor algebra M の双対基底となっている. Σ の基底を取り, 擬次数の小さい順に並べ, それを $\sigma_1, \dots, \sigma_{\mu}$ と置く. 今, $\sigma_{\mu} = \delta$ である. ここで, $\delta \in \mathcal{H}_{[0]}^n(\mathcal{O}_X)$ は原点に台を持つデルタ関数である.

命題 2.1 次が成り立つ.

- $m_j \sigma_{\mu-j+1} = c_j \delta, j = 1, \dots, \mu$. 但し, c_j は定数である.
- $d(m_j) + d(\sigma_{\mu-j+1}) = -\sum_{j=1}^n d(z_j)$.

さて, Bimodal 例外型特異点の標準形 f に関して, Σ 上に作用する高々 1 階の偏微分作用素の集合 $\mathcal{V}$ を取り, その解空間 $\mathcal{H}$ を求める. すると, 次の結果を得る.

命題 2.2 $\mathcal{H} = \text{Span}\{1, m_{\mu-1}, m_{\mu}\}$.

今, y の擬次数が最も低いことから, この結果と定理 1.1 を組み合わせることにより, 次の結果を得る.

定理 2.1 関数 f は *Bimodal* 例外型特異点の標準形を与えるとする. Σ の $\mathcal{O}_X$ 上の生成元 σ に対し, 高々 1 階の線形偏微分作用素の生成する *annihilator* のイデアルを $\text{Ann}_{\leq 1}$ とおく.

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\text{Ann}_{\leq 1}, \mathcal{H}_{[0]}^n(\mathcal{O}_X)) = \text{Span}\{\sigma, \frac{\partial}{\partial y}\delta, \delta\}$$

が成り立つ.

[2],[4] や本稿で取り上げた *Unimodal* 例外型特異点と *Bimodal* 例外型特異点に関する代数的局所コホモロジー類 σ は, 上の結果のように, 高々 1 階の線形偏微分作用素で特徴付けることはできない. よって, 任意の $v \in \mathcal{V}$ に対し, その擬次数 $d(v)$ が $d(v) \neq 0$ を満たすことも明らかである. 一方, これらの特異点は 2 階の線形偏微分作用素まで用いると特徴付けられることが分かっている ([3] 参照; また, コホモロジー類の具体的な表現や双対性等については [8] を参照されたい). この結果に関する詳しいことについては別の機会に述べることにする.

ここで, 次の 3 つのベクトル空間を導入する.

$$L = \{P = \sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + a_0(z) \mid P\sigma = 0, a_j(z) \in \mathcal{O}_X/I, j = 0, 1, \dots, n\},$$

$$V = \{v = \sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \mid v g \in I, g \in I, a_j(z) \in \mathcal{O}_X/I, j = 1, \dots, n\},$$

$$H = \{h \in \mathcal{O}_X/I \mid v h = 0, v \in V\}.$$

このとき, $L \cong V$ である.

以下に, (2.1) で与えた *Bimodal* 例外型特異点の標準形 f に対し,

- f の偏導関数,
- I の項順序 $x \succ y$ または $z \succ x \succ y$ に関する標準基底,
- $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式 M とその擬次数,
- M に対し, 命題 2.1 を満たす Σ の基底,
- V の基底,
- V の解空間 H

の計算結果を与えておく. これらの計算は, 数式処理システム Risa/Asir([5]) にプログラムを実装して行なった.

2.1 E_{18} 型特異点 : $x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$

$f(x, y) = x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$ (重みベクトル $(10, 3)$ 擬次数 30)

偏導関数 : $f_x = 3x^2 + ay^7 + by^8, f_y = 10y^9 + (7ay^6 + 8by^7)x$

標準基底 : $\{y^{12}, 490a^2y^9 + 343a^3y^6x - 560aby^{10} + 640b^2y^{11}, 3x^2 + ay^7 + by^8\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y ,	y^2 ,	y^3 ,	x ,	y^4 ,	yx ,	y^5 ,	y^2x ,	y^6 ,	y^3x ,	y^7 ,	y^4x ,	y^8 ,	y^5x ,	y^6x ,	y^7x ,	y^8x
0,	3,	6,	9,	10,	12,	13,	15,	16,	18,	19,	21,	22,	24,	25,	28,	31,	34

Σ の基底

$$\left[3a^3 \frac{1}{y^9 x^2} + a^4 \left(-\frac{21}{10} \frac{1}{y^{12} x} - \frac{1}{y^2 x^4} \right) + \frac{7}{10} a^5 \frac{1}{y^5 x^3} \right. \\ \left. - 3a^2 b \frac{1}{y^8 x^2} - \frac{3}{10} a^3 b \frac{1}{y^{11} x} + \frac{4}{5} a^4 b \frac{1}{y^4 x^3} + 3ab^2 \frac{1}{y^7 x^2} + \frac{3}{10} a^2 b^2 \frac{1}{y^{10} x} - \frac{3}{10} ab^3 \frac{1}{y^9 x} + \frac{3}{10} b^4 \frac{1}{y^8 x} \right],$$

$$\begin{aligned} & \left[3a^2 \frac{1}{y^8 x^2} + a^3 \left(-\frac{1}{yx^4} - \frac{21}{10} \frac{1}{y^{11}x} \right) + \frac{7}{10} a^4 \frac{1}{y^4 x^3} - \frac{45}{7} ab \frac{1}{y^7 x^2} + \frac{21}{10} a^2 b \frac{1}{y^{10}x} - \frac{21}{10} ab^2 \frac{1}{y^9 x} \frac{21}{10} + b^3 \frac{1}{y^8 x} \right], \\ & \left[-\frac{30}{7} a \frac{1}{y^7 x^2} + 3a^2 \frac{1}{y^{10}x} - a^3 \frac{1}{y^3 x^4} - 3ab \frac{1}{y^9 x} + 3b^2 \frac{1}{y^8 x} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^6 x^2} \right], \left[3a \frac{1}{y^9 x} - a^2 \frac{1}{y^2 x^3} - 3b \frac{1}{y^8 x} \right], \left[\frac{1}{y^5 x^2} \right], \left[3 \frac{1}{xy^8} - a \frac{1}{x^3 y} \right], \left[\frac{1}{y^4 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^7 x} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^3 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^6 x} \right], \left[\frac{1}{y^2 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^5 x} \right], \left[\frac{1}{x^2 y} \right], \left[\frac{1}{y^4 x} \right], \left[\frac{1}{y^3 x} \right], \left[\frac{1}{xy^2} \right], \left[\frac{1}{xy} \right] \end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned} & (-26460a^2 y^2 x + 3773a^4 y^6 + 44940aby^3 x - 66060b^2 y^4 x) \frac{\partial}{\partial x} + 2058a^3 x \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (343a^4 y^6 + 4200aby^3 x - 6120b^2 y^4 x) \frac{\partial}{\partial x} + (630a^2 y^3 + 147a^3 x) \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (-210ay^3 x + 49a^3 y^7 + 450by^4 x) \frac{\partial}{\partial x}, (-49a^3 y^7 - 240by^4 x) \frac{\partial}{\partial x} + 42a^2 y x \frac{\partial}{\partial y}, (49a^3 y^7 + 480by^4 x) \frac{\partial}{\partial x} + 60ay^4 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (-30y^4 x + 7a^2 y^8) \frac{\partial}{\partial x}, -7ay^8 \frac{\partial}{\partial x} + 6y^2 x \frac{\partial}{\partial y}, 49a^2 y^8 \frac{\partial}{\partial x} + 60y^5 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & y^5 x \frac{\partial}{\partial x}, y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^3 x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^6 x \frac{\partial}{\partial x}, y^4 x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 x \frac{\partial}{\partial x}, y^8 \frac{\partial}{\partial y}, y^5 x \frac{\partial}{\partial y}, y^8 x \frac{\partial}{\partial x}, y^6 x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 x \frac{\partial}{\partial y}, y^8 x \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^7 x, y^8 x\}$

2.2 E_{19} 型特異点 : $x^3 + xy^7 + ay^{11} + by^{12}$

$f(x, y) = x^3 + xy^7 + ay^{11} + by^{12}$ (重みベクトル $(7, 2)$ 擬次数 21)

偏導関数 : $f_x = 3x^2 + y^7$, $f_y = 7y^6 x + 12by^{11} + 11ay^{10}$

標準基底 : $\{y^{13}, 7y^6 x + 11ay^{10} + 12by^{11}, 3x^2 + y^7\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{aligned} & 1, y, y^2, y^3, x, y^4, yx, y^5, y^2 x, y^6, y^3 x, y^7, y^4 x, y^8, y^5 x, y^9, y^{10}, y^{11}, y^{12} \\ & 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 24 \end{aligned}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned} & \left[a \left(\frac{21}{11} \frac{1}{y^{13}x} - \frac{7}{11} \frac{1}{y^6 x^3} \right) + a^2 \frac{1}{y^2 x^4} - 3a^2 \frac{1}{y^9 x^2} + b \left(\frac{84}{121} \frac{1}{y^5 x^3} - \frac{252}{121} \frac{1}{y^{12}x} \right) + \frac{432}{121} b^2 \frac{1}{y^7 x^2} \right], \\ & \left[\frac{21}{11} \frac{1}{y^{12}x} - \frac{7}{11} \frac{1}{y^5 x^3} + a \left(\frac{1}{yx^4} - 3 \frac{1}{y^5 x^2} \right) - \frac{36}{11} b \frac{1}{y^7 x^2} \right], \left[-3 \frac{1}{y^{11}x} + \frac{1}{y^4 x^3} + \frac{33}{7} a \frac{1}{y^7 x^2} \right], \\ & \left[-3 \frac{1}{y^{10}x} + \frac{1}{y^3 x^3} \right], \left[\frac{1}{y^6 x^2} \right], \left[-3 \frac{1}{y^9 x} + \frac{1}{y^2 x^3} \right], \left[\frac{1}{y^5 x^2} \right], \left[-3 \frac{1}{y^8 x} + \frac{1}{yx^3} \right], \left[\frac{1}{y^4 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^7 x} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^3 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^6 x} \right], \left[\frac{1}{y^2 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^5 x} \right], \left[\frac{1}{yx^2} \right], \left[\frac{1}{y^4 x} \right], \left[\frac{1}{y^3 x} \right], \left[\frac{1}{y^2 x} \right], \left[\frac{1}{yx} \right] \end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned} & (343y^2 x - 77ay^6 + 363a^2 y^3 x + 396aby^4 x) \frac{\partial}{\partial x} + 98y^3 \frac{\partial}{\partial y}, (28y^6 - 209ay^3 x - 228by^4 x) \frac{\partial}{\partial x} + 14x \frac{\partial}{\partial y}, \\ & 7y^3 x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^4 \frac{\partial}{\partial y}, (-11ay^4 x - 12by^5 x) \frac{\partial}{\partial x} + 2yx \frac{\partial}{\partial y}, \\ & 7y^4 x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^5 \frac{\partial}{\partial y}, -11ay^5 x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^2 x \frac{\partial}{\partial y}, (7y^7 - 33ay^4 x - 36by^5 x) \frac{\partial}{\partial x}, 7y^5 x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^6 \frac{\partial}{\partial y}, (7y^8 - 33ay^5 x) \frac{\partial}{\partial x}, \\ & y^3 x \frac{\partial}{\partial y}, y^9 \frac{\partial}{\partial x}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^4 x \frac{\partial}{\partial y}, y^{10} \frac{\partial}{\partial x}, y^8 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & y^5 x \frac{\partial}{\partial y}, y^{11} \frac{\partial}{\partial x}, y^9 \frac{\partial}{\partial y}, y^{12} \frac{\partial}{\partial x}, y^{10} \frac{\partial}{\partial y}, y^{11} \frac{\partial}{\partial y}, y^{12} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^{11}, y^{12}\}$

2.3 E_{20} 型特異点 : $x^3 + y^{11} + axy^8 + bxy^9$

$f(x, y) = x^3 + y^{11} + axy^8 + bxy^9$ (重みベクトル $(11, 3)$ 擬次数 33)

偏導関数 : $f_x = 3x^2 + by^9 + ay^8, f_y = (8ay^7 + 9by^8)x + 11y^{10}$

標準基底 : $\{y^{13}, 704a^2y^{10} + 512a^3y^7x - 792aby^{11} + 891b^2y^{12}, 3x^2 + ay^8 + by^9\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1, y , y^2 , y^3 , x , y^4 , yx , y^5 , y^2x , y^6 , y^3x , y^7 , y^4x , y^8 , y^5x , y^9 , y^6x , y^7x , y^8x , y^9x ,
0, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 32, 35, 38

Σ の基底

$$\begin{aligned} & \left[3a^3 \frac{1}{y^{10}x^2} + a^4 \left(-\frac{24}{11} \frac{1}{y^{13}x} - \frac{1}{y^2x^4} \right) + \frac{8}{11} a^5 \frac{1}{y^5x^3} - 3a^2b \frac{1}{y^9x^2} - \frac{3}{11} a^3b \frac{1}{y^{12}x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{9}{11} a^4b \frac{1}{y^4x^3} + 3ab^2 \frac{1}{y^8x^2} + \frac{3}{11} a^2b^2 \frac{1}{y^{11}x} - \frac{3}{11} ab^3 \frac{1}{y^{10}x} + \frac{3}{11} b^4 \frac{1}{y^9x} \right], \\ & \left[3a^2 \frac{1}{y^9x^2} + a^3 \left(-\frac{1}{y^4x} - \frac{24}{11} \frac{1}{y^{12}x} \right) + \frac{8}{11} a^4 \frac{1}{y^4x^3} - \frac{51}{8} ab \frac{1}{y^8x^2} + \frac{24}{11} a^2b \frac{1}{y^{11}x} - \frac{24}{11} ab^2 \frac{1}{y^{10}x} \frac{24}{11} b^3 \frac{1}{y^9x} \right], \\ & \left[-\frac{33}{8} a \frac{1}{y^8x^2} 3a^2 \frac{1}{y^{11}x} - a^3 \frac{1}{y^3x^3} - 3ab \frac{1}{y^{10}x} + 3b^2 \frac{1}{y^9x} \right], \left[\frac{1}{y^7x^2} \right], \left[\frac{1}{y^6x^2} \right], \\ & \left[3a \frac{1}{y^{10}x} - a^2 \frac{1}{y^2x^3} - 3b \frac{1}{y^9x} \right], \left[3 \frac{1}{y^9x} - a \frac{1}{y^4x^3} \right], \left[\frac{1}{y^5x^2} \right], \left[\frac{1}{y^8x} \right], \left[\frac{1}{y^4x^2} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^7x} \right], \left[\frac{1}{y^3x^2} \right], \left[\frac{1}{y^6x} \right], \left[\frac{1}{y^2x^2} \right], \left[\frac{1}{y^5x} \right], \left[\frac{1}{y^2x} \right], \left[\frac{1}{y^4x} \right], \left[\frac{1}{y^3x} \right], \left[\frac{1}{y^2x} \right], \left[\frac{1}{yx} \right] \end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned} & (-3520a^2y^2x + 512a^4y^7 + 5896aby^3x - 8569b^2y^4x) \frac{\partial}{\partial x} + 256a^3x \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (3584a^4y^7 + 40392aby^3x - 59103b^2y^4x) \frac{\partial}{\partial x} + (5280a^2y^3 + 1152a^3x) \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (-264ay^3x + 64a^3y^8 + 561by^4x) \frac{\partial}{\partial x}, (-64a^3y^8 - 297by^4x) \frac{\partial}{\partial x} + 48a^2yx \frac{\partial}{\partial y}, (32a^3y^8 + 297by^4x) \frac{\partial}{\partial x} + 33ay^4 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (-33y^4x + 8a^2y^9) \frac{\partial}{\partial x}, -4ay^9 \frac{\partial}{\partial x} + 3y^2x \frac{\partial}{\partial y}, 32a^2y^9 \frac{\partial}{\partial x} + 33y^5 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^5x \frac{\partial}{\partial x}, y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^6x \frac{\partial}{\partial x}, y^4x \frac{\partial}{\partial y}, y^8 \frac{\partial}{\partial y}, y^7x \frac{\partial}{\partial x}, \\ & y^5x \frac{\partial}{\partial y}, y^9 \frac{\partial}{\partial y}, y^8x \frac{\partial}{\partial x}, y^6x \frac{\partial}{\partial y}, y^9x \frac{\partial}{\partial x}, y^7x \frac{\partial}{\partial y}, y^8x \frac{\partial}{\partial y}, y^9x \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^8x, y^9x\}$

2.4 Z_{17} 型特異点 : $x^3y + y^8 + (a + by)xy^6$

$f(x, y) = x^3y + y^8 + (a + by)xy^6$ (重みベクトル $(7, 3)$ 擬次数 24)

偏導関数 : $f_x = 3y^2 + ay^6 + by^7, f_y = x^3 + 8y^7 + (6ay^5 + 7by^6)x$

標準基底 : $\{y^{10}, -408ay^8 - 289a^2y^6x + 480by^9, 3yx^2 + ay^6 + by^7, a^2(-289x^3 - 2312y^7) - 1734a^3y^5x + 2856aby^8 - 3360b^2y^9\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1, y , y^2 , x , y^3 , yx , y^4 , y^2x , x^2 , y^5 , y^3x , y^6 , y^4x , y^7 , y^5x , y^6x , y^7x ,
0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 28

2.4.2.1

$$\begin{aligned} & \left[a^2 \left(\frac{1}{8} \frac{1}{y^8 x^2} - \frac{1}{y x^5} \right) + a^3 \left(-\frac{17}{192} \frac{1}{y^{10} x} - \frac{1}{24} \frac{1}{y^3 x^4} \right) + \frac{17}{576} a^4 \frac{1}{y^5 x^3} - \frac{1}{8} a b \frac{1}{y^7 x^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{64} a^2 b \frac{1}{y^9 x} + \frac{5}{144} a^3 b \frac{1}{y^4 x^3} + \frac{1}{64} a b^2 \frac{1}{y^8 x} + \frac{1}{8} b^2 \frac{1}{y^6 x^2} - \frac{1}{64} b^3 \frac{1}{y^7 x} \right], \\ & \left[3a \frac{1}{y^7 x^2} + a^2 \left(-\frac{1}{y^2 x^4} - \frac{17}{8} \frac{1}{y^9 x} \right) + \frac{17}{24} a^3 \frac{1}{y^4 x^3} + \frac{17}{8} a b \frac{1}{y^8 x} - \frac{19}{3} b \frac{1}{y^6 x^2} - \frac{17}{8} b^2 \frac{1}{y^7 x} \right], \\ & \left[\frac{1}{6} \frac{1}{y^6 x^2} - a \frac{1}{y x^4} \right], \left[a \left(\frac{3}{4} \frac{1}{y^8 x} - 6 \frac{1}{y x^4} \right) - \frac{1}{4} a^2 \frac{1}{y^3 x^3} - \frac{3}{4} b \frac{1}{y^7 x} \right], \\ & \left[3a \frac{1}{y^8 x} - 4 \frac{1}{y^6 x^2} - a^2 \frac{1}{y^3 x^3} - 3b \frac{1}{y^7 x} \right], \left[\frac{1}{y^5 x^2} \right], \left[3 \frac{1}{y^7 x} - a \frac{1}{y^2 x^3} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^4 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^6 x} \right], \left[\frac{1}{y x^3} \right], \left[\frac{1}{y^3 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^5 x} \right], \left[\frac{1}{y^2 x^2} \right], \left[\frac{1}{y^4 x} \right], \left[\frac{1}{y x^2} \right], \left[\frac{1}{y^3 x} \right], \left[\frac{1}{y^2 x} \right], \left[\frac{1}{y x} \right] \end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned} & (17051a^2bx^2 - 44064a^2yx + 10404a^4y^4 + 141576aby^2x - 206304b^2y^3x) \frac{\partial}{\partial x} + (7344a^2y^2 + 5202a^3x) \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (-408ay^2x - 85a^2x^2 + 68a^3y^5 + 768by^3x) \frac{\partial}{\partial x}, (714a^2x^2 - 17a^3y^5 - 288by^3x) \frac{\partial}{\partial x} + 306a^2yx \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (1275a^3y^5 + 14880by^3x) \frac{\partial}{\partial x} + (2856ay^3 + 493a^2yx) \frac{\partial}{\partial y}, (-72y^3x + 17a^2y^6) \frac{\partial}{\partial x}, \\ & -5ay^6 \frac{\partial}{\partial x} + 6y^2x \frac{\partial}{\partial y}, 85a^2y^6 \frac{\partial}{\partial x} + 144y^4 \frac{\partial}{\partial y}, y^5 \frac{\partial}{\partial y}, y^4x \frac{\partial}{\partial x}, y^3x \frac{\partial}{\partial y}, \\ & y^7 \frac{\partial}{\partial x}, y^5x \frac{\partial}{\partial x}, y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^4x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^6x \frac{\partial}{\partial x}, y^5x \frac{\partial}{\partial y}, y^7x \frac{\partial}{\partial x}, y^6x \frac{\partial}{\partial y}, y^7x \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^6x, y^7x\}$

2.5 Z_{18} 型特異点 : $x^3y + xy^6 + (a + by)y^9$

$f(x, y) = x^3y + xy^6 + (a + by)y^9$ (重みベクトル $(5, 2)$ 擬次数 17)

偏導関数 : $f_x = 3yx^2 + y^6, f_y = x^3 + 6y^5x + 9ay^8 + 10by^9$

標準基底 : $\{y^{11}, 17y^6x + 27ay^9 + 30by^{10}, 3yx^2 + y^6, x^3 + 6y^5x + 9ay^8 + 10by^9\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1, & y, & y^2, & x, & y^3, & yx, & y^4, & y^2x, & x^2, & y^5, & y^3x, & y^6, & y^4x, & y^7, & y^5x, & y^8, & y^9, & y^{10} \\ 0, & 2, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 18, & 20 \end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned} & \left[a \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{y^{11}x} + \frac{1}{6} \frac{1}{y^6x^3} - \frac{1}{y x^5} \right) + a^2 \left(\frac{27}{34} \frac{1}{y^8x^2} - \frac{9}{34} \frac{1}{y^3x^4} \right) + b \left(-\frac{5}{27} \frac{1}{y^5x^3} + \frac{5}{9} \frac{1}{y^{10}x} \right) - \frac{25}{27} b^2 \frac{1}{y^6x^2} \right], \\ & \left[-\frac{17}{9} \frac{1}{y^{10}x} + \frac{17}{27} \frac{1}{y^5x^3} + a \left(3 \frac{1}{y^7x^2} - \frac{1}{y^2x^4} \right) + \frac{85}{27} b \frac{1}{y^6x^2} \right], \left[\left(3 \frac{1}{y^9x} - \frac{1}{y^4x^3} \right) - \frac{9}{2} a \frac{1}{y^6x^2} \right], \\ & \left[\frac{1}{6} \frac{1}{y^6x^2} - \frac{1}{y x^4} \right], \left[3 \frac{1}{y^8x} - \frac{1}{y^3x^3} \right], \left[\frac{1}{y^5x^2} \right], \left[3 \frac{1}{y^7x} - \frac{1}{y^2x^3} \right], \left[\frac{1}{y^4x^2} \right], \left[\frac{1}{y^6x} \right], \\ & \left[\frac{1}{y x^3} \right], \left[\frac{1}{y^3x^2} \right], \left[\frac{1}{y^5x} \right], \left[\frac{1}{y^2x^2} \right], \left[\frac{1}{y^4x} \right], \left[\frac{1}{y x^2} \right], \left[\frac{1}{y^3x} \right], \left[\frac{1}{y^2x} \right], \left[\frac{1}{y x} \right] \end{aligned}$$

V の基底 :

$$(4624y^4 - 31212ay^2x + 4131a^2x^2 + 7290a^2by^4x + (-34680b + 6561a^3)y^3x) \frac{\partial}{\partial x} + 2312x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}
& (340y^2x - 153ax^2 - 243a^2y^3x - 270aby^4x) \frac{\partial}{\partial x} + 136y^3 \frac{\partial}{\partial y}, \\
& 5x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2yx \frac{\partial}{\partial y}, (4y^5 - 27ay^3x - 30by^4x) \frac{\partial}{\partial x} + 2yx \frac{\partial}{\partial y}, \\
& 5y^3x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^4 \frac{\partial}{\partial y}, -135ay^4x \frac{\partial}{\partial x} + 34y^2x \frac{\partial}{\partial y}, (17y^6 - 81ay^4x) \frac{\partial}{\partial x}, \\
& 2y^4x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}, 5y^4x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^5 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial x}, \\
& y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^5x \frac{\partial}{\partial x}, y^8 \frac{\partial}{\partial x}, y^4x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^5x \frac{\partial}{\partial y}, y^9 \frac{\partial}{\partial x}, y^8 \frac{\partial}{\partial y}, y^{10} \frac{\partial}{\partial x}, y^9 \frac{\partial}{\partial y}, y^{10} \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^9, y^{10}\}$

2.6 Z_{19} 型特異点 : $x^3y + y^9 + (a + by)xy^7$

$f(x, y) = x^3y + y^9 + (a + by)xy^7$ (重みベクトル $(8, 3)$ 擬次数 27)

偏導関数 : $f_x = 3yx^2 + ay^7 + by^8, f_y = x^3 + 9y^8 + (7ay^6 + 8by^7)x$

標準基底 : $\{y^{11}, -540ay^9 - 400a^2y^7x + 621by^{10}, 3yx^2 + ay^7 + by^8, a^2(-50x^3 - 450y^8) - 350a^3y^6x + 540aby^9 - 621b^2y^{10}\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1, y , y^2 , x , y^3 , yx , y^4 , y^2x , y^5 , x^2 , y^3x , y^6 , y^4x , y^7 , y^5x , y^8 , y^6x , y^7x , y^8x
0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 29, 32

Σ の基底

$$\begin{aligned}
& \left[a^2 \left(\frac{1}{9} \frac{1}{y^9x^2} - \frac{1}{yx^5} \right) + a^3 \left(-\frac{20}{243} \frac{1}{y^{11}x} - \frac{1}{27} \frac{1}{y^3x^4} \right) + \frac{20}{729} a^4 \frac{1}{y^5x^3} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{9} ab \frac{1}{y^8x^2} - \frac{1}{81} a^2b \frac{1}{y^{10}x} + \frac{23}{729} a^3b \frac{1}{y^4x^3} + \frac{1}{81} ab^2 \frac{1}{y^9x} + \frac{1}{9} b^2 \frac{1}{y^7x^2} - \frac{1}{81} b^3 \frac{1}{y^8x} \right], \\
& \left[3a \frac{1}{y^8x^2} + a^2 \left(-\frac{20}{9} \frac{1}{y^{10}x} - \frac{1}{y^2x^4} \right) + \frac{20}{27} a^3 \frac{1}{y^4x^3} + \frac{20}{9} ab \frac{1}{y^9x} - \frac{44}{7} b \frac{1}{y^7x^2} - \frac{20}{9} b^2 \frac{1}{y^8x} \right], \\
& \left[-\frac{27}{7} \frac{1}{y^7x^2} + 3a \frac{1}{y^9x} - a^2 \frac{1}{y^3x^3} - 3b \frac{1}{y^8x} \right], \left[-\frac{1}{9} b \frac{1}{y^8x} + \frac{1}{9} a \frac{1}{y^9x} - \frac{1}{27} a^2 \frac{1}{y^3x^3} - a \frac{1}{yx^4} \right], \left[3 \frac{1}{y^8x} - a \frac{1}{y^2x^3} \right], \\
& \left[\frac{1}{y^6x^2} \right], \left[\frac{1}{y^5x^2} \right], \left[\frac{1}{y^7x} \right], \left[\frac{1}{y^4x^2} \right], \left[\frac{1}{yx^3} \right], \left[\frac{1}{y^6x} \right], \left[\frac{1}{y^3x^2} \right], \\
& \left[\frac{1}{y^5x} \right], \left[\frac{1}{y^2x^2} \right], \left[\frac{1}{y^4x} \right], \left[\frac{1}{yx^2} \right], \left[\frac{1}{y^3x} \right], \left[\frac{1}{y^2x} \right], \left[\frac{1}{yx} \right]
\end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned}
& (-79380a^2yx + 19600a^4y^5 + 255690aby^2x + 34000a^2bx^2 - 366903b^2y^3x) \frac{\partial}{\partial x} + (11340a^2y^2 + 8400a^3x) \frac{\partial}{\partial y}, \\
& (-1620ay^2x - 360a^2x^2 + 280a^3y^6 + 2997by^3x) \frac{\partial}{\partial x}, (192a^2x^2 - 8a^3y^6 - 81by^3x) \frac{\partial}{\partial x} + 72a^2yx \frac{\partial}{\partial y}, \\
& (31023by^3x - 2040a^2x^2 + 2920a^3y^6) \frac{\partial}{\partial x} + 4860ay^3 \frac{\partial}{\partial y}, (-81y^3x + 20a^2y^7) \frac{\partial}{\partial x}, \\
& 9y^7 \frac{\partial}{\partial x} + 2x^2 \frac{\partial}{\partial y}, -ay^7 \frac{\partial}{\partial x} + y^2x \frac{\partial}{\partial y}, 20a^2y^7 \frac{\partial}{\partial x} + 27y^4 \frac{\partial}{\partial y}, 729y^3x \frac{\partial}{\partial x} + 40a^2x^2 \frac{\partial}{\partial y}, 3y^3x \frac{\partial}{\partial x} + y^4 \frac{\partial}{\partial y}, \\
& y^4x \frac{\partial}{\partial x}, y^5 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^5x \frac{\partial}{\partial x}, y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^8 \frac{\partial}{\partial x}, y^4x \frac{\partial}{\partial y}, y^6x \frac{\partial}{\partial x}, \\
& y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^5x \frac{\partial}{\partial y}, y^7x \frac{\partial}{\partial x}, y^8 \frac{\partial}{\partial y}, y^6x \frac{\partial}{\partial y}, y^8x \frac{\partial}{\partial x}, y^7x \frac{\partial}{\partial y}, y^8x \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^7x, y^8x\}$

2.7 W_{17} 型特異点 : $x^4 + xy^5 + (a + by)y^7$

$f(x, y) = x^4 + xy^5 + (a + by)y^7$ (重みベクトル (5, 3) 擬次数 20)

偏導関数 : $f_x = 4x^3 + y^5, f_y = 5y^4x + 7ay^6 + 8by^7$

標準基底 : $\{y^9, 5y^4x + 7ay^6 + 8by^7, 4x^3 + y^5\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 1, & y, & x, & y^2, & yx, & y^3, & x^2, & y^2x, & y^4, & yx^2, & y^3x, & y^5, & y^2x^2, & y^6, & y^3x^2, & y^7, & y^8 \\ 0, & 3, & 5, & 6, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 18, & 19, & 21, & 24 \end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned} & \left[a \left(\frac{20}{7} \frac{1}{y^9x} - \frac{5}{7} \frac{1}{y^4x^4} \right) + a^2 \left(\frac{1}{y^2x^5} - 4 \frac{1}{y^7x^2} \right) + \frac{28}{5} a^3 \frac{1}{y^5x^3} + b \left(\frac{40}{49} \frac{1}{y^3x^4} - \frac{160}{49} \frac{1}{y^{10}x} \right) + \frac{256}{49} b^2 \frac{1}{y^5x^2} \right], \\ & \left[\frac{20}{7} \frac{1}{y^8x} - \frac{5}{7} \frac{1}{y^3x^4} + a \left(\frac{1}{yx^5} - 4 \frac{1}{y^6x^2} \right) - \frac{32}{7} b \frac{1}{y^5x^2} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^4x^3} \right], \left[-4 \frac{1}{y^7x} + \frac{28}{5} a \frac{1}{y^5x^2} + \frac{1}{y^2x^4} \right], \left[\frac{1}{y^3x^3} \right], \left[-4 \frac{1}{y^6x} + \frac{1}{yx^4} \right], \left[\frac{1}{y^4x^2} \right], \left[\frac{1}{y^2x^3} \right], \left[\frac{1}{y^5x} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^3x^2} \right], \left[\frac{1}{yx^3} \right], \left[\frac{1}{y^4x} \right], \left[\frac{1}{y^2x^2} \right], \left[\frac{1}{y^3x} \right], \left[\frac{1}{yx^2} \right], \left[\frac{1}{y^2x} \right], \left[\frac{1}{yx} \right] \end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned} & (4375ax^2 + 1715a^3y^4 + (-5000b - 9604a^4)yx^2) \frac{\partial}{\partial x} - 3675a^2y^3 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & -200byx^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-105ayx - 147a^2y^3) \frac{\partial}{\partial y}, (-125y^2x + 35ay^4 - 196a^2yx^2) \frac{\partial}{\partial x} - 75y^3 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (-15y^4 + 119ayx^2) \frac{\partial}{\partial x} - 15x^2 \frac{\partial}{\partial y}, 25yx^2 \frac{\partial}{\partial x} - 21ay^4 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & -5y^3x \frac{\partial}{\partial x} - 3y^4 \frac{\partial}{\partial y}, (-5y^2x - 7ay^4) \frac{\partial}{\partial y}, yx^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^5 \frac{\partial}{\partial x}, y^2x^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^5 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & y^6 \frac{\partial}{\partial x}, y^2x^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial x}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^8 \frac{\partial}{\partial x}, y^8 \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^7, y^8\}$

2.8 W_{18} 型特異点 : $x^4 + y^7 + (a + by)x^2y^4$

$f(x, y) = x^4 + y^7 + (a + by)x^2y^4$ (重みベクトル (7, 4) 擬次数 28)

偏導関数 : $f_x = 4x^3 + (2ay^4 + 2by^5)x, f_y = (4ay^3 + 5by^4)x^2 + 7y^6$

標準基底 : $\{y^9, y^6x, -64a^3y^3x^2 - 112a^2y^6 + 140aby^7 - 175b^2y^8, 2x^3 + (ay^4 + by^5)x\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 1, & y, & x, & y^2, & yx, & y^3, & x^2, & y^2x, & y^4, & yx^2, & y^3x, & y^5, & y^2x^2, & y^4x, & y^3x^2, & y^5x, & y^4x^2, & y^5x^2 \\ 0, & 4, & 7, & 8, & 11, & 12, & 14, & 15, & 16, & 18, & 19, & 20, & 22, & 23, & 26, & 27, & 30, & 34 \end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned} & \left[-2a \frac{1}{y^6x^3} + a^2 \left(\frac{1}{y^2x^5} + \frac{8}{7} \frac{1}{y^9x} \right) + \frac{2}{7} ab \frac{1}{y^8x} + 2b \frac{1}{y^5x^3} - \frac{10}{7} b^2 \frac{1}{y^7x} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^5x^3} - \frac{4}{7} a \frac{1}{y^7x} \right], \left[-2 \frac{1}{y^4x^3} + a \left(\frac{1}{yx^5} + \frac{8}{7} \frac{1}{y^8x} \right) + \frac{10}{7} b \frac{1}{y^7x} \right], \\ & \left[-2a \frac{1}{y^6x^2} + a^2 \frac{1}{y^2x^4} + 2b \frac{1}{y^5x^2} \right], \left[-2 \frac{1}{y^5x^2} + a \frac{1}{yx^4} \right], \left[\frac{1}{y^3x^3} \right], \left[\frac{1}{y^6x} \right], \left[\frac{1}{y^4x^2} \right], \left[\frac{1}{y^2x^3} \right], \\ & \left[\frac{1}{y^5x} \right], \left[\frac{1}{y^3x^2} \right], \left[\frac{1}{yx^3} \right], \left[\frac{1}{y^4x} \right], \left[\frac{1}{y^2x^2} \right], \left[\frac{1}{y^3x} \right], \left[\frac{1}{yx^2} \right], \left[\frac{1}{y^2x} \right], \left[\frac{1}{yx} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (21ax^2 + 7a^2y^4 + (-21b - 2a^3)yx^2)\frac{\partial}{\partial x}, (-28a^2y^4 + (105b + 8a^3)yx^2)\frac{\partial}{\partial x} + 42ayx\frac{\partial}{\partial y}, \\
& -21y^2x\frac{\partial}{\partial x} + 4ax^2\frac{\partial}{\partial y}, (7y^3 + 2ax^2)\frac{\partial}{\partial y}, (3yx^2 + ay^5)\frac{\partial}{\partial x}, -2ay^5\frac{\partial}{\partial x} + 3y^2x\frac{\partial}{\partial y}, \\
& y^3x\frac{\partial}{\partial x}, y^4\frac{\partial}{\partial y}, yx^2\frac{\partial}{\partial y}, y^3x\frac{\partial}{\partial y}, y^2x^2\frac{\partial}{\partial x}, y^4x\frac{\partial}{\partial x}, y^5\frac{\partial}{\partial y}, y^2x^2\frac{\partial}{\partial y}, y^4x\frac{\partial}{\partial y}, y^3x^2\frac{\partial}{\partial x}, \\
& y^5x\frac{\partial}{\partial x}, y^3x^2\frac{\partial}{\partial y}, y^5x\frac{\partial}{\partial y}, y^4x^2\frac{\partial}{\partial x}, y^4x^2\frac{\partial}{\partial y}, y^5x^2\frac{\partial}{\partial x}, y^5x^2\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^4x^2, y^5x^2\}$

2.9 Q_{16} 型特異点 : $x^3 + yz^2 + y^7 + (a + by)xy^5$

$f(x, y, z) = x^3 + yz^2 + y^7 + (a + by)xy^5$ (重みベクトル $(7, 3, 9)$ 擬次数 21)

偏導関数 : $f_z = 2zy$, $f_x = 3x^2 + ay^5 + by^6$, $f_y = 7y^6 + z^2 + (5ay^4 + 6by^5)x$

標準基底 :

$$\{y^9, -35ay^7 - 25a^2y^5x + 42by^8, 3x^2 + ay^5 + by^6, zy, a^2(-175y^6 - 25z^2) - 125a^3y^4x + 210aby^7 - 252b^2y^8\}$$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1, & y, & y^2, & x, & z, & y^3, & yx, & y^4, & y^2x, & y^5, & zx, & y^3x, & y^6, & y^4x, & y^5x, & y^6x \\
0, & 3, & 6, & 7, & 9, & 9, & 10, & 12, & 13, & 15, & 16, & 16, & 18, & 19, & 22, & 25
\end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned}
& \left[a^2 \left(\frac{1}{7} \frac{1}{zy^7x^2} - \frac{1}{z^3yx^2} \right) + a^3 \left(-\frac{5}{49} \frac{1}{zy^9x} - \frac{1}{21} \frac{1}{zy^2x^4} \right) + \frac{5}{147} a^4 \frac{1}{zy^4x^3} - \frac{1}{7} ab \frac{1}{zy^6x^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{49} a^2 b \frac{1}{zy^8x} + \frac{2}{49} a^3 b \frac{1}{zy^3x^3} + \frac{1}{49} ab^2 \frac{1}{zy^7x} + \frac{1}{7} b^2 \frac{1}{zy^5x^2} - \frac{1}{49} b^3 \frac{1}{zy^6x} \right], \\
& \left[3a \frac{1}{zy^6x^2} + a^2 \left(-\frac{15}{7} \frac{1}{zy^8x} - \frac{1}{zy^4x^4} \right) + \frac{5}{7} a^3 \frac{1}{zy^3x^3} + \frac{15}{7} ab \frac{1}{zy^7x} - \frac{33}{5} b \frac{1}{zy^5x^2} - \frac{15}{7} b^2 \frac{1}{zy^6x} \right], \\
& \left[\frac{1}{5} \frac{1}{zy^5x^2} - a \frac{1}{z^3yx} \right], \left[a \left(-21 \frac{1}{z^3yx} + 3 \frac{1}{zy^7x} \right) - 3b \frac{1}{zy^6x} - a^2 \frac{1}{zy^3x^3} \right], \left[\frac{1}{zy^4x^2} \right], \left[\frac{1}{z^2yx^2} \right], \\
& \left[3 \frac{1}{zy^6x} - a \frac{1}{zy^3x^3} \right], \left[\frac{1}{zy^3x^2} \right], \left[\frac{1}{zy^5x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x^2} \right], \left[\frac{1}{zy^4x} \right], \left[\frac{1}{z^2yx} \right], \left[\frac{1}{zyx^2} \right], \left[\frac{1}{zy^3x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x} \right], \left[\frac{1}{zyx} \right]
\end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned}
& (-210ay^2x + 50a^3y^5 + 462by^3x)\frac{\partial}{\partial x} - 75a^2zx\frac{\partial}{\partial z}, (-25a^3y^5 - 126by^3x)\frac{\partial}{\partial x} + 30a^2yx\frac{\partial}{\partial y} + 90a^2zx\frac{\partial}{\partial z}, \\
& (25a^3y^5 + 252by^3x)\frac{\partial}{\partial x} + 42ay^3\frac{\partial}{\partial y} - 30a^2zx\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial y} + (7y^5 + 5ay^3x + 6by^4x)\frac{\partial}{\partial z}, \\
& (-21y^3x + 5a^2y^6)\frac{\partial}{\partial x}, -5ay^6\frac{\partial}{\partial x} + 6y^2x\frac{\partial}{\partial y}, 25a^2y^6\frac{\partial}{\partial x} + 42y^4\frac{\partial}{\partial y}, (7y^6 + 5ay^4x + 6by^5x)\frac{\partial}{\partial z}, zx\frac{\partial}{\partial x}, \\
& y^5\frac{\partial}{\partial y}, y^4x\frac{\partial}{\partial x}, zx\frac{\partial}{\partial y} + 7y^5x\frac{\partial}{\partial z}, y^3x\frac{\partial}{\partial y}, y^6\frac{\partial}{\partial y}, y^5x\frac{\partial}{\partial x}, y^6x\frac{\partial}{\partial x}, y^4x\frac{\partial}{\partial y}, y^6x\frac{\partial}{\partial z}, y^5x\frac{\partial}{\partial y}, y^6x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^5x, y^6x\}$

2.10 Q_{17} 型特異点 : $x^3 + yz^2 + xy^5 + (a + by)y^8$

$f(x, y, z) = x^3 + yz^2 + xy^5 + (a + by)y^8$ (重みベクトル (10, 4, 13) 擬次数 30)

偏導関数 : $f_z = 2zy, f_x = 3x^2 + y^5, f_y = 5y^4x + z^2 + 8ay^7 + 9by^8$

標準基底 : $\{y^{10}, 5y^5x + 8ay^8 + 9by^9, 3x^2 + y^5, zy, 5y^4x + z^2 + 8ay^7 + 9by^8\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 1, & y, & y^2, & x, & y^3, & z, & yx, & y^4, & y^2x, & y^5, & y^3x, & zx, & y^6, & y^4x, & y^7, & y^8, & y^9 \\ 0, & 4, & 8, & 10, & 12, & 13, & 14, & 16, & 18, & 20, & 22, & 23, & 24, & 26, & 28, & 32, & 36 \end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned} & \left[a \left(-\frac{3}{5} \frac{1}{zy^{10}x} - \frac{1}{z^3yx^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{zy^5x^3} \right) + a^2 \left(\frac{24}{25} \frac{1}{zy^7x^2} - \frac{8}{25} \frac{1}{zy^2x^4} \right) + b \left(\frac{27}{40} \frac{1}{zy^9x} - \frac{9}{40} \frac{1}{zy^4x^3} \right) - \frac{243}{200} b^2 \frac{1}{zy^5x^2} \right], \\ & \left[-\frac{15}{8} \frac{1}{zy^9x} + \frac{5}{8} \frac{1}{zy^4x^3} + a \left(3 \frac{1}{zy^6x^2} - \frac{1}{zyx^4} \right) + \frac{27}{8} b \frac{1}{zy^5x^2} \right], \\ & \left[3 \frac{1}{zy^8x} - \frac{1}{zy^3x^3} - \frac{24}{5} a \frac{1}{zy^5x^2} \right], \left[-\frac{1}{z^3yx} + \frac{1}{5} \frac{1}{zy^5x^2} \right], \left[3 \frac{1}{zy^7x} - \frac{1}{zy^2x^3} \right], \\ & \left[\frac{1}{z^2yx^2} \right], \left[\frac{1}{zy^4x^2} \right], \left[3 \frac{1}{zy^6x} - \frac{1}{zyx^3} \right], \left[\frac{1}{zy^3x^2} \right], \left[\frac{1}{zy^5x} \right], \\ & \left[\frac{1}{zy^2x^2} \right], \left[\frac{1}{z^2yx} \right], \left[\frac{1}{zy^4x} \right], \left[\frac{1}{zyx^2} \right], \left[\frac{1}{zy^3x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x} \right], \left[\frac{1}{zyx} \right] \end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned} & 25y^2x \frac{\partial}{\partial x} + 10y^3 \frac{\partial}{\partial y} - 12azx \frac{\partial}{\partial z}, (-8ay^3 - 9by^4)x \frac{\partial}{\partial x} + 2yx \frac{\partial}{\partial y} + 4zx \frac{\partial}{\partial z}, \\ & (10y^5 - 48ay^3x - 54by^4x) \frac{\partial}{\partial x} - 15zx \frac{\partial}{\partial z}, 8az \frac{\partial}{\partial y} + (40ay^3x + 64a^2y^6 - 45by^4x - 81b^2y^8) \frac{\partial}{\partial z}, \\ & (5y^6 - 24ay^4x) \frac{\partial}{\partial x}, 5y^3x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^4 \frac{\partial}{\partial y}, -4ay^4x \frac{\partial}{\partial x} + y^2x \frac{\partial}{\partial y}, \\ & (5y^4x + 8ay^7 + 9by^8) \frac{\partial}{\partial z}, zx \frac{\partial}{\partial x}, y^7 \frac{\partial}{\partial x}, 5y^4x \frac{\partial}{\partial x} + 2y^5 \frac{\partial}{\partial y}, \\ & y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^6 \frac{\partial}{\partial y}, 3zx \frac{\partial}{\partial y} - 5y^8 \frac{\partial}{\partial z}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^4x \frac{\partial}{\partial y}, y^8 \frac{\partial}{\partial x}, y^8 \frac{\partial}{\partial y}, y^9 \frac{\partial}{\partial y}, y^9 \frac{\partial}{\partial x}, y^9 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^8, y^9\}$

2.11 Q_{18} 型特異点 : $x^3 + yz^2 + y^8 + (a + by)xy^6$

$f(x, y, z) = x^3 + yz^2 + y^8 + (a + by)xy^6$ (擬次数 (16, 6, 21) 重みベクトル 48)

偏導関数 : $f_z = 2zy, f_x = 3x^2 + ay^6 + by^7, f_y = (6ay^5 + 7by^6)x + 8y^7 + z^2$

標準基底 : $\{y^{10}, -12ay^8 - 9a^2y^6x + 14by^9, 3x^2 + ay^6 + by^7, zy, a^2(-72y^7 - 9z^2) - 54a^3y^5x + 84aby^8 - 98b^2y^9\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 1, & y, & y^2, & x, & y^3, & z, & yx, & y^4, & y^2x, & y^5, & y^3x, & y^6, & zx, & y^4x, & y^7, & y^5x, & y^6x, & y^7x \\ 0, & 6, & 12, & 16, & 18, & 21, & 22, & 24, & 28, & 30, & 34, & 36, & 37, & 40, & 42, & 46, & 52, & 58 \end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned} & \left[a^2 \left(\frac{1}{8} \frac{1}{zy^8x^2} - \frac{1}{z^3yx^2} \right) + a^3 \left(-\frac{1}{24} \frac{1}{zy^2x^4} - \frac{3}{32} \frac{1}{zy^{10}x} \right) + \frac{1}{32} a^4 \frac{1}{zy^4x^3} - \frac{1}{8} ab \frac{1}{zy^7x^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{64} a^2 b \frac{1}{zy^9x} + \frac{7}{192} a^3 b \frac{1}{zy^3x^3} + \frac{1}{64} ab^2 \frac{zy^8x}{zy^6x^2} + \frac{1}{8} b^2 \frac{1}{zy^6x^2} - \frac{1}{64} b^3 \frac{1}{zy^7x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[3a \frac{1}{zy^7x^2} + a^2 \left(-\frac{1}{zyx^4} - \frac{9}{4} \frac{1}{zy^9x} \right) + \frac{3}{4} a^3 \frac{1}{zy^3x^3} + \frac{9}{4} ab \frac{1}{zy^8x} - \frac{13}{2} b \frac{1}{zy^6x^2} - \frac{9}{4} b^2 \frac{1}{zy^7x} \right], \\
& \left[\frac{1}{6} \frac{1}{zy^6x^2} - a \frac{1}{z^2yx} \right], \left[3a \frac{1}{zy^8x} - 4 \frac{1}{zy^6x^2} - a^2 \frac{1}{zy^2x^3} - 3b \frac{1}{zy^7x} \right], \left[\frac{1}{zy^5x^2} \right], \\
& \left[\frac{1}{z^2yx^2} \right], \left[3 \frac{1}{zy^7x} - a \frac{1}{zyx^3} \right], \left[\frac{1}{zy^4x^2} \right], \left[\frac{1}{zy^6x} \right], \left[\frac{1}{zy^3x^2} \right], \left[\frac{1}{zy^5x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x^2} \right], \\
& \left[\frac{1}{z^2yx} \right], \left[\frac{1}{zy^4x} \right], \left[\frac{1}{zyx^2} \right], \left[\frac{1}{zy^3x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x} \right], \left[\frac{1}{zyx} \right]
\end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned}
& (-24ay^2x + 6a^3y^6 + 52by^3x) \frac{\partial}{\partial x} - 9a^2zx \frac{\partial}{\partial z}, (-28by^3x - 6a^3y^6) \frac{\partial}{\partial x} + 6a^2yx \frac{\partial}{\partial y} + 21a^2zx \frac{\partial}{\partial z}, \\
& (3a^3y^6 + 28by^3x) \frac{\partial}{\partial x} + 4ay^3 \frac{\partial}{\partial y} - 3a^2zx \frac{\partial}{\partial z}, z \frac{\partial}{\partial y} + (8y^6 + 6ay^4x + 7by^5x) \frac{\partial}{\partial z}, (-4y^3x + a^2y^7) \frac{\partial}{\partial x}, \\
& -ay^7 \frac{\partial}{\partial x} + y^2x \frac{\partial}{\partial y}, 3a^2y^7 \frac{\partial}{\partial x} + 4y^4 \frac{\partial}{\partial y}, (7y^6x + 8y^7 + 6ay^5x) \frac{\partial}{\partial z}, zx \frac{\partial}{\partial x}, y^4x \frac{\partial}{\partial x}, y^5 \frac{\partial}{\partial y}, \\
& y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^5x \frac{\partial}{\partial x}, zx \frac{\partial}{\partial y} + 8y^6x \frac{\partial}{\partial z}, y^4x \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}, y^6x \frac{\partial}{\partial x}, y^7x \frac{\partial}{\partial z}, y^5x \frac{\partial}{\partial y}, y^7x \frac{\partial}{\partial x}, y^6x \frac{\partial}{\partial y}, y^7x \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^6x, y^7x\}$

2.12 S_{16} 型特異点 : $x^2z + yz^2 + xy^4 + (a + by)y^6$

$f(x, y, z) = x^2z + yz^2 + xy^4 + (a + by)y^6$ (重みベクトル $(5, 3, 7)$ 擬次数 17)

偏導関数 : $f_z = x^2 + 2zy, f_x = 2zx + y^4, f_y = 4y^3x + z^2 + 6ay^5 + 7by^6$

標準基底 : $\{y^8, 17y^4x + 24ay^6 + 28by^7, -576a^2y^7 + 289y^3x^2, -x^3 + y^5, x^2 + 2zy, 2zx + y^4, 4y^3x + z^2 + 6ay^5 + 7by^6\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1, & y, & x, & y^2, & z, & yx, & y^3, & x^2, & y^2x, & y^4, & yx^2, & y^3x, & y^5, & y^2x^2, & y^6, & y^7 \\
0, & 3, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 18, & 21
\end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned}
& \left[a \left(\frac{1}{2} \frac{1}{zy^8x} + \frac{1}{z^4yx} - \frac{1}{4} \frac{1}{z^2y^4x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{zy^3x^4} \right) + a^2 \left(-\frac{12}{17} \frac{1}{zy^6x^2} - \frac{3}{17} \frac{1}{z^3y^3x} + \frac{6}{17} \frac{1}{z^2y^2x^3} - \frac{12}{17} \frac{1}{zyx^5} \right) \right. \\
& + a^3 \left(-\frac{144}{289} \frac{1}{z^2y^5x} + \frac{72}{289} \frac{1}{z^3yx^2} + \frac{288}{289} \frac{1}{zy^4x^3} \right) + b \left(\frac{7}{24} \frac{1}{z^2y^3x^2} - \frac{7}{12} \frac{1}{zy^7x} - \frac{7}{12} \frac{1}{zy^2x^4} \right) + \frac{49}{48} b^2 \frac{1}{zy^4x^2} \Big], \\
& \left[\frac{17}{12} \frac{1}{zy^7x} - \frac{17}{24} \frac{1}{z^2y^3x^2} + \frac{17}{12} \frac{1}{zy^2x^4} + a \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{z^3y^2x} - 2 \frac{1}{zy^5x^2} + \frac{1}{z^2yx^3} \right) - \frac{119}{48} b \frac{1}{zy^4x^2} \right], \\
& \left[\frac{1}{zy^3x^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^4x} \right], \left[a \left(\frac{1}{zy^6x} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^2x^2} + \frac{1}{zyx^4} \right) - \frac{3}{2} a^2 \frac{1}{zy^4x^2} \right], \\
& \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{zy^4x^2} + \frac{1}{z^3yx} \right], \left[\frac{1}{zy^2x^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^3x} \right], \left[-2 \frac{1}{zy^5x} + \frac{1}{z^2yx^2} \right], \left[\frac{1}{zy^3x^2} \right], \left[\frac{1}{zyx^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^2x} \right], \\
& \left[\frac{1}{zy^4x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x^2} \right], \left[\frac{1}{z^2yx} \right], \left[\frac{1}{zy^3x} \right], \left[\frac{1}{zyx^2} \right], \left[\frac{1}{zy^2x} \right], \left[\frac{1}{zyx} \right]
\end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned}
& (-9826y^3 - 19652ax^2) \frac{\partial}{\partial x} - 4913z \frac{\partial}{\partial y} \\
& + (-9826y^2x - 9826ay^4 + 9792a^3y^3x + (-34391b + 13824a^4)y^5 - 48552aby^2x^2 + 112896a^3by^6) \frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 24565x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 20808ay^3 \frac{\partial}{\partial y} + (-24565y^4 - 10404ayx^2 - 41616a^2y^3x - 58752a^3y^5 - 60690by^2x^2 + 52416a^2by^6) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -170y^2x \frac{\partial}{\partial x} - 102y^3 \frac{\partial}{\partial y} + (119yx^2 - 204ay^3x - 288a^2y^5 - 336aby^6) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& (-9826yx - 13872ay^3) \frac{\partial}{\partial y} + (-4913y^4 - 6936ayx^2 + 80640a^2by^6 - 40460by^2x^2) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -83521y^4 \frac{\partial}{\partial x} + (-334084y^3x - 589560ay^5 - 249696a^2y^2x^2 + 497664a^4y^6 - 687820by^6) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -83521x^2 \frac{\partial}{\partial y} + (-1002252y^3x - 1355988ay^5 + 416160a^2y^2x^2 + (-1581986b - 829440a^4)y^6) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -9826y^2x \frac{\partial}{\partial y} + (-4913y^5 - 34680ay^2x^2 + 69120a^3y^6) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -4913yx^2 \frac{\partial}{\partial x} + (4913y^5 + 10404ay^2x^2 - 20736a^3y^6) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -289y^4 \frac{\partial}{\partial y} + (578y^2x^2 - 1440a^2y^6) \frac{\partial}{\partial z}, -17yx^2 \frac{\partial}{\partial y} + 12ay^6 \frac{\partial}{\partial z}, -17y^5 \frac{\partial}{\partial x} - 24ay^6 \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -2y^3x \frac{\partial}{\partial y} - y^6 \frac{\partial}{\partial z}, y^2x^2 \frac{\partial}{\partial x} - y^6 \frac{\partial}{\partial z}, -578y^3x \frac{\partial}{\partial x} + (-289y^2x^2 + 1728a^2y^6) \frac{\partial}{\partial z}, y^5 \frac{\partial}{\partial y}, \\
& y^6 \frac{\partial}{\partial x}, y^2x^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial z}, y^7 \frac{\partial}{\partial x}, y^6 \frac{\partial}{\partial y}, y^7 \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^6, y^7\}$

2.13 S_{17} 型特異点 : $x^2z + yz^2 + y^6 + (a + by)x^2y^3$

$f(x, y, z) = x^2z + yz^2 + y^6 + (a + by)x^2y^3$ (重みベクトル $(7, 4, 10)$ 擬次数 24)

偏導関数 : $f_z = x^2 + 2zy, f_x = (2by^4 + 2ay^3 + 2z)x, f_y = (4by^3 + 3ay^2)x^2 + 6y^5 + z^2$

標準基底 : $\{y^8, y^5x, -84ay^6 - 49a^2y^3x^2 + 108by^7, -x^3 + 2ay^4x, x^2 + 2zy, (z + ay^3 + by^4)x, a^2(-294y^5 - 49z^2) - 147a^3y^2x^2 + 336aby^6 - 432b^2y^7\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y ,	x ,	y^2 ,	z ,	yx ,	y^3 ,	x^2 ,	y^2x ,	y^4 ,	yx^2 ,	y^3x ,	y^5 ,	y^2x^2 ,	y^4x ,	y^3x^2 ,	y^4x^2
0,	4,	7,	8,	10,	11,	12,	14,	15,	16,	18,	19,	20,	22,	23,	26,	30

Σ の基底

$$\begin{aligned}
& \left[a \left(\frac{1}{3} \frac{1}{zy^5x^3} + \frac{1}{z^4yx} - \frac{1}{6} \frac{1}{z^2y^6x} \right) + a^2 \left(\frac{1}{6} \frac{1}{z^3y^3x} - \frac{7}{36} \frac{1}{zy^8x} - \frac{1}{3} \frac{1}{z^2y^2x^3} + \frac{2}{3} \frac{1}{zyx^5} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{18} ab \frac{1}{zy^7x} + b \left(\frac{1}{6} \frac{1}{z^2y^5x} - \frac{1}{3} \frac{1}{zy^4x^3} \right) + \frac{2}{9} b^2 \frac{1}{zy^6x} \right], \\
& \left[a \left(-\frac{1}{zy^4x^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^5x} \right) + a \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{z^3y^2x} + \frac{7}{12} \frac{1}{zy^7x} + \frac{1}{z^2yx^3} \right) + \frac{2}{3} b \frac{1}{zy^6x} \right], \\
& \left[\frac{1}{2} a \frac{1}{zy^5x^2} + a^2 \left(\frac{1}{zyx^4} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^2x^2} \right) - \frac{1}{2} b \frac{1}{zy^4x^2} \right], \\
& \left[\frac{1}{zy^3x^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^4x} - \frac{1}{2} a \frac{1}{zy^6x} \right], \left[-\frac{1}{6} \frac{1}{zy^6x} + \frac{1}{z^3yx} \right], \left[-\frac{1}{zy^4x^2} + a \frac{1}{z^2yx^2} \right], \\
& \left[\frac{1}{zy^2x^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^3x} \right], \left[\frac{1}{zy^5x} \right], \left[\frac{1}{zy^3x^2} \right], \left[\frac{1}{zyx^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2y^2x} \right], \\
& \left[\frac{1}{zy^4x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x^2} \right], \left[\frac{1}{z^2yx} \right], \left[\frac{1}{zy^3x} \right], \left[\frac{1}{zyx^2} \right], \left[\frac{1}{zy^2x} \right], \left[\frac{1}{zyx} \right]
\end{aligned}$$

V の基底 :

$$\begin{aligned}
& 36yx \frac{\partial}{\partial x} + (-24y^2 + 28az) \frac{\partial}{\partial y} \\
& + (-48x^2 + 168ay^4 + 84a^2yx^2 + (636b - 336a^3)y^5 + (483ab - 196a^4)y^2x^2 + (477b^2 - 252a^3b)y^3x^2) \frac{\partial}{\partial z} \\
& (9x^2 - 12ay^4) \frac{\partial}{\partial x} + (-6ay^3x - 7a^3y^4x) \frac{\partial}{\partial z}, -24ay^4 \frac{\partial}{\partial x} - 9yx \frac{\partial}{\partial y} + (15ay^3 + (36b - 14a^3)y^4)x \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -24y^3 \frac{\partial}{\partial y} + (-12yx^2 + 300ay^5 + 175a^2y^2x^2 + 225aby^3x^2) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -3y^2x \frac{\partial}{\partial x} + (a(3yx^2 - 24y^5) - 14a^2y^2x^2 - 18aby^3x^2) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -2x^2 \frac{\partial}{\partial y} + (-60y^5 - 37ay^2x^2 - 47by^3x^2) \frac{\partial}{\partial z}, y^2x \frac{\partial}{\partial y} - 3ay^4x \frac{\partial}{\partial z}, \\
& yx^2 \frac{\partial}{\partial x}, -y^3x \frac{\partial}{\partial x} + y^2x^2 \frac{\partial}{\partial z}, 2y^4 \frac{\partial}{\partial y} + y^2x^2 \frac{\partial}{\partial z}, \\
& -2y^5 \frac{\partial}{\partial x} - y^4x \frac{\partial}{\partial z}, yx^2 \frac{\partial}{\partial y} + ay^3x^2 \frac{\partial}{\partial z}, y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^2x^2 \frac{\partial}{\partial x}, -y^4x \frac{\partial}{\partial x} + y^3x^2 \frac{\partial}{\partial z}, 2y^5 \frac{\partial}{\partial y} + y^3x^2 \frac{\partial}{\partial z}, \\
& y^2x^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^4x \frac{\partial}{\partial y}, y^4x^2 \frac{\partial}{\partial z}, y^3x^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^4x^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^4x^2 \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^3x^2, y^4x^2\}$

2.14 U_{16} 型特異点 : $x^3 + xz^2 + y^5 + (a + by)x^2y^2$

$f(x, y, z) = x^3 + xz^2 + y^5 + (a + by)x^2y^2$ (重みベクトル $(5, 3, 5)$ 擬次数 15)

偏導関数 : $f_z = 2zx, f_x = 3x^2 + z^2 + (2ay^2 + 2by^3)x, f_y = 5y^4 + (2ay + 3by^2)x^2$

標準基底 : $\{y^7, 3y^4x + 2ay^6, 20a^2y^4 + 8a^3yx^2 - 30aby^5 + 45b^2y^6, a(6x^3 - 10y^5) + 5by^6, zy^4, zx, 3x^2 + z^2 + (2ay^2 + 2by^3)x\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1, & y, & z, & x, & y^2, & zy, & yx, & y^3, & x^2, & zy^2, & y^2x, & yx^2, & zy^3, & y^3x, & y^2x^2, & y^3x^2 \\
0, & 3, & 5, & 5, & 6, & 8, & 8, & 9, & 10, & 11, & 11, & 13, & 14, & 14, & 16, & 19
\end{array}$$

Σ の基底

$$\begin{aligned}
& \left[a^2 \left(\frac{15}{8} \frac{1}{zy^4x^3} - \frac{45}{8} \frac{1}{z^3y^4x} \right) + a^3 \left(-\frac{5}{4} \frac{1}{zy^2x^4} - \frac{3}{4} \frac{1}{zy^7x} \right) + \frac{1}{2} a^4 \frac{1}{zy^5x^2} \right. \\
& \left. - \frac{15}{8} ab \frac{1}{zy^3x^3} + \left(\frac{45}{8} ab - a^5 \right) \frac{1}{z^3y^3x} - \frac{3}{8} a^2 b \frac{1}{zy^6x} - \frac{1}{2} a^3 b \frac{1}{zy^4x^2} + \frac{9}{8} ab^2 \frac{1}{zy^5x} + a^3 b^2 \frac{1}{z^3yx} \right], \\
& \left[-\frac{3}{2} \frac{1}{zy^3x^3} + a \left(\frac{9}{2} \frac{1}{z^3y^3x} + \frac{1}{zyx^4} + \frac{1}{zyx^4} + \frac{3}{5} \frac{1}{zy^6x} + \frac{1}{zyx^4} \right) + \frac{9}{10} ab \frac{1}{zy^5x} \right], \\
& \left[-\frac{3}{2} \frac{1}{zy^4x^2} + a \frac{1}{zy^2x^3} - \frac{2}{5} a^2 \frac{1}{zy^5x} + 3b \frac{1}{z^3yx} \right], \\
& \left[\frac{1}{z^2y^4x} \right], \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{zy^2x^3} + \frac{1}{z^3y^2x} + \frac{2}{15} a \frac{1}{zy^5x} \right], \left[\frac{1}{zy^3x^2} - 2a \frac{1}{z^3yx} \right], \\
& \left[\frac{1}{z^2y^3x} \right], \left[\frac{1}{zyx^3} - 3 \frac{1}{z^3yx} \right], \left[\frac{1}{zy^4x} \right], \left[\frac{1}{zy^2x^2} \right], \left[\frac{1}{z^2y^2x} \right], \left[\frac{1}{zy^3x} \right], \\
& \left[\frac{1}{zyx^2} \right], \left[\frac{1}{z^2yx} \right], \left[\frac{1}{zy^2x} \right], \left[\frac{1}{zyx} \right]
\end{aligned}$$

V の基底 :

$$-15x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2a^2x^2 \frac{\partial}{\partial y} + (5azy^2 + 5bzy^3) \frac{\partial}{\partial z}, 5y^2x \frac{\partial}{\partial x} - ax^2 \frac{\partial}{\partial y} + 5zy^2 \frac{\partial}{\partial z}, (-90y^3 - 27ax^2) \frac{\partial}{\partial y} - 4a^3zy^3 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}
& (-135yx - 90ay^3) \frac{\partial}{\partial y} + (-90azy^2 - 135bzy^3) \frac{\partial}{\partial z}, zy \frac{\partial}{\partial y}, (3ax^2 + 2a^2y^2x - 3byx^2) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& 2azy^3 \frac{\partial}{\partial x} - 9yx^2 \frac{\partial}{\partial z}, (3yx^2 + 2ay^3x) \frac{\partial}{\partial z}, 10a^2zy^2 \frac{\partial}{\partial x} + (-45ax^2 + (45b - 8a^4)yx^2) \frac{\partial}{\partial z}, \\
& 3yx^2 \frac{\partial}{\partial x} - azy^3 \frac{\partial}{\partial z}, zy^2 \frac{\partial}{\partial y}, 3y^2x \frac{\partial}{\partial y} + 2azy^3 \frac{\partial}{\partial z}, yx^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x \frac{\partial}{\partial x} + zy^3 \frac{\partial}{\partial z}, \\
& y^2x^2 \frac{\partial}{\partial x}, zy^3 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x \frac{\partial}{\partial y}, y^2x^2 \frac{\partial}{\partial z}, y^2x^2 \frac{\partial}{\partial y}, y^3x^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^3x^2 \frac{\partial}{\partial z}, y^3x^2 \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

V の解空間 $H : H = \{1, y^2x^2, y^3x^2\}$

References

- [1] V.I. ARNOLD, S.M. GUSEIN-ZADE and A.N. VARCHENKO, *Singularities of Differentiable Maps Volume I*, Monographs in Mathematics Vol. 82, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *The cohomology classes attached to non-quasihomogeneous singularities of modality 1*, preprint.
- [3] 中村弥生, 田島慎一, Unimodal 例外型特異点における代数的局所コホモロジー類, 京都大学数理解析研究所講究録 1211 (2001), 155–165.
- [4] Y. Nakamura, S. Tajima, *A study of semiquasihomogeneous singularities by using holonomic system*, 京都大学数理解析研究所講究録「ニュートン図形と特異点」 掲載予定.
- [5] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir—a computer algebra system*, in Proc. Internat. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (eds P.S. Wang), ACM New York (1992), 387–396 (ftp: endeavor.fujitsu.co.jp/pub/isis/asir).
- [6] K. SAITO, *Quasihomogene isolierte singularitäten von hyperflächen*, Invent. Math. 14 (1971), 123–142.
- [7] S. TAJIMA and Y. NAKAMURA, *Milnor algebra に付随した Holonomic 系について*, 京都大学数理解析研究所講究録 1212 (2001), 133–143.
- [8] S. TAJIMA, T. OAKU and Y. NAKAMURA, *Multidimensional local residues and holonomic D-modules*, 京都大学数理解析研究所講究録 1033 (1998), 59–70.