

# Doubly stochastic matrices と Farkas の lemma について

東大 飯養 新三郎先生

$E = \mathbb{R}^n$  とし  $E$  のベクトル  $a = (a_i)$ ,  $b = (b_i)$  の  
間に Hardy-Littlewood-Polya の順序  $a \succ b$  を

$$\sum_{i=1}^k a_i^* \geq \sum_{i=1}^k b_i^* \quad (k=1, \dots, n-1),$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^* = \sum_{i=1}^n b_i^*$$

により定義する。ここに  $a_i^*$ ,  $b_i^*$  は  $a_i$ ,  $b_i$  を夫々  
大きいものから順次ならびかえたものである。また  $n$  次正

方形列  $T = (t_{ik})$  が doubly stochastic とは

$$t_{ik} \geq 0 \quad (1 \leq i, k \leq n)$$

$$\sum_{k=1}^n t_{ik} = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ik} = 1 \quad (1 \leq k \leq n)$$

とする。以下 doubly stochastic な行列の全体の  
集合を  $\mathcal{D}$  とする。このとき次の結果はよく知られている。

$$I \quad T \in \mathcal{D}, \quad Ta = b \iff a \succ b$$

$$\text{II} \quad T \in \mathcal{D} \iff \forall a_i \in E, T a_i \prec a_i$$

I, II の中間階層階として次の問題がある。

問題1  $a_i \succ b_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) が成り立つとき  
 $T a_i = b_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) となる  $T \in \mathcal{D}$  が存在

するか？

問題2  $E$  の部分空間  $F$  で定義された  $E$  の中への線型  
 変換  $T$  が  $T a_i \prec a_i$  ( $a_i \in F$ ) を満足するものを  $E$  全  
 体に doubly stochastic に extend できるか？

上の問題に対してそれぞれの変例は下に示すものである。

例1  $E = \mathbb{R}^3$  とし

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

例2  $E = \mathbb{R}^4$   $F = \{(x_i); x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{6}\}$  とし

$T$  は  $F$  の基底  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) により次の形に決まる非線型変換とする。

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T a_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad Ta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 3 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

反例 2 が 問題 2 の反例になることは下の定理 1 より正  
ちにわかる。よって問題 2 のかわりに次の問題を考える。

問題 3  $E$  の部分空間  $F$  で定義された  $E$  の中への線型  
写像  $T$  が  $Ta < a (a \in F)$  となるものが  $\mathbb{R}$  の元  
に extend 出来る 必要十分な条件はなにか?

この解答は次の定理 1 により与えられる。

定理 1  $E = \mathbb{R}^n$  とし  $F$  を  $E$  の部分空間  $T: F \rightarrow \mathbb{R}$  (  
constant 1 のベクトル) とする。更に  $Tx < x (x \in F)$  が  
なりたつとき  $T$  を  $\mathbb{R}$  の元に extend 出来る 条件は  $F$  に  
属する任意の  $n$  個のベクトル  $c_1, \dots, c_n$  に対して

$$T(c_1 \wedge \dots \wedge c_n) \leq T(Tc_1 \wedge \dots \wedge Tc_n) \dots \star$$

がなりたつことである。

$$\text{ここに } a = (a_i), \quad b = (b_i) \text{ に対して}$$

$$T(a) = a_1 + \dots + a_n$$

$$a \wedge b = (\text{Min}(a_i, b_i)) \text{ とする。}$$

一般に  $n$  次元  $\mathbb{R}^n$  に対して 次の性質がなりた  
つことは容易に証明出来る。

$$[A] \quad a \geq b \iff \begin{cases} \|a\|_1 + \|a\|_1 \geq \|a\|_1 + \|b\|_1, \\ \|a\|_1 + \|a\|_\infty \geq \|a\|_1 + \|b\|_\infty \end{cases}$$

$$[B] \quad T \in \mathcal{D} \iff T\mathbb{1} = \mathbb{1}, \|T\|_\infty = \|T\|_1 = 1$$

ここに  $\|a\|_1, \|a\|_\infty$  は  $a$  の  $l_1$  ノルム及び  $l_\infty$  ノルムとし,  $\|T\|_1, \|T\|_\infty$  は  $T$  の  $l_1$  ノルム及び  $l_\infty$  ノルムとする。これを考えると上の定理1は  $E$  の部分空間

$F(\geq \mathbb{1})$  で定義された線型写像  $T$  で  $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$  であ

り且  $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_\infty$  で contraction のものを条件まで同じ性質を保存して extend 出来る条件をよえなくてはなる。

北大の守藤氏のレタキにより上の定理は次の定理の系となることがわかった。(証明は容易である。)

定理2.  $E = \mathbb{R}^n$  とし  $E$  の部分空間  $F$  で定義された  $E$  の中の線型写像  $T$  が positive 且  $\tau(Tx) = \tau(x)$  ( $x \in E$ ) の性質を満たす様に extend 出来る条件は上の  $\star$  である。

Remark. 上の定理の系として  $F$  が  $E$  の sub-lattice のときは上の extension がつねに可能なることがわかる。

定理の証明には次の Minkowsky - Farkas の lemma をつかう。

Lemma (Minkowsky - Farkas)

$A$  を  $(m, n)$  行列  $x$  を  $n$  次元ベクトル,  $b$  を  $m$  次元ベクトル  $b'$  を  $m$  次元行ベクトルとすると

$Ax = b$  かつ  $x \geq 0$  となる解をもつ条件は

$$b'A \geq 0' \implies b'b \geq 0 \quad \text{である。}$$

### 定理2 の証明

$F$  の基底として  $a_1, \dots, a_s$  をとる。  $T$  を doubly stochastic 行列  $\tilde{T} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  に extend 出来るとし、 $Ta_j = b_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ) とする。  $\tilde{T}$  の満たすべき条件は次の形にかける

$$\begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I & \cdots & a_{1n}I \\ a_{21}I & a_{22}I & \cdots & a_{2n}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1}I & a_{s2}I & \cdots & a_{sn}I \\ \mathbb{1}' & 0' & \cdots & 0' \\ 0' & \mathbb{1}' & \cdots & 0' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0' & 0' & \cdots & \mathbb{1}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

上の方程式が  $\theta_1, \dots, \theta_n \geq 0$  となる解をもつ条件をおねねはよいことになる。

ここに  $I$  は  $n \times n$  単位行列とし

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix}, \quad b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

Farkas の lemma により 上の条件は

$$(p_1', \dots, p_s', p') A \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (p_1', \dots, p_s', p') \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2)$$

$$\therefore p_j' = (p_{j1}, \dots, p_{jn}) \quad (1 \leq j \leq s)$$

$$p' = (p_1, \dots, p_n) \quad \text{とする}$$

(1) の左辺の  $(i-1)n + j$  列目の要素は

$$p_{1j} a_{i1} + p_{2j} a_{i2} + \dots + p_{sj} a_{is} + p_i \geq 0$$

$$p_{1j} a_{i1} + p_{2j} a_{i2} + \dots + p_{sj} a_{is} \geq -p_i \quad \left( \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s \end{matrix} \right)$$

$$p_{1j} a_{11} + p_{2j} a_{12} + \dots + p_{sj} a_{1s} = c_j \quad (1 \leq j \leq n) \quad \text{と表すと}$$

$$c_j \geq -p \quad (1 \leq j \leq n) \quad (3)$$

$$(2) \text{ は } \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}} p_{ij} b_{ji} \geq -(p_1 + \dots + p_n) \quad \text{となり}$$

次の形になる

$$\sum_{j=1}^n (T c_j)^{(j)} \geq \tau(-p) \quad (4)$$

$$\therefore \text{ベクトル } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ に対し } a^{(j)} = a_j \text{ とする。}$$

$$(T c_j)^{(j)} \geq (T c_1, \dots, T c_n)^{(j)} \text{ から } \star \text{ が十分条件で}$$

必要とは直ちにわかる。必要条件になることは

$$b = - (c_1 \wedge \dots \wedge c_n) \quad \text{とし}$$

$$(Tc_1 \wedge \dots \wedge Tc_n)^{(4)} = Tc_{k(j)} \quad \text{となす } k(j) \text{ をえらび}$$

$c_{k(1)}, \dots, c_{k(n)}$  に対し (4) を考えれば 成り立ち  
られる。

尚上の定理の至として  $a > 16 \Rightarrow \exists T \in \mathcal{D} \quad Ta = 16$  の  
例とが与えられる。

此の矛盾は上の結果を確率空間の  $L_1, L_\infty$  等にあ  
る operator に拡張された。

参考文献

[1] Mirsky, L., Results and problems in the  
theory of doubly stochastic matrices. Z. Wahr. 1  
(1963), 319-334.

[2] 三階堂 利包, 凸空間の極点の線型双射. 環論研  
究報告 リーズ 22 (1961).