

小平の消滅定理と Yau の不等式 の 正標数
における反例について

名大理 向井 茂

X は標数 $p \geq 0$ の閉体の上の非特異な ^{完備}代数多様体、 K をその標準因子 ^類 とする。 $p=0$ の時次の事実が知られている。

小平の消滅定理 (K.V.) 直線束 L が豊富なら全ての $0 \leq i < \dim X$ に対して $H^i(X, L^{-1}) = 0$ 。

Yau の不等式 ([6]) K が豊富なら Chern 数の間の不等式 $c_2 \cdot K^{n-2} \geq \frac{n}{2(n+1)} K^n$ が成立する。

X が曲面の時、各々は次の様に精密化される。

Ramanujam の消滅定理 直線束 L が数値的に正ならば $H^1(X, L^{-1}) = 0$ 。

宮岡の不等式 X が一般型ならば $c_2 \geq \frac{1}{3} K^2$ 。

さて、 $p > 0$ の時にこれらの事実が成立するかどうかは問題になるが、Raynaud によって反例が与えられている。即ち、

(a) X の上で K.V. は成立しない。

(b) $c_2 < 0$.

を満す非特異曲面 X を Raynaud は構成した。その曲面は他に次の性質をもつ。

(c) 全ての fibres が特異点をもつ fibration $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する。

(d) $p \geq 5$ なら X は一般型。 $p = 2, 3$ の時 $K(X) = 1$ で準楕円的。上の f がその準楕円 fibration。

ここでは Raynaud の方法を一般化することにより、高次元の場合でも病的な多様体がつくれることを示す。また、 K, V の成立しない曲面のもついくつかの性質について注意したい。主な結果を述べると、

定理 1. $n \geq 2$ と素数 $p > 0$ が与えられた時、次の条件を満す標数 p の n 次元非特異多様体 X とその上の直線束 L とが存在する。

(a) L は豊富だが $H^1(X, L^{-1}) \neq 0$ 。

(b) K は豊富だが $c_2, K^{n-2}, c_3, K^{n-3}, \dots, c_n$ は全て負。

(c) X の純非分離被覆である非特異曲線 C

上の $(\mathbb{P}^1)^{n-1}$ 束と同型なものが存在する。 X の位相的 Euler 標数 $e(X)$ は $2^n(1-g(\mathcal{C}))$ に等しい。

なお, $p=2, 3$ の時は (b) を次の (b') で置きかえたものも構成できる。

(b') 準隋円的 fibration $f: X \rightarrow Y$ が存在し, K は Y 上の豊富な因子の引き戻しになっている。

K が豊富だという性質は一般化について閉じている。また Chern 数も一般化によって変化しない。よって Yau の不等式と定理 1. の (b) より次の事がわかる。

系 定理の多様体は標数 0 に持ち上げられない。

問題 非特異多様体 X が標数 0 に持ち上げられるなら X の上で K, V が成立するか?

非特異偏極多様体 (X, L) が標数 0 に持ち上げられるなら $H^2(X, L^{-1}) = 0$ ($0 \leq i < \dim X$) が成立するか?

定理 2. X を $K.V.$ の成立しない (非特異) 曲面とする。このとき次の事が成り立つ。

1) X は一般型か $K(X)=1$ の準楕円曲面 ($p=2,3$ のときのみ) である。

2) X を何回か blow up した曲面 X' から曲線 C への射 $f: X' \rightarrow C$ があって、 f の fibre は全て連結かつ特異点をもつ。詳しく言うと、fibre F の余接層 Ω_F は常に torsion をもつ。

以下標数 p は常に正。また $K.V.$ は H^1 の消滅のみを問題とする。

§1 丹後の定理について

正標数の場合の著しい点は Frobenius 射或は Frobenius map の存在である。 L を直線束とすると π_1 -cocycle $\{a_{ij}\}$ に $\{a_{ij}^p\}$ を対応させることにより、

$$F^*: H^1(X, L) \longrightarrow H^1(X, L^{\otimes p})$$

がえられる。多様体 X が正規で $\dim X \geq 2$ の時は

(Enriques-Severi-Zariski の補題) $\mathcal{L}$ が豊富で m

が十分大きければ $H^1(X, \mathcal{L}^{-m}) = 0$ 。

が成立する。よって、Frobenius map の列 $H^1(\mathcal{L}^{-p}) \rightarrow H^1(\mathcal{L}^{-p^2}) \rightarrow \dots$ を考えれば、 X の上で (H^1 に関する) K.V. が成立することは

(*) 「 X の上の任意の豊富な直線束 $\mathcal{L}$ に対し

$F^*: H^1(X, \mathcal{L}^1) \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}^{-1})$ は単射である。」

と同値であることがわかる。(*) は $\dim X = 1$ の時も意味があるが、これに関しては次の定理が基本的である。

定理 ([4]) D は非特異曲線 X の上の因子で $D \geq 0$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \text{Ker} [F^*: H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(-pD))] \\ & \cong \{df \mid f \text{ は } X \text{ の上の有理函数で } (df) \geq pD\}. \end{aligned}$$

この定理より $\dim X = 1$ の時 (*) が正しくない事は例えば次の例よりわかる。

例 ([3]) $P(Y)$ を次数 e の多項式とする。

affine 平面 A^2 の中の曲系 $P(Y^p) - Y = Z^{pe-1}$ の IP^2 の中での閉包を C とする。 C は無限遠に 1 点 ∞ をもつ次数 pe の非特異曲線であることが確かめられる。さて微分 dY と dZ との間には $-dY = -Z^{pe-2} dZ$ なる関係がある。これは Ω_C が $C \cap A^2$ の上では dZ で生成されていることを示している。よって dZ は $C \cap A^2$ では零点も極も持たない。 Ω_C の次数は $2g(C) - 2 = pe(pe-3)$ であるから $(dZ) = pe(pe-3)(\infty)$ 。よって $D = e(pe-3)(\infty)$ とすれば上の定理より、 $F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-pD))$ は単射でない。

この例の様に $g(C) \geq 2$ で次の互いに同値な条件

(a) ある直線束 L が存在して $L^{\otimes p} \cong \Omega_C$ かつ $F^*: H^1(L^{-1}) \rightarrow H^1(L^{-1})$ は単射でない。

(b) ある有理函数 f で $df \neq 0$ かつ (df) は因子として p で割り切れる即ち $(df) = pD$ となるものが存在する。

を満たす曲系 C を Tango-Raynaud 曲線と言う。

H^1 の Frobenius 写像を調べるために、上の丹後の定理が高次元の場合にも拡張できることをみよう。 D を多様体 X の (Cartier) 因子、 $\mathbb{Q}$ は X の有理函数体とする。 $\mathcal{O}_X(-D)$ は $\mathbb{Q}$ (を X 上の層とみなしたもの) の部分層である。各元を p 乗する写像 $\mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X(-pD)$ の余核を $B_X(-D)$ で表わす。完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X(-pD) \rightarrow B_X(-D) \rightarrow 0$$

より長完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(-D)) &\xrightarrow{F^*} H^0(\mathcal{O}_X(-pD)) \rightarrow H^0(B_X(-D)) \\ &\rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \xrightarrow{F^*} H^1(\mathcal{O}_X(-pD)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

を得る。よって

命題 1. $F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-pD))$ が全射。

例えば $D=0$ 或は $H^1(\mathcal{O}_X(-pD))=0$ であるならば

$$\text{Ker}[F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-pD))] \cong H^0(B_X(-D)).$$

命題 2. X が正則な時は

$H^0(B_X(-D)) \cong \{ f \in \mathbb{Q}/\mathbb{Q}^p \mid X \text{ の各点の近傍で } f \text{ はある } \mathcal{O}_X(-pD) \text{ の (local) section と mod } \mathbb{Q}^p \text{ で合同} \}$ 。

証明 $\mathbb{Q}^p \cap \mathcal{O}_X(-pD) = \mathcal{O}_X(-D)^p$ であるから

$$B_X(-D) \cong \mathcal{O}_X(-pD) / \mathbb{Q}^p \cap \mathcal{O}_X(-pD)$$

$$\cong \mathcal{O}_X(-pD) + \mathbb{Q}^p / \mathbb{Q}^p. \quad \text{証明終.}$$

X が正規な時、 $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \xrightarrow{p\pi} \mathcal{O}_X(-pD) \xrightarrow{d} \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-pD)$ は完全列である。よって、 $B_X(-D)$ は $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-pD)$ の部分層とみなせる。よって

命題 3. X は正規とする。 $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(pD), \Omega_X) = 0$ なら $H^0(B_X(-D)) = 0$ よって $F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-pD))$ は単射である。

さらに X が非特異な時は、 $\Omega_{\mathbb{Q}}$ の中で $B_X(-D) = d\mathbb{Q} \cap \Omega_X(-pD)$ となっていることがわかる。よって

命題 4. X は非特異とする。そのとき、
 $H^0(B_X(-D)) \cong \{df \mid f \in \mathbb{Q}, df \in \Omega_X(-pD)\}$
 $\stackrel{\text{Notation}}{=} \{df \mid f \in \mathbb{Q}, (df) \geq pD\}.$

これと命題 1 と合せたものが丹後の定理の一般化になっている。

(X, D, η) と書いた時, X は多様体 (被約なスキームで十分), D は Cartier 因子, η は $H^0(B_X(-D))$ の元を表わしているものとする。§2 では (X, D, η) から新しい組 $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta})$ が作れることを示すが, その準備として先づ致る所で分岐する X の被覆 $\pi: G = G(X, D, \eta) \rightarrow X$ が構成できることを示す。 D は開被覆 $\{U_i\}$ に対して局所方程式の系 $\{g_i\}$ で与えられているとする。また $\eta = \{b_i\}$ $b_i = g_i^p c_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X(-pD))$ $b_j - b_i = a_{ij}^p \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-D)^p)$ となる, としている。 $\{a_{ij}\}$ の類 $\alpha \in H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(-D))$ の決める拡大を

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

とする。 E は $GL(\mathcal{O}_X)$ に値をとる 1-cocycle

$$\left\{ \begin{pmatrix} g_i g_j^{-1} & 0 \\ a_{ij} g_j^{-1} & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

でできる階数 2 のベクトル束である。 E を Frobenius 射で引き戻したベクトル束

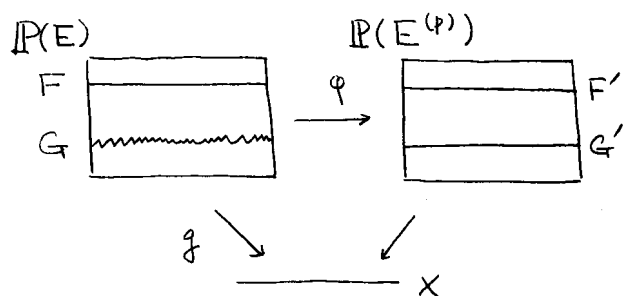
$$E^{(p)} \text{ は 1-cocycle } \left\{ \begin{pmatrix} g_i^p g_j^{-p} & 0 \\ a_{ij}^p g_j^{-p} & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ である。}$$

$$(c_i \ 1) \begin{pmatrix} g_i^p g_j^{-p} & 0 \\ a_{ij}^p g_j^{-p} & 1 \end{pmatrix} = (c_j \ 1)$$

という関係より $\{(c_i \ 1)\}$ は完全列

$$(***) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-pD) \rightarrow E^{(p)} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

の splitting $\mathcal{O}_X \rightarrow E^{(p)}$ を与えている。以上を $\mathbb{P}^1$ 束の言葉になおす。一般に X 上のベクトル束 E が与えられた時、fibre 方向の座標を p 乗することによって $\mathbb{P}(E)$ から $\mathbb{P}(E^{(p)})$ への X 上の射が定義できる。それを φ で表わす。 γ は先づ $\mathbb{P}(E)$



と $(**)$ に対応する $\mathbb{P}(E)$ の section F を決める。そして $(***)$ の splitting を決めること

は $\mathbb{P}(E^{(p)})$ の $F' = \varphi(F)$ と交わらないもう一つの section G' を決めることに他ならない。
(逆も正しい。即ち、 $\mathbb{P}(E)$, F , G' より γ が modulo 定数倍で決まる。)

定義 1. G' の φ によるスキーム論的逆像を $G = G(X, D, \gamma)$ で表わす。射影 $\gamma: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ の G への制限を $\tau: G \rightarrow X$ でもって表わす。

容易にわかるように π は致る所で分岐する flat な次数 p の被覆 (=有限射) である。また X が正規で $\eta \neq 0$ の時 G は多様体になるが、その時の体の拡大は純非分離的である。 G がいつ非特異になるかであるが、先の様に $\eta = \{b_i\}$, $b_i = g_i^p c_i$ と書けている時 X の閉集合 $\Omega(\eta)$ を $\Omega(\eta) \cap U_i = \{x \in U_i \mid d c_i \text{ は } \Omega_x \otimes k(x) \text{ の中で零}\}$ でもって定義する。 X が非特異の時 Ω_x は局所自由であるから $x \notin \Omega(\eta)$ は $d\eta \in H^0(\Omega_x(-pD))$ を掛ける準同型 $\mathcal{O}_x(-pD) \xrightarrow{x d\eta} \Omega_x$ の余核が x で自由であることと同値である。特に、 $\Omega(\eta) = \emptyset$ は余核が局所自由であることと同値であるが、そのことを $(d\eta) = pD$ でもって表わす。

命題 5. G が非特異 $\Leftrightarrow X$ が非特異かつ $(d\eta) = pD$ 。この同値な条件が満たされるとき

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{O}_X(pD) \xrightarrow{x d\eta} \pi^* \Omega_X \rightarrow \Omega_G \rightarrow \Omega_{G/X} \rightarrow 0$$

は完全列で $\Omega_{G/X} \cong \pi^* \mathcal{O}_X(D)$ 。また、このことより G の位相的 Euler 標数 $e(G)$ は $e(X)$ に等しい。

例えば X が Tango-Raynaud 曲線 なら G は非特異。実際、 G は X と同型で $\tau: G \rightarrow X$ は X の Frobenius 射 に他ならない。

§2 反例の構成

$D = kD'$, k は p と素な自然数、と仮定しているとき 3 つ組 (X, D, η) から 1 つ次元の高い $\tilde{X}$ をもつ 3 つ組 $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta})$ と射 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が構成できることを示す。

$k=1$ の時は $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta}) = (IP(E), g^*D, g^*\eta)$, $f=g$ なので以下 $k \geq 2$ とする。また簡単のため X は正則多様体で $\eta \neq 0$ と仮定する。

$G = G(X, D, \eta)$ の定義より、 $IP(E)$ の因子とみたとき G は $pF - p \cdot g^*D$ と線型同値である。 $(R) = G - pF + p \cdot g^*D$ とする $IP(E)$ の (標準的な) 有理函数を R とする。

定義 2. (1) $\tilde{X}$ は $IP(E)$ の有理函数体 に $R^{\frac{1}{k}}$ を付加した体における $IP(E)$ の正則化、 $\pi: \tilde{X} \rightarrow IP(E)$ を自然な被覆としたとき、 $f = g \circ \pi$ 。なお、

G, F を π^*G, π^*F と同一視して $\tilde{X}$ の因子とみなす。

$$(2) \quad \tilde{D} = (k-1)F + f^{-1}D'.$$

(3) $\tilde{\gamma}$ は $R^{1/2}$ の modulo "有理函数"^P の類 (命題 2 を参照).

定理 3. (1) $\tilde{\gamma} \in H^0(B_{\tilde{X}}(-\tilde{D}))$ 即ち, $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\gamma})$ は我々の意味で 3 つ組になっている。

(2) $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は flat 射。その各 fibre は G との交点以外では非特異な有理曲線。 G との交点では $T^k = S^1$ という型の cusp である。

(3) $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\gamma})$ から作られた致る所で分岐する被覆を $\tilde{\pi}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{X}$ とする。このとき射 $f_G: \tilde{G} \rightarrow G$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{f_G} & G \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{X} & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

i) 左の図式は可換。

ii) $\tilde{X}$ から G を除いた所で左の図式は cartesian。特に $\tilde{G} \rightarrow G \times_X \tilde{X}$ は双有理射。

iii) $\tilde{G}$ は G 上の P^1 -束と同型。 f_G はその自然な射影。 X 上の直線束 $\mathcal{O}_X(D')$ に無限遠

section を付け加えてできる $\mathbb{P}^1$ 束を $V = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(D'))$ とするとき, $\tilde{G} \cong G \times_X V$.

(4) $\omega_{\tilde{X}/X}$ は その torsion 部分 ($\neq 0$) と直線束の直和に同型。実際

$$\omega_{\tilde{X}/X} \cong (\mathcal{O}_{(k-1)G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(pD')) \oplus (\mathcal{O}_X(-(k+1)F) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D))$$

(X, D, γ) のいくつかの性質が $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\gamma})$ に伝わる。

命題 6. (1) ($k \geq 2$ で) D が豊富ならば $\tilde{D}$ も豊富。

(2) X が非特異で $(d\gamma) = pD$ ならば $\tilde{X}$ も非特異で $(d\tilde{\gamma}) = p\tilde{D}$ 。このとき $e(\tilde{X})$ は $2e(X)$ に等しい。

証明 (1) は F が“ほとんど”豊富, 即ち, m が十分大きければ $|mF|$ が G 以外の所では双正則な射を定義することからわかる。 $\tilde{G}$ は G 上の $\mathbb{P}^1$ 束であるから, G が非特異 $\Leftrightarrow \tilde{G}$ が非特異。また $e(\tilde{G}) = e(\mathbb{P}^1)e(G) = 2e(G)$ 。よって (2) は命題 5

より従う。

証明終。

さて、 n 次元の小平消滅定理の反例 (X_n, D_n, η_n) を構成しよう。

定義 3. (X_1, D_1, η_1) は Tango-Raynaud 曲線 X_1 と $(d\eta_1) = pD_1$ を満たす η_1, D_1 からなる 3 組。 D_1 は e_1 で割り切れる、即ち $D_1 = e_1 D_1''$ と仮定する。 $(X_{n-1}, D_{n-1}, \eta_{n-1}), D_{n-1} = e_{n-1} D_{n-1}''$ まで定義されたとする。 e_{n-1} が p で割れないときは (X_n, D_n, η_n) は定義しない。 e_{n-1} が p で割るときはその約数 k_{n-1} で p と素なものをとってくる。 X_{n-1} の上の $\mathbb{P}^1$ 束 $\mathbb{P}(E_{n-1})$ の k_{n-1} 重被覆をとることにより、 $(X_{n-1}, D_{n-1}, \eta_{n-1})$ から構成した新しい 3 組を $(X_n, D_n, \eta_n) = (\tilde{X}_{n-1}, \tilde{D}_{n-1}, \tilde{\eta}_{n-1})$ とする。 $f_{n-1}: X_n \rightarrow X_{n-1}$ は自然な射 $\tilde{X}_{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ とする。 また $e_n = \text{G.C.D.} \left(k_{n-1} - 1, \frac{e_{n-1}}{k_{n-1}} \right)$ とする。 定義より $D_n = (k_{n-1} - 1) F_{n-1} + f_{n-1}^{-1} D_{n-1}', D_{n-1}' = \frac{e_{n-1}}{k_{n-1}} D_{n-1}''$ であるから D_n は e_n で割り切れる。

(X_n, D_n, η_n) が定義されたとする。命題 6 より D_n は豊富、 X_n は非特異、 $(d\eta_n) \geq pD$ 。よって命題 1, 4 より $H^1(\mathcal{O}_{X_n}(-D_n)) \neq 0$ 。即ち、 X_n の上で K, V は成立しない。

(X_1, D_1, η_1) を固定した時、 (X_i, D_i, η_i) の構成は必ず有限回の所で止まってしまうが、 n を与えた時 e_1 が $e(n)$ で割れれば (X_n, D_n, η_n) まで定義できるような自然数 $e(n)$ が存在する。一方 §1 の例でみたように勝手な数 e で D_1 が割り切れるような Tango Raynaud 曲線が存在する。よって定理 1 の (a) までが証明できた。(c) は定理 3 の (3) と命題 6 の (2) より明らかであろう。(b), (b') は次の命題より従う。

命題 7. X_n の標準因子類を K_n とする。

- (1) $K_n \equiv (pk_{n-1} - p - k_{n-1} - 1)F_{n-1} + f_{n-1}^{-1}(K_{n-1} - (pk_{n-1} - p - k_{n-1})D_{n-1})$
- (2) K_n が豊富 $\Leftrightarrow \{p, k_{n-1}\} \neq \{2, 3\}$
- (3) $\{p, k_{n-1}\} = \{2, 3\}$ の時 $f_{n-1}: X_n \rightarrow X_{n-1}$ は準隋同的 fibration で K_n は X_{n-1} 上の豊富な因子

$K_{n-1} - D_{n-1}'$ と線型同値である。

命題 8. X_n の Chern 類を $c_1, \dots, c_n$ とする。

$i_1, \dots, i_n$ は負でない整数で $\sum_{j=1}^n i_j = n$ とする。

$$(c_1^{i_1} \cdots c_n^{i_n}) / \deg D_1 = \sum_{j_1, \dots, j_n \geq 1} \text{const. } k_{n-1}^{j_{n-1}} \cdots k_1^{j_1}$$

また、 $k_{n-1} \cdots k_1$ の係数は $(1-p)^{i_1+\dots+i_n} (1 + \frac{i_1}{p-1} - i_2 - \dots - i_n)$ に等しい。

命題より、 $i \geq 2$ の時 $(c_i \cdot K^{n-i}) / \deg D_1$ の $k_{n-1} \cdots k_1$ の係数は $-(n-i)(p-1)^{n-i}$ 。よって $n > i$ の時は $k_{n-1}, \dots, k_1$ を十分大きくとれば $(c_i \cdot K^{n-i})$ は負になる。
 $n = i$ の時は $\deg c_n = e(X_n)$ だから既に示した定理 1 の (c) より $\deg c_n$ は常に負。

(X_2, D_2, γ_2) の性質 Tango Raynaud 曲線から $k = k_1$ 重被覆で構成した曲面 $(X, D, \gamma) = (X_2, D_2, \gamma_2)$ の性質について少し述べる。 $(d\gamma) = pD$ であるから既にみたように $d\gamma$ に掛ける準同型の余核は直線束。よって完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(pD) \xrightarrow{\times d\gamma} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(K-pD) \rightarrow 0$$

をえる。

(1) $\mathcal{O}_X(K-pD)^{-p}$ は effective. 一方 $\mathcal{O}_X(pD)$ は豊富である。だからベクトル束 $\mathcal{Q}_X$ は (Bogomolov の意味でも竹本の意味でも) instable.

(2) $k=p-1$ の時は $\mathcal{O}_X(K-pD)^{-1}$ が effective. 即ち、 $H^0(\mathcal{O}_X(K-pD)^{-1}) \neq 0$. 接束 $T_X = \mathcal{Q}_X^\vee$ は $\mathcal{O}_X(K-pD)^{-1}$ を含むから $H^0(T_X) \neq 0$. 一方、一般型にせよ準階層的にしろ X に代数群 (次元 ≥ 1) は作用しえない。よって群スキーム $\text{Aut } X$ は被約でない。

(3) $\{p, k\} \neq \{2, 3\}$ の時 K は豊富であるが、 K に対しては $K.V.$ が成立している。即ち、 $H^1(K^{-1}) = 0$.

$H^1(K^{-1})$ の消滅は X の pluricanonical map を考える時に重要であるが、(3)に関連して次の問題が考えられる。

問題 標準直線束 K が豊富な非特異多様体 (あるいは、一般型曲面) X に対して $H^1(X, K^{-1}) = 0$ が成立するか？

§3 K.V. の成立しないう曲面について

X を K.V. の成立しないう (非特異) 曲面として、定理 2 を証明する。先づ (2) から証明しよう。
命題 1 と 4 より $(dh) \geq pD$ とする有理函数 h と豊富な因子 D が存在する。 h は X から $\mathbb{P}^1$ への有理写像を与える。よって X を blow up して Stein 分解とすることにより各 fibre が連結な射 $f: X' \rightarrow C$ がえられる。 L を $\mathcal{O}_X(pD) \xrightarrow{+dh} \mathcal{O}_{X'}$ の像とすると、 $\mathcal{O}_{X'/C} = \mathcal{O}_{X'}/f^*\mathcal{O}_C$ は $T = L/L \cap f^*\mathcal{O}_C$ を含む。 $\mathcal{O}_C$ は dh とそのある空でない開集合での section とを含むから $L \cap f^*\mathcal{O}_C \neq 0$ 。よって T は torsion 層である。 $\text{Supp}(A) = \text{Supp}(T)$ とする因子 A があって線型同値

$$A \equiv c_1(L) - c_1(L \cap f^*\mathcal{O}_C)$$

が成り立つ。 $c_1(L) = pD$ は X' の準豊富な因子で $c_1(L \cap f^*\mathcal{O}_C) \leq f^*K_C$ であるから A は fibre 以外の成分を含む。それを G とする。 B を f の fibre とするとき $\mathcal{O}_B \cong \mathcal{O}_{X'}|_B$ であるから $\mathcal{O}_B$ は B と G の交点で torsion をもつ。特にその点で B は特異である。

(1) は $K(X) \leq 1$ なる $p=2, 3$ $K(X)=1$ X は準階層的
 という場合を除き X 上で K, V が成立するとい
 うことである。先づ次の命題より X は極小
 曲面であると仮定してよい。

命題 ([5]) X で K, V が成立するなら X'
 を blow up した曲面 X' でも K, V が成立する。

$K(X) = -\infty$ の時は X は $\mathbb{P}^2$ が ruled。 $K(X)=1$ の
 時は 準階層的でなければ 階層的。よてどちらの
 場合も 次の命題より X の上で K, V は成立する。

命題 9. ([5]) X が ruled あるいは 階層的なら
 K, V が成立する。

証明 $f: X \rightarrow C$ を ruling が 階層的 fibration
 とする。自然な完全列 $0 \rightarrow f^* \Omega_C \rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_{X/C} \rightarrow 0$
 が存在する。 L を豊富な直線束とする。 $L, f^* \Omega_C$
 $\Omega_{X/C}$ を各々 fibre に切った直線束の次数は >0 ,
 $0, \leq 0$ 。よて $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L, f^* \Omega_C) = \text{Hom}(L, \Omega_{X/C}) = 0$ 。
 よて $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L, \Omega_X) = 0$ だから 命題 3 より X の上で

K.V. が成立する。

証明終。

$K(X) = 0$ の時は、Bombieri-Mumford による分類を用いる。 b_2 を 2nd Betti 数とする時 X は次のいずれか。

(a) $b_2 = 6$ アーベル曲面

(b) $b_2 = 22$ K3 曲面

(c) $b_2 = 10$ Enriques $\left\{ \begin{array}{l} \text{classical} \\ \text{singular} \\ \text{super singular} \end{array} \right\}$ $p=2$ のときのみ

(d) $b_2 = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{hyper elliptic} \\ \text{quasi-hyper elliptic} \end{array} \right.$ $p=2, 3$ のときのみ

先づ、(a) はアーベル多様体の一般論より K.V. が成立する。(d) の準超楕円曲線の場合は楕円曲線 fibration も持つので命題 9 より K.V. が成立する。よって (b) (c) の場合を考察すればよい。 D を K3 あるいは Enriques 曲面の豊富な因子とする。

補題 $\dim H^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq 2$

証明 Riemann-Roch の不等式より $h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq \frac{1}{2}(D^2) + \chi(\mathcal{O}_X)$ 。 $(D^2) > 0$ で $\chi(\mathcal{O}_X)$ は K3, Enriques に従って 2, 1。よって $h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq 2$ 。証明終。

$H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \neq 0$ として矛盾を導こう。 D を $p^n D$

であきかえて $F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-pD))$ が
 写射で存在と仮定してよい。よって $H^0(B_X(-D))$
 $\neq 0$ であるその非零元とする。写像

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}_X(D)) & \longrightarrow & H^0(B_X) \\ \downarrow \eta & \longrightarrow & \downarrow \eta^p \end{array} \quad B_X = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X^p$$

は写射で $H^0(B_X) \cong \text{Ker}[F^*: H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X)]$ だ
 から 補題より $h^1(\mathcal{O}_X) \geq 2$ 。しかし、K3, classical
 Enriques の時は $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$, classicalでない Enriques の
 場合でも $h^1(\mathcal{O}_X) = 1$ であるからこれは矛盾であ
 る。

証明終。

参考文献

[1] Bombieri-Mumford Enriques' classification of surfaces in
 char. p , II, in Complex Analysis and Algebraic Geometry 岩波書店 (1977)

[2] D. Mumford Pathologies III Amer. J. Math., 89
 (1967) 94-104.

[3] M. Raynaud Contre-exemple au "vanishing de
 Kodaira" sur une surface lisse en caractéristique $p > 0$,
 in C. P. Ramanujan - A Tribute, Tata Institute of Fundamental Research

[4] H. Tango On the behaviour of extensions of

vector bundles under Frobenius map, Nagoya Math. J.,
48(1972), 73-89.

[5] 丹後 弘司, Frobenius map による ベクトルバンドル
のコホモロジークラスの挙動について, 代数幾何学
の最近の発展, 数研講究録 144 (1972)

[6] S. T. Yau, On Calabi's conjecture and some new
results in algebraic geometry.