

六角格子上のシュレディンガー作用素のスペクトルについて

筑波大学大学院数理物質科学研究科博士課程 安藤 和典 (Kazunori Ando)

1 はじめに

近年、コンピュータの性能向上に伴い現象解析のための数値シミュレーションの発展は著しい。自然現象を記述するのは主に微分方程式であり、それをコンピュータで数値的に解析するためには方程式を離散化する必要があるだろう。離散化された微分方程式は一般的には「グラフ」上の差分方程式とみなすことができる。また、物質を原子レベルで制御するナノテクノロジーも盛んに研究されている。原子をノード、原子と原子の結びつきを辺としてとらえると、それらは「グラフ」と考えることができる。

ここではグラフ上の離散シュレディンガー作用素を考察し、それが単なる微分方程式の離散化にとどまらず、非常に豊かな構造を持っているということを見ていきたい。磯崎・コロチャーエフ [4] においては正方格子上のシュレディンガー作用素の散乱および逆散乱問題を扱っている。我々は、正方格子での結果の類推をグラフ理論の手法を用いて六角格子上で展開する。その際、Mourre 評価が重要な役割を果たす。グラフ上の Mourre 評価については、Boutet de Monvel, Sahbani の正方格子 ([2],[3]), Allard, Froese の二分木 ([1]), Măntoiu, Richard, Tiedra de Aldecoa の admissible graph ([5]) に対する結果などが知られている。Mourre 評価から極限吸収原理、さらに六角格子上の離散シュレディンガー作用素のスペクトル表示を得る。スペクトル表示を通すと散乱振幅が見やすくなる。六角格子を考える理由の一つとしては、グラフとしての六角格子がグラフェンの離散モデルと考えられることである。グラフェンは炭素でできており、ハニカム構造を持つ一炭素原子の厚さのシート状の物質である。グラフェンが多層になるとグラフアイトと呼ばれる。グラフェンは近年、物理方面で盛んに研究が行われている。また、上記の正方格子上の散乱・逆散乱の理論を一般の格子、グラフ理論の言葉で言えば「有限グラフのアーベル被覆グラフ」で展開する際に、正方格子と並んで基本的な格子である六角格子で考察することは重要である。

以降の概略としては、第 2 章でグラフ上の離散ラプラシアンを定義し、フーリエ変換を用いて、六角格子上の離散ラプラシアンのスペクトルの性質を調べる。第 3 章では六角格子上でコンパクトな台を持つポテンシャルを伴う離散シュレディンガー作用素の Mourre 評価を導く。第 4 章では六角格子上の離散シュレディンガー作用素のスペクトル表示を構成する。第 5 章では、第 4 章で構成したスペクトル表示を用いて、散乱振幅の具体的な表現を求める。最後の章では、六角格子上の離散シュレディンガー作用素の逆散乱問題についての展望を述べる。

2 六角格子上のラプラシアンのスペクトルの性質

ここでは簡単にグラフの導入を行い、グラフ上の離散ラプラシアンを定義し、特に六角格子上の離散ラプラシアンのスペクトルの性質について述べる。以下、文脈上意味が明白である場合は「離散」を省略して単に「ラプラシアン」と記述する。離散シュレディンガー作用素についても同様である。

グラフ $G = (V(G), E(G))$ は高々可算個の頂点集合 $V(G)$ と、辺集合 $E(G)$ とからなる順序対である。任意の辺 $e \in E(G)$ はある二つの頂点 $v_1, v_2 \in V(G)$ を結ぶものとし、 $v_1 \overset{e}{\sim} v_2$ と書く (図 1)。しばしば、辺 e を省略して $v_1 \sim v_2$ と書く。また、ループ及び多重辺はないものとする (図 2)。頂点 v に対してその次数 $\deg v$

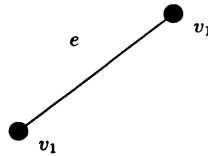


図 1 頂点 v_1, v_2 とそれらを結ぶ辺 e

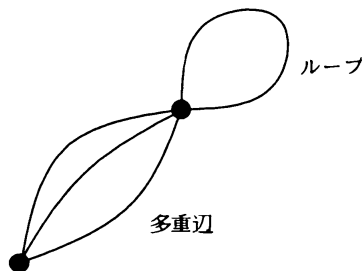


図 2 ループと多重辺

を隣接する頂点の個数で定義する； $\deg v = \#\{u \in V(G) | u \sim v\}$ 。各頂点の次数は 0 でない有限な値とする。このような仮定の下、函数 $\hat{f}: V(G) \rightarrow \mathbb{C}$ に対してグラフ上の離散ラプラシアン Δ_G を以下で定義する；

$$\Delta_G \hat{f}(v) = \frac{1}{\deg v} \sum_{u \sim v} \hat{f}(u) - \hat{f}(v).$$

頂点の次数で重み付けられたヒルベルト空間 $l^2(G) = \{\hat{f}: V(G) \rightarrow \mathbb{C} | \sum_{v \in V(G)} |\hat{f}(v)|^2 \deg v < \infty\}$ を定義すると、 $-\Delta_G$ は $l^2(G)$ 上の有界な自己共役作用素で、そのスペクトルは 0 以上、2 以下となることはよく知られている； $\sigma(-\Delta_G) \subset [0, 2]$ 。

六角格子を考えよう。六角格子は正六角形が図 3 のように平面を埋めている。グラフとしての六角格子は、小さな黒丸を頂点、黒丸と黒丸を結ぶ線分を辺として考える。以下、グラフ G は六角格子を表すものとする。六角格子の頂点次数は常に 3 である； $\deg v = 3$ 。したがって、ヒルベルト空間 $l^2(G)$ における重みは 1 としてよい。また、六角格子の頂点は図 3 のように二つの頂点の対 (v_1, v_2) がベクトル e_1, e_2 による平行移動で生成されていると考えられる。したがって、 $l^2(G) \simeq l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ とみなすことができる；

$$l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{f}_1(n) \\ \hat{f}_2(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (|\hat{f}_1(n)|^2 + |\hat{f}_2(n)|^2) < \infty \right\}.$$

六角格子上のラプラシアンは $l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ 上の作用素として以下のように書くことができるが、同じ記号 Δ_G で表すことにする；

$$\Delta_G \hat{f}(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\hat{f}_2(n_1, n_2) + \hat{f}_2(n_1 - 1, n_2) + \hat{f}_2(n_1, n_2 - 1)) - \hat{f}_1(n_1, n_2) \\ \frac{1}{3}(\hat{f}_1(n_1, n_2) + \hat{f}_1(n_1 + 1, n_2) + \hat{f}_1(n_1, n_2 + 1)) - \hat{f}_2(n_1, n_2) \end{pmatrix}.$$

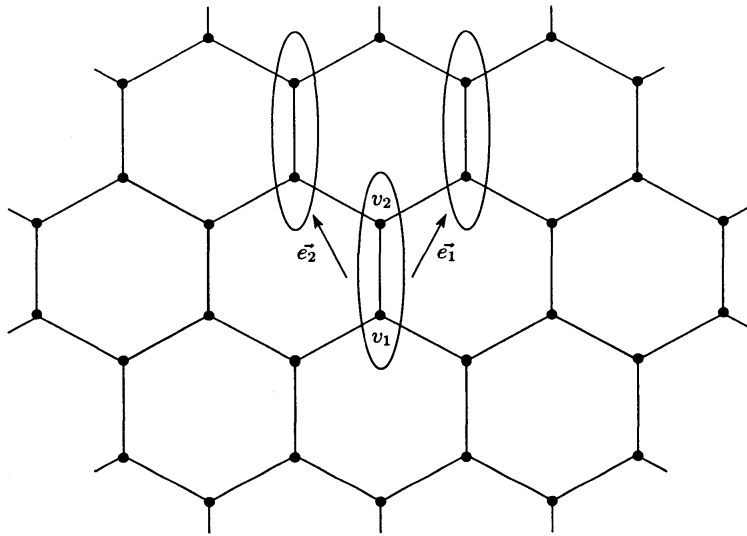


図3 六角格子

フーリエ変換 $\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ を以下のように定義する；

$$(\mathcal{F}\hat{f})(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (2\pi)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_1(n) e^{inx} \\ (2\pi)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_2(n) e^{inx} \end{pmatrix}.$$

すなわち、各成分ごとには $\mathbb{T}^2$ 上の通常のフーリエ級数をとるものとする。 $\mathcal{F}$ はユニタリ変換であり、 $H_0 = \mathcal{F}(-\Delta_G)\mathcal{F}^*$ とすると H_0 は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ において行列 $H_0(x)$ による掛け算作用素となる；

$$\begin{aligned} (H_0 f)(x) &= H_0(x) f(x), \\ H_0(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(x)} & \alpha(x) \\ \alpha(x) & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha(x) &= -\frac{1}{3}(1 + e^{ix_1} + e^{ix_2}). \end{aligned}$$

作用素 H_0 に以下で定義されるユニタリ変換 $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ を施そう；

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}f)(x) &= U(x)f(x), \\ U(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha(x)}{|\alpha(x)|} \\ 1 & -\frac{\alpha(x)}{|\alpha(x)|} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\tilde{H}_0 = \mathcal{U}H_0\mathcal{U}^*$ とおくと、 $\tilde{H}_0$ は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ において対角行列 $\tilde{H}_0(x)$ による掛け算作用素となる；

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_0 f)(x) &= \tilde{H}_0(x) f(x), \\ \tilde{H}_0(x) &= \begin{pmatrix} 1 - p(x) & 0 \\ 0 & 1 + p(x) \end{pmatrix}, \\ p(x) &= |\alpha(x)| \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{3 + 2 \cos x_1 + 2 \cos x_2 + 2 \cos(x_1 - x_2)}. \end{aligned}$$

$p(x)$ は零点 $\{x \in \mathbb{T}^2 | p(x) = 0\} = \{(2\pi/3, 4\pi/3), (4\pi/3, 2\pi/3)\}$ を除いて実解析的な函数であり、値域は 0 から 1 までの閉区間である； $\{p(x) | x \in \mathbb{T}^2\} = [0, 1]$ 。したがって、次の事が容易に分かる；

定理 2.1. $-\Delta_G$ のスペクトルは 0 から 2 までの閉区間であり、絶対連続スペクトルのみからなる；

$$\begin{aligned}\sigma(-\Delta_G) &= \sigma_{ac}(-\Delta_G) = [0, 2], \\ \sigma_{sc}(-\Delta_G) &= \sigma_{pp}(-\Delta_G) = \emptyset.\end{aligned}$$

3 Mourre 評価

$s \in \mathbb{R}$ に対して、 $\mathbb{T}^2$ 上 $\mathbb{C}^2$ 値のソボレフ空間 $\mathcal{H}^s$ を以下のように定義する；

$$\mathcal{H}^s = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid f_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2), (1 + (-\Delta))^s f_j \in L^2(\mathbb{T}^2), j = 1, 2 \right\}.$$

ここで、 $-\Delta = -(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})$ は $\mathbb{T}^2$ 上で周期境界条件を持つ微分作用素で、その自己共役拡張も同じ記号で表すとする。

作用素 L_0 を以下で定義する；

$$(L_0 f)(x) = \begin{pmatrix} -\Delta f_1(x) \\ -\Delta f_2(x) \end{pmatrix}.$$

L_0 は $\mathcal{H}^2$ を定義域とする $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ 上の自己共役作用素である。 $\tilde{H}_0$ と L_0 との交換子を取り、微分作用素 A を以下のように定義する；

$$i[\tilde{H}_0, L_0] = A.$$

微分作用素 A は以下の形を持つことが簡単な計算で分かる；

$$(A f)(x) = i \begin{pmatrix} -(\nabla p \cdot \nabla + \nabla \cdot \nabla p) f_1(x) \\ (\nabla p \cdot \nabla + \nabla \cdot \nabla p) f_2(x) \end{pmatrix}.$$

さらに、 $\tilde{H}_0$ と A との交換子をとると以下の形を持つことが分かる；

$$i[\tilde{H}_0, A] = 2|\nabla p|^2 \cdot I_2.$$

ここで、 I_2 は 2 行 2 列の単位行列である。 $p(x)$ は $x = x_{0,1} = (2\pi/3, 4\pi/3)$ と $x = x_{0,2} = (4\pi/3, 2\pi/3)$ において特異性を持つ。したがって、ネルソンの交換子の定理から作用素 A の自己共役性を示すために、 $\eta > 0$ に対して次のカットオフ函数 $\chi = \chi_\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ を導入する；

$$\chi_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in B_{\eta/2}(x_{0,1}) \cup B_{\eta/2}(x_{0,2}), \\ 1, & \text{if } x \in \mathbb{T}^2 \setminus (B_\eta(x_{0,1}) \cup B_\eta(x_{0,2})). \end{cases}$$

ここで、 $B_\eta(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 \mid |y - x| \leq \eta\}$ である。カットオフ函数 χ により修正された作用素を A_χ とおく；

$$(A_\chi f)(x) = i \begin{pmatrix} -(\chi(\nabla p \cdot \nabla) \chi + \chi(\nabla \cdot \nabla p) \chi) f_1(x) \\ (\chi(\nabla p \cdot \nabla) \chi + \chi(\nabla \cdot \nabla p) \chi) f_2(x) \end{pmatrix}.$$

A_χ は定義域 $D(A_\chi) \supset \mathcal{H}^1$ を持つ $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ 上の自己共役作用素であることが示される。

$E \in (0, 1) \setminus \{1/3\}$ に対して M_E を次のように定義する；

$$M_E = \{x \in \mathbb{T}^2 \mid p(x) = E\}.$$

M_E 上では $\nabla p(x) \neq 0$ なので, M_E は $\mathbb{T}^2$ の実解析的部分多様体であることが分かる. $C(E) = 2 \inf_{x \in M_E} |\nabla p(x)|^2$ とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, $p^{-1}([E - \delta, E + \delta]) \subset \mathbb{T}^2$ 上で以下の評価が成り立つ;

$$|\nabla p(x)|^2 \geq C(E) - \varepsilon.$$

したがって, $\delta > 0$ に対して $\eta > 0$ を十分小さくとり, $\chi = \chi_\eta \in C_0(\mathbb{T}^2)$ によって修正された conjugate operator A_χ を考えると, 任意の $f \in C_0^\infty([E - \delta, E + \delta])$ に対して以下の Mourre 評価が成り立つ;

$$f(\tilde{H}_0)i[\tilde{H}_0, A_\chi]f(\tilde{H}_0) \geq (C(E) - \varepsilon)f(\tilde{H}_0)^2.$$

ポテンシャル $\hat{V} : l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ は六角格子上で実数値対角行列 $\hat{V}(n)$ による掛け算作用素とする;

$$\begin{aligned} (\hat{V}\hat{f})(n) &= \hat{V}(n)\hat{f}(n), \\ \hat{V}(n) &= \begin{pmatrix} \hat{V}_1(n) & 0 \\ 0 & \hat{V}_2(n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

さらに, ポテンシャルは六角格子上でコンパクトな台を持つとする: $\#\{n \in \mathbb{Z}^2 | \hat{V}(n) \neq 0\} < \infty$. $\tilde{V} = \mathcal{U}\hat{V}\hat{\mathcal{F}}^*\mathcal{U}^*$, $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$ とおく. Helffer-Sjöstrand の概解析接続の公式を使い, 必要ならば上記の $\delta > 0$ の値を小さく取り直して, $E \in (0, 2) \setminus \{1/3, 1, 4/3\}$ に対して $J = J_E = [E - \delta, E + \delta]$ とおくと, 以下の Mourre 評価が成り立つ;

$$E_{\tilde{H}}(J)i[\tilde{H}, A_\chi]E_{\tilde{H}}(J) \geq (C(E) - \varepsilon)E_{\tilde{H}}(J) + K_J.$$

ここで, $E_{\tilde{H}}$ は $\tilde{H}$ のスペクトル測度, K_J はコンパクト作用素である. 上記の Mourre 評価から以下の極限吸収原理が導かれる ([6] 第 1 章定理 7.2);

$$\sup_{\lambda \in J} \|(\tilde{H} - \lambda \mp i0)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^{-s})} < \infty.$$

ここで, $s > 1/2$ である. また, 区間 J 内にある固有値は重複度も含めて有限個であることも分かる.

4 スペクトル表示

M_ρ に以下の条件を満たす測度を導入する;

$$dx_1 dx_2 = dM_\rho(\omega) d\rho.$$

ここで, ω は M_ρ のパラメータである. ρ と ω で $x = x(\rho, \omega) = (x_1(\rho, \omega), x_2(\rho, \omega)) \in \mathbb{T}^2$ をパラメータ付けし, $\mathbb{T}^2$ 上 $\mathbb{C}^2$ 値の関数に対してトレース作用素 $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)$ を以下のように定義する;

$$(\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)f)(\omega) = \begin{cases} \begin{pmatrix} f_1(x(1-\lambda, \omega)) \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{if } 0 < \lambda < 1, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x(\lambda-1, \omega)) \end{pmatrix}, & \text{if } 1 < \lambda < 2. \end{cases}$$

$f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ とし, $h(\rho)$ を以下で定義する;

$$h(\rho) = \begin{cases} h_1(1-\rho), & \text{if } 0 < \rho < 1, \\ h_2(\rho-1), & \text{if } 1 < \rho < 2. \end{cases}$$

ここで $j = 1, 2$ に対して, $h_j(\rho)$ は以下で定義される ;

$$h_j(\rho) = \int_{M_\rho} f_j(x(\rho, \omega)) \overline{g_j(x(\rho, \omega))} dM_\rho(\omega).$$

$\tilde{R}_0(z) = (\tilde{H}_0 - z)^{-1}$ とおく ;

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_0(z)f, g)_{L^2(\mathbf{T}^2; \mathbb{C}^2)} &= ((\tilde{R}_0(z)f)_1, g_1)_{L^2(\mathbf{T}^2)} + ((\tilde{R}_0(z)f)_2, g_2)_{L^2(\mathbf{T}^2)} \\ &= \int_{\mathbf{T}^2} \frac{f_1(x) \overline{g_1(x)}}{(1 - p(x)) - z} dx + \int_{\mathbf{T}^2} \frac{f_2(x) \overline{g_2(x)}}{(1 + p(x)) - z} dx \\ &= \int_0^2 \frac{h(\rho)}{\rho - z} d\rho. \end{aligned}$$

$\lambda \in (0, 2) \setminus \{2/3, 1, 4/3\}$ に対して $z \rightarrow \lambda \pm i0$ とすると極限吸収原理により,

$$(\tilde{R}_0(\lambda \pm i0)f, g)_{L^2(\mathbf{T}^2; \mathbb{C}^2)} = \pm \pi i h(\lambda) + \text{p.v.} \int_{\lambda - \mu}^{\lambda + \mu} \frac{h(\rho) - h(\lambda)}{\rho - \lambda} d\rho + \int_{|\lambda - \rho| \geq \mu} \frac{h(\rho)}{\rho - \lambda} d\rho.$$

これより, 以下の式が得られる ;

$$\frac{1}{2\pi i} ((\tilde{R}_0(\lambda + i0) - \tilde{R}_0(\lambda - i0))f, g)_{L^2(\mathbf{T}^2; \mathbb{C}^2)} = (\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)f, \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)g)_{L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)}.$$

上記の式と極限吸収原理により $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}^s, L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2))$ であることが分かる. さらに, Stone の公式より以下の式が得られる ; $f, g \in \mathcal{H}^s, s > 1/2$ に対して,

$$(f, g)_{L^2(\mathbf{T}^2; \mathbb{C}^2)} = \int_0^2 (\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)f, \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)g)_{L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)} d\lambda.$$

$\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)$ の共役作用素は以下で定義される ; $f \in \mathcal{H}^s, s > 1/2, \phi \in L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ に対して,

$$(\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)f, \phi)_{L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)} = (f, \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)_{L^2(\mathbf{T}^2; \mathbb{C}^2)}.$$

$\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^*$ は以下の表現を持つ ;

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)(x) &= (\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)(x(\lambda, \omega)) \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} \delta(p(x) - (1 - \lambda)) \phi_1(\omega) \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{if } 0 < \lambda < 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(p(x) - (\lambda - 1)) \phi_2(\omega) \end{pmatrix}, & \text{if } 1 < \lambda < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

定義より $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \in \mathbb{B}(L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2), \mathcal{H}^{-s})$ である. また, $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)$ の定義より $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)(\tilde{H}_0 - \lambda) = 0$ であるから, $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^*$ は $\tilde{H}_0$ の固有作用素となる ;

$$(\tilde{H}_0 - \lambda) \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* = 0.$$

$f \in \mathcal{H}^s, s > 1/2$ に対して作用素 $\tilde{\mathcal{F}}_0$ を以下のように定義する ;

$$(\tilde{\mathcal{F}}_0 f)(\lambda, \omega) = (\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda) f)(\omega).$$

$\tilde{\mathcal{F}}_0$ は $\tilde{H}_0$ のスペクトル表示を与える ;

定理 4.1. (1) $\tilde{\mathcal{F}}_0$ は $\tilde{H}_0$ は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ から $L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda) = \int_{(0,2)} \oplus L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2) d\lambda$ へのユニタリ作用素へと一意的に拡張される。

(2) $\tilde{\mathcal{F}}_0$ は $\tilde{H}_0$ を対角化する；

$$(\tilde{\mathcal{F}}_0 \tilde{H}_0 f)(\lambda) = \lambda(\tilde{\mathcal{F}}_0 f)(\lambda).$$

(3) 任意のコンパクトな区間 $I \subset (0, 2) \setminus \{2/3, 1, 4/3\}$ に対して，以下が成り立つ；任意の $g \in L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ に対して，

$$\int_I \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2).$$

さらに， $I_N = (1/N, 2/3 - 1/N) \cup (2/3 + 1/N, 1 - 1/N) \cup (1 + 1/N, 4/3 - 1/N) \cup (4/3 + 1/N, 2 - 1/N)$ に対して，以下の逆変換公式が成り立つ；

$$f = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* (\tilde{\mathcal{F}}_0 f)(\lambda) d\lambda.$$

証明は磯崎・コロチャーエフ [4] と同様であるが，概略を記す。

Proof. Stone の公式から得られる式により， $f \in \mathcal{H}^s, s > 1/2$ に対して以下が成り立つ；

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)}^2 = \int_0^2 \|\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda) f\|_{L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)}^2 d\lambda.$$

したがって， $\tilde{\mathcal{F}}_0$ は等長写像である。また， $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)$ の定義式より， $C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ の $\tilde{\mathcal{F}}_0$ による像が $L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ で稠密であるので (1) が分かる。(2) は既に表示されている。コンパクトな区間 $I \subset (0, 2) \setminus \{2/3, 1, 4/3\}$ と $s > 1/2$ に対して，以下の式が成り立つ； $f \in \mathcal{H}^s$ に対して，

$$\left(\int_I \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda, f \right)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} = \int_I (g(\lambda), \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda) f)_{L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)} d\lambda.$$

したがって，以下の評価が成り立つ；

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_I \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda, f \right)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} \right| &\leq \|g\|_{L^2((0,2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)} \cdot \|\tilde{\mathcal{F}}_0 f\|_{L^2((0,2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)} \\ &= \|g\|_{L^2((0,2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)}. \end{aligned}$$

Riesz の定理より以下のことが分かる；

$$\begin{aligned} \int_I \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda &\in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2), \\ \left\| \int_I \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda \right\| &\leq \|g\|_{L^2((0,2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)}. \end{aligned}$$

したがって，次の極限 $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ が存在することが分かる；

$$\tilde{f} = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* (\tilde{\mathcal{F}}_0 f)(\lambda) d\lambda.$$

任意の $g \in \mathcal{H}^s, s > 1/2$ に対して Parseval の等式より，

$$\begin{aligned} (\tilde{f}, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} ((\tilde{\mathcal{F}}_0 f)(\lambda), (\tilde{\mathcal{F}}_0 g)(\lambda))_{L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)} d\lambda \\ &= (f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)}. \end{aligned}$$

したがって， $\tilde{f} = f$ である。 □

$\tilde{R}(z) = (\tilde{H} - z)^{-1}$ とおき, 作用素 $\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)$ を以下のように定義する.

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda) = \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)(I - \tilde{V}\tilde{R}(\lambda \pm i0)).$$

極限吸収原理とポテンシャルが六角格子上でコンパクトな台をもつことより, $s > 1/2$ に対して $\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}^s, L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2))$ であることが分かる.

作用素 $\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ を以下のように定義する;

$$(\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}f)(\lambda, \omega) = (\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)f)(\omega).$$

$\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ は $\tilde{H}$ のスペクトル表示を与える;

定理 4.2. (1) $\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ から $L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ への部分等長写像へと一意的に拡張される; 始集合は $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{H})$, 終集合は $L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ である. さらに, $\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ は $\tilde{H}$ を対角化する; $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{H})$ に対し,

$$(\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}\tilde{H}f)(\lambda) = \lambda(\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}f)(\lambda).$$

(2) 次の逆変換公式が成り立つ; $N \rightarrow \infty$ のとき $I_N \rightarrow (0, 2)$ となるあるコンパクトな区間 $I_N \subset (0, 2) \setminus \{2/3, 1, 4/3\}$ があって, $f \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{H})$ に対し,

$$f = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} \tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^* (\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}f)(\lambda) d\lambda.$$

(3) $\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)*}$ は次の意味で $\tilde{H}$ の固有作用素である; 任意の $\phi \in L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ に対して,

$$(\tilde{H} - \lambda)\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^*\phi = 0.$$

Proof. レゾルベント方程式と $\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)$ の定義より, 以下の式を示すことができる; $f, g \in \mathcal{H}^s, s > 1/2$ に対して,

$$\frac{1}{2\pi i} ((\tilde{R}(\lambda + i0) - \tilde{R}(\lambda - i0))f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} = (\tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}f, \tilde{\mathcal{F}}^{(\pm)}g)_{L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)}.$$

ここで, $\lambda \in (0, 2) \setminus \{2/3, 1, 4/3\}$ である. 後の証明は前述の定理とほぼ同様である. $\square$

$l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ 上のスペクトル表示を構成しよう. $\omega \in M_\lambda$ に対して, $\delta_\omega(\theta) \in \mathcal{D}'(M_\lambda)$ を以下で定義する;

$$\langle \delta_\omega(\theta), \phi(\theta) \rangle = \phi(\omega).$$

$\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)^*$ は次の distribution kernel を持つ;

$$\tilde{\psi}^{(0)}(x; \lambda, \theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta(p(x) - |1 - \lambda|) \otimes \delta_\omega(\theta) & 0 \\ 0 & \delta(p(x) - |1 - \lambda|) \otimes \delta_\omega(\theta) \end{pmatrix}.$$

ここで, $\omega, \theta \in M_{|1-\lambda|}$ である. $\tilde{\psi}^{(0)}(x; \lambda, \theta)$ は次の意味で $\tilde{H}_0$ の一般化固有関数であることを計算によって示すことができる;

$$(\tilde{H}_0 - \lambda)\tilde{\psi}^{(0)}(x; \lambda, \theta) = 0.$$

$l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ 上では $\tilde{\psi}^{(0)}(x; \lambda, \theta)$ のフーリエ係数 $\hat{\psi}^{(0)}(\lambda, \theta) = \{\hat{\psi}^{(0)}(n; \lambda, \theta)\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$ を考える;

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(0)}(n; \lambda, \theta) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}^2} (\mathcal{U}^* \tilde{\psi}^{(0)})(x; \lambda, \theta) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} J(|1-\lambda|, \theta)}{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))} & \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} J(|1-\lambda|, \theta) \\ \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} J(|1-\lambda|, \theta) & e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} J(|1-\lambda|, \theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ただし, $0 < \rho < 1, \theta \in M_\rho$ に対して $J(\rho, \theta)$ はある解析的な函数である. 作用素 $\hat{\mathcal{F}}_0, \hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}$, および $s \in \mathbb{R}$ に対して函数空間 $\mathcal{H}^s$ を以下のように定義する;

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_0 &= \tilde{\mathcal{F}}_0 \mathcal{U} \mathcal{F}, \\ \hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} &= \tilde{\mathcal{F}}_0 \mathcal{U} \mathcal{F}, \\ \hat{\mathcal{H}}^s &= \mathcal{F}^* \mathcal{U}^* \mathcal{H}^s.\end{aligned}$$

作用素 $\hat{\mathcal{F}}_0$ は次の表現を持つ; $\hat{f} \in \mathcal{H}^s, s > 1/2$ に対して,

$$(\hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)\hat{f})(\theta) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} \left(\frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{inx(|1-\lambda|, \theta)} \hat{f}_1(n) + \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{inx(|1-\lambda|, \theta)} \hat{f}_2(n)}{\frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{inx(|1-\lambda|, \theta)} \hat{f}_1(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{inx(|1-\lambda|, \theta)} \hat{f}_1(n)} \right).$$

また, 作用素 $\hat{\mathcal{F}}_0^*$ は次の表現を持つ; $\phi \in L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ に対して,

$$(\hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^*\phi)(n) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} \left(\begin{aligned} &\int_{M_{|1-\lambda|}} e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} \phi_1(\theta) dM_{|1-\lambda|}(\theta) \\ &+ \int_{M_{|1-\lambda|}} \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} \phi_2(\theta) dM_{|1-\lambda|}(\theta) \\ &\int_{M_{|1-\lambda|}} \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} \phi_1(\theta) dM_{|1-\lambda|}(\theta) \\ &+ \int_{M_{|1-\lambda|}} e^{-inx(|1-\lambda|, \theta)} \phi_2(\theta) dM_{|1-\lambda|}(\theta) \end{aligned} \right).$$

$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ とおく. $R_0(z)$ は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ 上の行列 $R_0(x; z)$ による掛け算作用素である;

$$\begin{aligned}(R_0(z)f)(x) &= R_0(x; z)f(x), \\ R_0(x; z) &= \frac{1}{(1-z)^2 - p(x)^2} \begin{pmatrix} 1-z & \alpha(x) \\ \alpha(x) & 1-z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{Z}^2$ に対して $\hat{r}_0(n; z)$ を以下のようにおく;

$$\begin{aligned}\hat{r}_0(n; z) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}^2} R_0(x; z) e^{-inx} dx \\ &= \begin{pmatrix} \hat{r}_{0,11}(n; z) & \hat{r}_{0,12}(n; z) \\ \hat{r}_{0,21}(n; z) & \hat{r}_{0,22}(n; z) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ここで, $k, l = 1, 2$ に対して $\hat{r}_{0,kl}(n; z)$ は行列 $R_0(x; z)$ の kl -成分のフーリエ係数である;

$$\hat{r}_{0,kl} = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}^2} (R_0(x; z))_{kl} e^{-inx} dx.$$

レゾルベント $\hat{R}_0(z)$ は以下のように $\hat{r}_{0,kl}(n; z)$ との畳み込みで書ける;

$$(\hat{R}_0(z)\hat{f})(n) = \begin{pmatrix} (\hat{r}_{0,11}(z) * \hat{f}_1)(n) + (\hat{r}_{0,12}(z) * \hat{f}_2)(n) \\ (\hat{r}_{0,21}(z) * \hat{f}_1)(n) + (\hat{r}_{0,22}(z) * \hat{f}_2)(n) \end{pmatrix}.$$

次の定理は, 前述の定理をフーリエ変換で六角格子上のシュレディンガー作用素に対して言い換えたものである;

定理 4.3. (1) $\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ から $L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ への部分等長写像へと一意的に拡張される；始集合は $\mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$ ，終集合は $L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ である．さらに， $\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ は $\hat{H}$ を対角化する； $f \in \mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$ に対し，

$$(\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} \hat{H} f)(\lambda) = \lambda(\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} f)(\lambda).$$

(2) 次の逆変換公式が成り立つ； $N \rightarrow \infty$ のとき $I_N \rightarrow (0, 2)$ となるあるコンパクトな区間 $I_N \subset (0, 2) \setminus \{2/3, 1, 4/3\}$ があって， $f \in \mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$ に対し，

$$f = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} \hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^* (\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} f)(\lambda) d\lambda.$$

(3) $\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)*}$ は次の意味で $\hat{H}$ の固有作用素である；任意の $\phi \in L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ に対して，

$$(\hat{H} - \lambda) \hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^* \phi = 0.$$

5 六角格子上の散乱

ポテンシャル $\hat{V}$ は六角格子上でコンパクトな台を持つと仮定したので trace class である．したがって，次の波動作用素 $W_{\pm}$ が存在して漸近的に完全であることが分かる；

$$W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0}.$$

散乱作用素 S は以下の式で定義される；

$$S = W_+^* W_-.$$

作用素 $\hat{S}$ を以下のようにおくと，

$$\hat{S} = \mathcal{F}_0 S \mathcal{F}_0^*,$$

$\hat{S}$ は $L^2((0, 2); L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ 上のユニタリ作用素となる． S は H_0 と可換なので， $\hat{S}$ は direct integral で書ける；

$$\hat{S} = \int_{(0,2)} \oplus \hat{S}(\lambda) d\lambda.$$

S-行列 $\hat{S}(\lambda)$ は $L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ 上のユニタリ作用素である．散乱振幅 $A(\lambda)$ を以下のようにおくと，

$$\hat{S}(\lambda) = I - 2\pi i A(\lambda),$$

$A(\lambda)$ はスペクトル表示を用いて以下のように書ける；

$$A(\lambda) = \hat{\mathcal{F}}_0(\lambda) \hat{V} \hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* - \hat{\mathcal{F}}_0(\lambda) \hat{V} \hat{R}(\lambda + i0) \hat{V} \hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^*.$$

$A(\lambda)$ は $L^2(M_{|1-\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ 上で以下の積分核を持つ；

$$A(\theta, \theta'; \lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\theta, \theta'; \lambda) & A_{12}(\theta, \theta'; \lambda) \\ A_{21}(\theta, \theta'; \lambda) & A_{22}(\theta, \theta'; \lambda) \end{pmatrix}.$$

$l, k = 1, 2$ に対して, $A_{lk}(\theta, \theta'; \lambda)$ は以下のように計算できる;

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{4}(2\pi)^{-1} J(|1-\lambda|, \theta) J(|1-\lambda|, \theta') \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in(x(|1-\lambda|, \theta) - x(|1-\lambda|, \theta'))} \hat{V}_1(n) \\
&\quad - \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} J(|1-\lambda|, \theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in x(|1-\lambda|, \theta)} \hat{V}_1(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{V} \hat{\psi}^{(0)}(\theta'; \lambda))_{11}(n), \\
A_{12} &= \frac{1}{4}(2\pi)^{-1} \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} J(|1-\lambda|, \theta) \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta'))}{1-\lambda} J(|1-\lambda|, \theta') \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in(x(|1-\lambda|, \theta) - x(|1-\lambda|, \theta'))} \hat{V}_1(n) \\
&\quad - \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} \frac{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}{1-\lambda} J(|1-\lambda|, \theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in x(|1-\lambda|, \theta)} \hat{V}_1(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{V} \hat{\psi}^{(0)}(\theta'; \lambda))_{12}(n), \\
A_{21} &= \frac{1}{4}(2\pi)^{-1} \frac{\overline{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}}{1-\lambda} J(|1-\lambda|, \theta) \frac{\overline{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta'))}}{1-\lambda} J(|1-\lambda|, \theta') \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in(x(|1-\lambda|, \theta) - x(|1-\lambda|, \theta'))} \hat{V}_2(n) \\
&\quad - \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} \frac{\overline{\alpha(x(|1-\lambda|, \theta))}}{1-\lambda} J(|1-\lambda|, \theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in x(|1-\lambda|, \theta)} \hat{V}_2(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{V} \hat{\psi}^{(0)}(\theta'; \lambda))_{21}(n), \\
A_{22} &= \frac{1}{4}(2\pi)^{-1} J(|1-\lambda|, \theta) J(|1-\lambda|, \theta') \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in(x(|1-\lambda|, \theta) - x(|1-\lambda|, \theta'))} \hat{V}_2(n) \\
&\quad - \frac{1}{2}(2\pi)^{-1} J(|1-\lambda|, \theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in x(|1-\lambda|, \theta)} \hat{V}_2(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{V} \hat{\psi}^{(0)}(\theta'; \lambda))_{22}(n).
\end{aligned}$$

6 今後の課題-逆散乱問題に向けて

磯崎・コロチャーエフ [4] は正方格子において逆散乱問題まで論じている. その概略は以下の通りである;

1. 正方格子上の離散ラプラシアンをフーリエ変換でトーラス上の掛け算作用素に変換する. その時, 掛け算される函数 $p(x) = 1/2(\sum_{j=1}^d \cos x_j + d) = E$ から $E \rightarrow N + i$ としたときの x_j の解析接続の漸近挙動を調べる.
2. レゾルベント $\hat{R}(z)$ の $z \rightarrow \infty$ としたときの減衰評価を求める.
3. 散乱振幅の表示式において $\lambda \rightarrow N + i$ としてレゾルベントを含まない第一項と含む第二項の漸近挙動の違いを調べるによりポテンシャルを順次決定していく.

六角格子において正方格子の場合と同様に逆散乱問題を考えるに当たって, 以下の点を解決する必要がある.

1. 六角格子では $p(x)^2 = 1/9(3 + 2\cos x_1 + 2\cos x_2 + 2\cos(x_1 - x_2)) = E^2$ から E を複素数にしたときの x_1, x_2 の解析接続の様子を調べる必要がある.
2. レゾルベント $\hat{R}(z)$ の $z \rightarrow \infty$ としたときの減衰評価を求める. その際, 磯崎・コロチャーエフ [4] では正方格子 $\mathbb{Z}^d$ において l^1 ノルムを用いているが, 六角格子で l^1 ノルムを用いると十分な減衰評価を得ることができないので何らかの工夫が必要である.

参考文献

- [1] C. Allard and R. Froese. A Mourre estimate for a Schrödinger operator on a binary tree. *Rev. Math. Phys.*, Vol. 12, No. 12, pp. 1655–1667, 2000.

- [2] Anne Boutet de Monvel and Jaouad Sahbani. On the spectral properties of discrete Schrödinger operators. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 326, No. 9, pp. 1145–1150, 1998.
- [3] Anne Boutet de Monvel and Jaouad Sahbani. On the spectral properties of discrete Schrödinger operators: the multi-dimensional case. *Rev. Math. Phys.*, Vol. 11, No. 9, pp. 1061–1078, 1999.
- [4] Hiroshi Isozaki and Evgeny Korotyaev. Trace Formulae and Inverse Problems for Discrete Schrödinger Operators. *preprint*, 2009.
- [5] Marius Măntoiu, Serge Richard, and Rafael Tiedra de Aldecoa. Spectral analysis for adjacency operators on graphs. *Ann. Henri Poincaré*, Vol. 8, No. 7, pp. 1401–1423, 2007.
- [6] 磯崎洋. 多体シュレーディンガー方程式. シュプリンガー, 2004.