

Yang-Mills-Higgs 理論と 戸田格子方程式

京大 数理解 南 政次

Minami Masatsugu

場の理論には相対性不変という強い要請が付きますので、名だたるソリトン方程式も、素粒子論にやたら登場するわけではない。はやくから登場したそのとして sine-Gordon があり、特に massive Thirring 模型との絡み等はその面白い一例だろうが、著しい例として最近（といって 1978 年頃からだが）戸田格子方程式がこの分野で注目を集めている。素粒子論における非線型場の理論とは、いまのところ、Yang-Mills-Higgs に尽きるのだが、その特殊な場合に登場し、戸田方程式自身のその美しさもあって、一般的なゲージ群にまで見透しがよいのは、いまのところこの場合だけではないかと思う。以下、文献を chronological に紹介することを目的にし、どのように戸田格子方程式がこの分野に現われるに至ったか、その動向を解説したい。

戸田格子方程式は様々な形で書けるが、とりあえず

$$\partial_u \partial_{\bar{u}} \Phi_\alpha = \pm \exp[-K_{\alpha\beta} \Phi_\beta] \quad (*)$$

とする。(K_{αβ}) は Yang-Mills のゲージ群（一般に半単純な

Lie 群) G を (又は, α) 規定する Cartan 行列で, $G = SU(\infty)$ のとき もとの戸田格子方程式になっている。rank が有限の時は戸田分子方程式とも呼ばれるが, これは $(K_{\alpha\beta})$ の定める Dynkin 図の "dual" が有限な戸田鎖で, こゝを分子と見たててのことである。 $u = s + it$ の二変数の時は二次元 Toda, $u = \pm \bar{u}$ の時は一次元 Toda と呼ぶことにする。 $K_{\alpha\beta}$ の入れ方は唐突に見えるかもしれないが, 戸田方程式(*)を Zakharov-Shabat 方程式に移してやると, これはゲージ・ポテンシャル B が "純ゲージ" $B = R^{-1} \partial R$ 型であることを言っているので, 容易に G の generators によつて書き下せ, Chevalley-Serre の基を使えば $K_{\alpha\beta}$ は自然にあらわれる (一次元の時も同じ, 但し従来の Lax pair ではうまく乗らないだろう)。 Yang-Mills (といっても self-dual なもの) を "純ゲージ" 型へ還元して行くのは一般に易しくないが, 上の B 型のものが Yang-Mills のポテンシャルと同じ構造を有っていると思つて貰つてよく, 又 Yang の R-gauge [4] の言葉を使つと, 矢張り上の R はこれに対応するもので, Ψ も Yang の有名な

$$R = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\phi} & \phi \end{pmatrix}$$

という表示との対応で言うと, $\Psi = \log \phi$ ぐらいの意味を持つ (詳しくは [18])。

A_2 型の Lie 環は素粒子論で頻繁に使われるものであるが、 $G=SU(2)$ はいつものお祭場になる。この場合 Toda は Liouville 方程式になる ($K_{11}=2$)。この方程式は Dual Resonance Theory にも現われているが (Omnès, N.P. B149 (79) 269, Polyakov), Yang-Mills では E. Witten [3] による。この論文は無限の instantons の存在を証明した画期的なものだが、彼は量が時直かと、あと空間は $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ にのみ依存すると仮定して (cylindrical symmetry 仮定), 方程式を単純化し、Liouville を得、その解によって上の証明を行ったのである。彼の形式を Zakharov-Shabat 型で捉えることも不可能でないと思うが、彼は巧妙に上の仮定によって四元ポテンシャルを $A_0, A_1, \varphi_1, \varphi_2$ で書きなおし、 A_i の方は二次元ポテンシャルみたいに ($\partial_i A_i = 0$), φ_i の方は Higgs 場みたいにして了解り、 $A_i = \epsilon_{ij} \partial_j \psi$ の ψ が——少し曲折はあるが——Liouville を満たすようになるのである。

次に (歴史的に) 意味のある論文は [5] であろう。これは Witten の方法を $SU(3)$ に踏襲したもので、この self-duality 方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 2e^{2\varphi} - e^{2\varphi'} \\ \nabla^2 \varphi' &= -e^{2\varphi} + 2e^{2\varphi'} \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

に還元された。このようにして

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

はまさに A_2 の Cartan 行列で, $(**)$ は二次元戸田分子方程式になっているのである (イギリスの Yates も同じことを試みているが, $SU(2)$ の埋め込みが拙く, こうすんなりとは行かなかった)。しかし, Bais と Weldon がここに Cartan 行列の入っていることを意識していたかどうかは判らない。というのは [8] において $G = SU(n)$ に一般化したのだが ($SU(n)$ への $SU(2)$ 埋め込みは, この頃には大分楽になってきている) まだ変数のとり方が悪く, $(*)$ の形には行かなかった ($(**)$ へは reduce するのだが)。ここで, $(*)$ の形にこだわるのは, Toda との関連は $(*)$ の形 (もしくは $-K_{\alpha\beta}\Phi_{\beta} \sim \Phi_{\beta}$ とあって) でなければ判らないからである。Bais-Weldon はだから戸田格子とは言っていない。

一方, Leznov と Saveliev と Witten の $SU(2)$ から出発して考察を遂げていたようで [7] において (Bais-Weldon の $SU(n)$ と同時期に) 一般の半単純 Lie 群をゲージ群とする場合に $(*)$ 型の式を出した。彼等は仮定を群論の言語で整理していたので Cartan 行列に出会っていたのだが, 正確に言うとまだ $(*)$ の形ではなく, 戸田格子とも言っていない。[10] でも然りである。結局, 最もよく整頓された形で現れるのは [14], [15] であると思う。ここでは明白に Toda lattice 方程式の一般化として捉えられている。群論の駆使もするところが

ら、 ρ 田方程式がリ連でよく (欧米より?) 知られていたとい
うことが重な、たのみかもしれない。

初め、E. Witten の論文には、もう一つ示唆があって、そ
れは彼の仮定によ、て作用が恰も二次元のポテンシャルと
二つの Higgs 場による作用に還元されてしまっていること、
単に云えば Higgs 場の入ったものを Liouville/Toda へ通
じると (1) ということである。一先 [2] に於いて Bogomolny
は四次元 Yang-Mills で 時間 を 度外視し、 A_0 を Higgs ϕ とす
ると static な Yang-Mills-Higgs になることを示し、所謂 self-
duality 方程式が後年 Bogomolny 方程式と呼ばれるものになり、
その解が非アーベル磁気 monopole^{†)} を与えることを示していた
ので、こちらにも Toda 型 (但し 時間 に 独立) が現われると
いうことが予想されたわけである。Bogomolny の扱ったのは
 $SU(2)$ で、それが [1] で self-duality の考えを使わずに得ら
れていったもの (実際は独立) に一致するわけだが、勿論 Toda
への見通しはない。

Bais-Weldon [6] は、 $SU(2)$ の埋め込み方を知っていたの

^{†)} 磁気 monopole は 電極の dual な概念として Dirac によって考えられた
ものだが、Maxwell $U(1)$ 理論の枠内では、磁荷が smooth な分布を持
つというわけにはゆかなかった。しかし Yang-Mills 非アーベル理論では
何れの特異性を持ち込まずに存在できる。非線型項が smooth outさ
れる 磁荷密度 のように働くのである。magnetic monopole の物理的
存在性は 宇宙の冷却過程における相転移の文脈で論じられている。

で、 $SU(n)$ の場合 球対称な self-dual monopole の方程式が矢張り一次元戸田分子型 (ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ が変数) になることを示し得た (式の形は [8] と同様な (*) のようではない。しかし (*) へは変数変換でゆける)。[7] においては、四次元 Yang-Mills と三次元 Yang-Mills-Higgs が同じように扱われているのも上のことによる。

結局、Instanton の場合 円筒仮定で二次元戸田分子、球対称磁気 monopole の場合 一次元戸田分子方程式が Yang-Mills (Higgs) の中心の方程式になるわけだが、初め解についてはどうかということ (物理屋の範囲では) 二次元 Toda については [14, 15] が、一次元 Toda については (Kostant その他は勘弁願うとして) [13] で一応与えられていることになっている。但し、存在定理だけが与えられているようなもので、具体的にどうかということ、ちょっとやさしくでは解らない。Olive の [17] は磁気 monopole についてのこの方面の review で、解は Leznov-Saveliev によっているが、いくらも易く解題にしていると言える。それでも、この方法で $SU(2)$ の Witten の解 (昔から知られているものだが) を出すのですら——— 直接 Olive 氏から伺ったことがあるが——— まあまあ大変な手続きが必要という感じである。[18] は二次元 Toda の解法を別の観点からもっとすっきりさせたものである。但しゲージ

群は典型 Lie 群に限らざるを得なかった。抽象的にやるか、具体的に進めるかで、得るところは違ふのである。

たゞ monopole に限れば一次元戸田分子方程式の解だけが有用なので [13] で本質的によいのだが (Olive 氏には [13] が不可解だったとかで、先述のように二次元の解から還元するという形でやっていると)、Wilkinson-Bais は [9] で $SU(n)$ の場合独自に、Koikawa [20] は馴染みの方法で解いている。Olive のやり方も含めて、これらは物理的な境界条件を重視して特殊解を捻り出して来るわけである。実は [18] の群論的見方をすると、一次元の場合と一般解を求め書き下すことが出来、[9] の結果など含まれて了う ([22], 但し典型 Lie 群)。

紙数の関係で、こゝまで留めるが、一つ強調したいのは、球対称の monopole や instanton が、一般の n と higher rank のゲージ群の場合に至るまで見通しよく解明されて来たのは戸田方程式の持つ数学的構造の見事さ、控え目でも背景に Lie 環を考へることが出来るという点にあったということである。軸対称の monopole の場合、武野氏や依々木氏の稿で示されるように Ernst 方程式やその Bäcklund 変換などの n へ興味深い流れ方をするのであるが、higher rank の場合の論述については Bais-Sasaki 以前は殆んど見られなかったのは、非常に対照的と言える。今後についても、戸田分子の量子論

などは、場の量子論のなかで一定の働きをするかもしれない。

尚、(*)式を $\mathcal{L} = -K_{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta$ でなく Φ_α で書いたのは、その Φ が Euclidean Lie 代数をとりこむことが出来るからである (この場合 $\det(K_{\alpha\beta}) = 0$)。例えば $A_2^{(1)}$ 型は特に面白い対称性にも恵われている (e.g. [17], [20]), その戸田分子は ring になる。 $A_1^{(1)}$ の場合, $2(\Phi_1 - \Phi_2) = \rho$ とおくと, (*) は $\partial_u \partial_{\bar{u}} \rho = -4 \sinh \rho$ なる sinh-Gordon, 他は $A_2^{(2)}$ ならば $\Phi_1 - 2\Phi_2 = \rho$ とおいて, $\partial_u \partial_{\bar{u}} \rho = e^{-2\rho} - 2e^\rho$ となり Bullough-Dodd 方程式, 等々。

- [1] Prasad-Sommerfield, PRL 35, 760 (June 1975)
 - [2] Bogomolny, S-J-NP 24, 449 (Nov 1975)
 - [3] E. Witten, PRL 38, 121 (Nov 1976)
 - [4] Yang, PRL 38, 1377 (Apr 1977)
 - [5] Bais-Weldon, PR D18, 561 (Apr 1978)
 - [6] Bais-Weldon, PRL 41, 601 (June 1978)
 - [7] Leznov-Saveliev, PL 79B, 294 (July 1978)
 - [8] Bais-Weldon, PL 79B, 297 (July 1978)
 - [9] Wilkinson-Bais, PR D19, 2410 (Oct 1978)
 - [10] Leznov-Saveliev, PL 83B, 314 (Feb 1979)
 - [11] Leznov, TMP 42 No. 3 (Feb 1979)
- $\left. \begin{array}{l} \text{[1]} \text{ Prasad-Sommerfield, PRL } 35, 760 \text{ (June 1975)} \\ \text{[2]} \text{ Bogomolny, S-J-NP } 24, 449 \text{ (Nov 1975)} \end{array} \right\} \text{SU(2) monopole}$
 $\text{[3]} \text{ E. Witten, PRL } 38, 121 \text{ (Nov 1976)} \quad \text{SU(2) instanton}$
 $\text{[4]} \text{ Yang, PRL } 38, 1377 \text{ (Apr 1977)} \quad \text{R-gauge}$
 $\text{[5]} \text{ Bais-Weldon, PR } D18, 561 \text{ (Apr 1978)} \quad \text{SU(3) instanton}$
 $\text{[6]} \text{ Bais-Weldon, PRL } 41, 601 \text{ (June 1978)} \quad \text{SU(n) monopole}$
 $\text{[7]} \text{ Leznov-Saveliev, PL } 79B, 294 \text{ (July 1978)} \quad \text{any semi-simple}$
 $\text{[8]} \text{ Bais-Weldon, PL } 79B, 297 \text{ (July 1978)} \quad \text{SU(n) instanton}$
 $\text{[9]} \text{ Wilkinson-Bais, PR } D19, 2410 \text{ (Oct 1978)} \quad \text{SU(n) monopole}$
 $\text{[10]} \text{ Leznov-Saveliev, PL } 83B, 314 \text{ (Feb 1979)} \quad \text{SU}_3, O_5, G_2$
 $\text{[11]} \text{ Leznov, TMP } 42 \text{ No. 3 (Feb 1979)} \quad \text{= Toda}$

- [12] Mikhailov, JETP 30 No.7 (May 1979) $\Rightarrow \hat{z} \hat{z}$ Toda
- [13] Olshanetsky-Perelomov, Inv. Math. 54 261 (June 1979) $-\hat{z} \hat{z}$ Toda
- [14] Leznov-Saveliev, CMP 74, 111 (Aug 1979) $\Rightarrow \hat{z} \hat{z}$ Toda
- [15] Leznov-Saveliev, LMP 3, 489 (Sept 1979) "
- [16] Mikhailov-Olshanetsky-Perelomov, CMP 79, 1981 (July 80)
- [17] Olive, in Current Topics in Elem. Parti. Phys. (Plenum) p.199.
- [18] Farwell-Minami, JP A15, 25 (May 1981) $\Rightarrow \hat{z} \hat{z}$ Toda
- [19] Farwell-Minami, JP A15, 355 (July 1981) $A_L^{(1)}$
- [20] Koikawa, PL 110B, 129 (Dec 1981) $SU(n)$ monopole
- [21] Giamoulis-Goddard-Olive, NP B 265 [FS5], 601.
- [22] Farwell-Minami, to appear (One-Dim Toda Molecule, I, II).