

次数 2 の Siegel 保型形式の Fourier 展開と GSp(2, $\mathbf{R}$) 上の局所 Bessel 関数

上智大学理工学部 森山 知則
(Tomonori Moriyama)

§0. 序

本稿では、一般斜交群 GSp(2, $\mathbf{R}$) 上の局所 Bessel 関数 (模型) の一意性やその明示公式についてのべる。Bessel 関数は、次数 2 の (非正則) Siegel 保型形式の Fourier 展開で中心的な役割を果たす。この関数については、すでに「定符号指標」に付随する場合には S.Niwa[Ni-2], T.Miyazaki[Mi-2], および T.Ishii[Is] による詳しい研究がある。一方、「不定符号指標」に付随する局所 Bessel 模型については、ほとんど調べられていないようである (但し, [Ni-1],[Mi-1],[Mi-3] を参照)。そこで、手始めに GSp(2, $\mathbf{R}$) の一般化主系列表現の局所 Bessel 模型を「不定符号指標」に付随するときに調べてみた。具体的には、この模型の一意性を、簡約リー群上の緩増大関数に関する Harish-Chandra の一定理を用いて示すことが出来た。また局所 Bessel 関数の明示公式が部分的ではあるが得られた。これらの結果はもっと広いクラスの GSp(2, $\mathbf{R}$) の許容表現についても得られると期待している。

§1 で Siegel 保型形式の Fourier 展開における Bessel 関数の役割について説明し、§2 で我々の結果を述べる。

§1. 次数 2 の Siegel 保型形式の Fourier 展開

この節では、次数 2 の Siegel 保型形式の Fourier 展開と Bessel 関数、Whittaker 関数との関係について述べる ([Ps], [Su] も参照)。

(1.1) Fourier 展開の第一段階. G を有理数体 $\mathbf{Q}$ 上定義された次数 2 の一般斜交群とする:

$$G = \mathrm{GSp}(2) := \{g \in \mathrm{GL}(4) \mid {}^t g J_4 g = \nu(g) J_4, \exists \nu(g) \neq 0\}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

G の中心は $Z := \{z 1_4 \in G \mid z \in \mathbf{G}_m\}$ で与えられる。中心指標 $\omega : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}$ をもつ $G_{\mathbf{A}}$ 上の保型形式及び尖点形式のなす空間をそれぞれ $\mathcal{A}(G_{\mathbf{Q}} Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}; \omega)$ 及び $\mathcal{A}^{cusp}(G_{\mathbf{Q}} Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}; \omega)$ で表す。さて、保型形式 $F \in \mathcal{A}(G_{\mathbf{Q}} Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}; \omega)$ を G の Siegel 放物型部分群 P に沿って Fourier 展開する事を考える。ここで Siegel 放物型部分群 P とその Levi 分解 $P = MN$ を次の様に固定する:

$$\begin{aligned} P &:= \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \in G \right\}; \\ M &:= \left\{ \begin{pmatrix} m & \\ & \lambda {}^t m^{-1} \end{pmatrix} \mid m \in \mathrm{GL}(2), \lambda \in \mathrm{GL}(1) \right\}; \\ N &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & X \\ & 1_2 \end{pmatrix} \mid X \in \mathrm{Sym}^2 \right\}. \end{aligned}$$

$N_{\mathbf{Q}} \backslash N_{\mathbf{A}}$ はアーベル群で、その指標は $\beta \in \text{Sym}^2(\mathbf{Q})$ を使って

$$\psi_{\beta} : N_{\mathbf{Q}} \backslash N_{\mathbf{A}} \ni \left(\frac{1_2 \mid X}{1_2} \right) \mapsto \psi(\text{tr}(\beta X)) \in \mathbf{C}^{(1)}$$

とかける。ここで、 $\psi : \mathbf{Q} \backslash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}$ は $\psi(t_{\infty}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t_{\infty})$ ($t_{\infty} \in \mathbf{R}$) なる指標である。すると、 F は、

$$(1.1) \quad F(g) = \sum_{\beta \in \text{Sym}^2(\mathbf{Q})} F_{\beta}(g), \quad F_{\beta}(g) := \int_{N_{\mathbf{Q}} \backslash N_{\mathbf{A}}} dn F(n g) \psi_{\beta}^{-1}(n)$$

と Fourier 展開される。したがって、保型形式 F は $\{F_{\beta} | \beta \in \text{Sym}^2(\mathbf{Q})\}$ によって決まるわけだが、 F_{β} たちのもつ情報には重複がある。すなわち、

補題 1. 2つの2次対称行列 $\beta, \beta' \in \text{Sym}^2(\mathbf{Q})$ をとる。 $m \in \text{GL}(2)_{\mathbf{Q}}$ 及び $\lambda \in \mathbf{Q}^{\times}$ が存在して $\beta' = \lambda^{-1} {}^t m \beta m$ が成立すると仮定する。このとき

$$F_{\beta'}(g) = F_{\beta}\left(\frac{m \mid}{\lambda {}^t m^{-1}} g\right), \quad g \in G_{\mathbf{A}}$$

が成立する。

また、Fourier 展開 (1.1) より、 F がゼロでない尖点形式ならば少なくとも次のいずれかが成立する：

- (a): $\det(\beta) = 0$ なる対称行列 $\beta (\neq 0_2) \in M_2(\mathbf{Q})$ に対して、 $F_{\beta}(g) \neq 0$;
- (b): $\det(\beta) > 0$ なる対称行列 $\beta \in M_2(\mathbf{Q})$ に対して、 $F_{\beta}(g) \neq 0$;
- (c): $\det(\beta) < 0$ なる対称行列 $\beta \in M_2(\mathbf{Q})$ に対して、 $F_{\beta}(g) \neq 0$ 。

実は、尖点形式に対しては、(b) または (c) が必ず成立する ([Li])。正則 Siegel 尖点形式では、(b) のみが成立し、(a), (c) は成立しない。一般には3条件は排反ではない。

(1.2) Fourier 展開の第2段階. さて、保型的 L -関数等への応用を考えると、上述の Fourier 展開をさらに細分化した展開を考える必要がある。まず $\det(\beta) \neq 0$ のときを考える。 $\text{GL}(2)$ の部分群 T_{β} を

$$T_{\beta} := \{u \in \text{GL}(2) \mid {}^t u \beta u = \det(u) \beta\}$$

で定義する。これは similitude 付きの直交群 $\text{GO}(\beta)$ の (Zariski 位相に関する) 単位元連結成分に同型である。また、 $\mathbf{Q}$ 上の2次分離代数 K_{β} を

$$K_{\beta} := \mathbf{Q}[t]/(t^2 + \det \beta) \cong \begin{cases} \mathbf{Q}(\sqrt{-\det \beta}) & -\det \beta \notin (\mathbf{Q}^{\times})^2; \\ \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q} & -\det \beta \in (\mathbf{Q}^{\times})^2, \end{cases}$$

で定めれば、 $-\det \beta \notin (\mathbf{Q}^{\times})^2$ または $-\det \beta \in (\mathbf{Q}^{\times})^2$ に応じて、 $T_{\beta} \cong \text{Res}_{K_{\beta}/\mathbf{Q}} \text{GL}(1)$ または $T_{\beta} \cong \text{GL}(1) \times \text{GL}(1)$ となる。 T_{β} を埋め込み

$$T_{\beta} \ni u \mapsto \left(\frac{u \mid}{\det(u) {}^t u^{-1}} \right) \in G$$

によって、 G の部分代数群とみなす。さて、補題 1.1 より

$$F_{\beta}(ug) = F_{\beta}(g), \quad \forall u \in T_{\beta, \mathbf{Q}}$$

が成立する。そこで,

$$\begin{aligned}\Xi_\omega &:= \{\chi \in \Gamma_{\beta, \mathbf{Q}} \backslash \Gamma_{\beta, \mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} \mid \text{指標}, \chi(z) = \omega(z) \ (z \in \mathbf{Z}_{\mathbf{A}})\} \\ \Xi_0 &:= \{\chi \in \Gamma_{\beta, \mathbf{Q}} \backslash \Gamma_{\beta, \mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)} \mid \text{指標}, \chi(z) = 1 \ (z \in \mathbf{Z}_{\mathbf{A}})\}\end{aligned}$$

と置き, 指標 $\chi \in \Xi_\omega$ に対して, 大域 Bessel 関数 $B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g)$ を

$$(1.2) \quad B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g) := \int_{\mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \Gamma_{\beta, \mathbf{Q}} \backslash \Gamma_{\beta, \mathbf{A}}} F_\beta(ug) \chi(u)^{-1} du, \quad g \in \mathbf{G}_{\mathbf{A}}$$

で (積分が収束するときに) 定義する。大域 Bessel 関数について, 次が成立する:

命題 2. (i) $-\det(\beta) \notin (\mathbf{Q}^\times)^2$ とする。このとき, 積分 (1.2) は絶対収束する。 $\mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \Gamma_{\beta, \mathbf{Q}} \backslash \Gamma_{\beta, \mathbf{A}}$ の体積を 1 となるように正規化すると, 次の反転公式

$$F_\beta(g) = \sum_{\chi \in \Xi_\omega} B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g)$$

が成立する。

(ii) $-\det(\beta) \in (\mathbf{Q}^\times)^2$ とする。このとき, F が尖点形式ならば, 積分 (1.2) は絶対収束する。 $\chi_0 \in \Xi_\omega$ を任意に一つ固定し, 全単射 $\Xi_0 \ni \chi \mapsto \chi_0 \chi \in \Xi_\omega$ を通じて指標群 Ξ_0 上の Haar 測度を Ξ_ω に移す (この Ξ_ω 上の測度は, χ_0 のとり方によらない)。すると, 次の反転公式

$$F_\beta(g) = \int_{\chi \in \Xi_\omega} B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g) d\chi.$$

が成立する。

注意 (i) $-\det(\beta) \notin (\mathbf{Q}^\times)^2$ のときには, $\mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \Gamma_{\beta, \mathbf{Q}} \backslash \Gamma_{\beta, \mathbf{A}} \cong \mathbf{A}^\times K_\beta^\times \backslash \mathbf{A}_{K_\beta}^\times$ はコンパクトである。一方, $-\det(\beta) \in (\mathbf{Q}^\times)^2$ のときには $\mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \Gamma_{\beta, \mathbf{Q}} \backslash \Gamma_{\beta, \mathbf{A}} \cong \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times$ は非コンパクトであるが, F を尖点形式ならば積分 (1.2) は収束する。

(ii) 文献によつては, Bessel 関数を一般化 Whittaker 関数 ([Ni-1], [Mi-2]), Siegel-Whittaker 関数 ([Is]), ないしは一般化 Bessel 関数 ([No], [No-Ps]) と呼んでいる。

(1.3) 局所 Bessel 関数. $R_\beta = \Gamma_\beta \mathbf{N}$ と置き, $R_{\beta, \mathbf{A}}$ の指標 $\chi \cdot \psi_\beta$ を

$$(\chi \cdot \psi_\beta)(un) = \chi(u) \psi_\beta(n), \quad (u, n) \in \Gamma_{\beta, \mathbf{A}} \times \mathbf{N}_{\mathbf{A}}$$

で定める。上述の大域 Bessel 関数 $B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g)$ は, 次の誘導表現の空間に属す:

$$C^\infty(R_{\beta, \mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \chi \cdot \psi_\beta) := \{B : \mathbf{G}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C} \mid B(rg) = (\chi \cdot \psi_\beta)(r) B(g), \ (r, g) \in R_{\beta, \mathbf{A}} \times \mathbf{G}_{\mathbf{A}}\}$$

より詳しく, 保型形式 F が緩増大であることから, $B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g)$ は

$$C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \chi \cdot \psi_\beta) := \{B \in C^\infty(R_{\beta, \mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \chi \cdot \psi_\beta) \mid B \text{ は緩増大}\}$$

に属することが分かる。保型形式の空間 $\mathcal{A}(\mathbf{G}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \omega)$ の (既約) 部分加群 $\Pi = \otimes \Pi_v \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{G}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \omega)$ を一つとる。すると,

$$\Pi \ni F \mapsto B_F^{\chi \cdot \psi_\beta} \in C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \chi \cdot \psi_\beta)$$

は $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times \mathbf{G}_{\mathbf{A}_f}$ -加群の間の準同型を定める。つまり, Π が $C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \chi \cdot \psi_\beta)$ の部分加群として実現される。一般に, Π と同型な $C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \chi \cdot \psi_\beta)$ の部分加群を Π の大域 Bessel 模型と呼ぶ。ここで, 大域 Bessel 模型の一意性すなわち, 絡空間

$$\text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K_\infty) \times \mathbf{G}_{\mathbf{A}_f}}(\Pi, C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \chi \cdot \psi_\beta),$$

が高々 1 次元であることが望まれる。大域 Bessel 模型の一意性を考察するために、対応する局所的な問題を考える。指標 $\chi \cdot \psi_\beta$ の $R_{\beta, \mathbf{Q}_v}$ への制限を $(\chi \cdot \psi_\beta)_v$ と書き、誘導表現の空間

$$C^\infty(R_{\beta, \mathbf{Q}_v} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_v}; (\chi \cdot \psi_\beta)_v) := \{B : \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_v} \rightarrow \mathbf{C} \mid B(rg) = (\chi \cdot \psi_\beta)_v(r)B(g), \quad (r, g) \in R_{\beta, \mathbf{Q}_v} \times \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_v}\}$$

を定める。 $\mathbf{Q}_v \cong \mathbf{R}$ のときには、

$$C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{R}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{R}}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty) := \{B \in C^\infty(R_{\beta, \mathbf{R}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{R}}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty) \mid B \text{ は緩増大}\}$$

なる部分空間も考える。このとき次が知られている:

命題 3 ([No], [No-Ps])). $v = p < \infty$ を有限素点とする。 $\mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ の任意の既約許容表現 π に対して、絡空間 $\text{Hom}_{\mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\pi, C^\infty(R_{\beta, \mathbf{Q}_p} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p}; (\chi \cdot \psi_\beta)_p))$ は高々 1 次元である。

ゼロでない絡作用素

$$\Psi \in \text{Hom}_{\mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\pi, C^\infty(R_{\beta, \mathbf{Q}_p} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p}; (\chi \cdot \psi_\beta)_p))$$

が存在するとき、 $B_\xi(g_p) := \Psi(\xi)(g) \in C^\infty(R_{\beta, \mathbf{Q}_p} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p}; (\chi \cdot \psi_\beta)_p)$ ($\xi \in \pi, g_p \in \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p}$) を局所 Bessel 関数といい、その全体 $\{B_\xi \mid \xi \in \pi\}$ を π の局所 Bessel 模型という。 π が標準的極大コンパクト部分群 $K_p := \mathbf{G}_{\mathbf{Q}_p} \cap \text{GL}(4; \mathbf{Z}_p)$ についての不変ベクトル $\xi_0 \in \pi^{K_p}$ をもつときには、 B_{ξ_0} の公式が T.Sugano [Su, Proposition 2-5 (i)] によって得られている。

上の命題から、標準的な議論によって、もし保型形式 $F \in \Pi$ が制限テンソル積の中で $\otimes' \xi_v \in \otimes' \Pi_v$ と分解しているのならば、大域 Bessel 関数 $B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g)$ は

$$B_F^{\chi \cdot \psi_\beta}(g) = B^{(\infty)}(g_\infty) \times \prod_{p < \infty} B_{\xi_p}^{(p)}(g_p), \quad g = (g_v) \in \mathbf{G}_{\mathbf{A}}$$

と局所 Bessel 関数 $B_{\xi_p}^{(p)}$ たちを用いて書ける。ここで、 $B^{(\infty)} \in C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{R}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{R}}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty)$ である。しかしながら、ここで問題となるのは、命題 3 の無限素点での対応物

$$(1.3) \quad \dim_{\mathbf{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(\Pi_\infty, C_{mg}^\infty(R_{\beta, \mathbf{R}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{R}}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty)) \leq 1$$

が一般にはまだ示されていないということである。そのため、 $B^{(\infty)}$ が Π_∞ と ξ によって定数倍を除いて一意に定まるか分からない。第 2 節では、この局所 Bessel 模型の一意性 (1.3) が π_∞ がある一般化主系列表現では成立していることを示す。

(1.4) $\det(\beta) = 0$ のとき-大域 Whittaker 模型と定数項-。 $\det(\beta) = 0$ のときにも、 F_β をさらに展開する事を考える。まず、 $\beta \neq 0_2$ のときだが、補題 1.1 によって、 $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と仮定してよい。すると、 $\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A}$ 上の関数

$$h_F(x_0; g) = F_\beta \left(\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_0 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ & -x_0 & 1 \end{array} \right) g \right)$$

に Fourier 逆変換公式を適用して、

$$F_\beta(g) = \int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A}} h_F(x_0; g) dx_0 + \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}^\times} \mathcal{W}_F \left(\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline & 1 \\ \hline & \alpha^{-1} \\ & & 1 \end{array} \right) g \right)$$

を得る。ここで、 $\mathcal{W}_F$ は

$$\mathcal{W}_F(g) = \int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A}} h_F(x_0; g) \psi(x_0)^{-1} dx_0$$

で定義される関数で、 $h_F(x_0; g)$ の定義を代入してみれば分かるように、これはいわゆる大域 Whittaker 関数に他ならない。一方、 $\int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A}} h_F(x_0; g) dx_0$ は、 F の定数項をさらに積分したものだから、 F が尖点形式ならばゼロである。ここまでの議論で次の命題のうち (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が示されたことに注意:

命題 4. 尖点形式 $F \in \mathcal{A}^{cusp}(\mathbf{G}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}} \backslash \mathbf{G}_{\mathbf{A}}; \omega)$ について、次の 3 条件は同値である:

- (i) 条件 (a) がなりたつ;
- (ii) F の大域 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F$ が消えない;
- (iii) $-\det(\beta) \in (\mathbf{Q}^{\times})^2$ なる $\beta \in \text{Sym}^2(\mathbf{Q})$ に対して、 $F_{\beta} \neq 0$.

Proof. (iii) $\Rightarrow$ (ii) は、例えば [K-R-S, Lemma 8.2] にある。(ii) $\Rightarrow$ (iii) を示そう。 $w_2 \in \mathbf{G}_{\mathbf{Q}}$ を置換 (2, 4) に対応する Weyl 群の元とする。 $\mathcal{W}_F(gw_2) \neq 0$ から、

$$\int_{(\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A})^2} F\left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} g\right) \psi(x_2) dx_1 dx_2 \neq 0$$

である。これを、2 行 4 列の成分についてさらにフーリエ展開すれば、適当な $a \in \mathbf{Q}$ が存在して $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & a \end{pmatrix}$ に対して $F_{\beta} \neq 0$ となることがわかる。□

最後に、 $\beta = 0_2$ のときを考える。 F が尖点形式ならば、 $F_{0_2} = 0$ である。 F が尖点形式でないときには、上と同様にして $h_F(x_0; g)$ を定義し、その x_0 に関するフーリエ展開を書くことがもちろんできる。この場合には、「退化指標に関する Whittaker 関数」が出てくる。

§2. 局所 Bessel 関数の一意性と明示公式

(2.1) 主結果 主結果を述べるために、ここで問題とする一般化主系列表現を定義する。 $\mathbf{G}$ の Jacobi 型放物型部分群 $\mathbf{P}_1$ は

$$\mathbf{P}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} \in \mathbf{G} \right\}$$

で与えられる。その $\mathbf{R}$ -値点のなす群 $P_1 := P_{1,\mathbf{R}}$ の Langlands 分解 $P_1 = M_1 A_1 N_1$ を次の様に固定する:

$$M_1 := \left\{ \text{diag}(\epsilon_0 \epsilon_1, \epsilon_0, \epsilon_1, 1) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline a & b \\ \hline c & d \end{array} \right) \mid \epsilon_0, \epsilon_1 = \pm 1, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}) \right\};$$

$$A_1 := \left\{ z_\infty \text{diag}(a_1, 1, a_1^{-1}, 1) \mid z_\infty, a_1 > 0 \right\}$$

$$N_1 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & \\ \hline & & 1 & \\ & * & & 1 \end{array} \right) \in G_{\mathbf{R}} \right\}.$$

$\sigma \in \widehat{M_1}$ を $\sigma|_{SL(2,\mathbf{R})} = D_n \oplus D_{-n}$ ($n \geq 1$) および $\sigma|_{SL(2,\mathbf{R})}(\text{diag}(-1, 1, -1, 1)) = (-1)^n$ で特徴付けられる M_1 の既約ユニタリ表現とする。但し, D_m は極小 $SO(2)$ -type m をもつ $SL(2, \mathbf{R})$ の離散系列表現またはその極限を表す。また, A_1 の quasi-character

$$A_1 \ni z_\infty \text{diag}(a_1, 1, a_1^{-1}, 1) \mapsto a_1^{\nu_1} \in \mathbf{C}^\times$$

を $a_1^{\nu_1}$ と書く。このとき誘導表現 $I(P_{1,\mathbf{R}}; \sigma, \nu_1) = \text{Ind}(G_{\mathbf{R}}, P_{1,\mathbf{R}}; \sigma \otimes a_1^{\nu_1} \otimes 1_{N_1})$ を一般化主系列表現 (あるいは P_1 -主系列表現) という。 $G_{\mathbf{R}}$ のリー環を $\mathfrak{g}$ とし, 極大コンパクト部分群 K を $K = G_{\mathbf{R}} \cap O(4)$ ととる。 $Sp(2, \mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群 $K_0 := K \cap Sp(2, \mathbf{R})$ は

$$K_0 = \left\{ k_{A,B} := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in G_{\mathbf{R}} \mid A + \sqrt{-1}B \in U(2) \right\}$$

となる。 $\xi_0 \in I(P_{1,\mathbf{R}}; \sigma, \nu_1)$ を

$$k_{A,B} \cdot \xi_0 = \det(A + \sqrt{-1}B)^n \xi_0, \quad k_{A,B} \in K_0$$

で特徴付けられるベクトルとする。本稿の主結果は次の通り:

定理 5. $\pi_\infty = I(P_{1,\mathbf{R}}; \sigma, \nu_1)$ であるとする。 $\beta \in \text{Sym}^2(\mathbf{R})$ を不定符号実対称行列とする。 $T_{\beta,\mathbf{R}}$ の指標 χ を「一般の位置」にとる (i.e. 後述の条件 (2.6) を満たすようにとる)。

- (i) 絡空間 $\text{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi_\infty, C_{mg}^\infty(R_{\beta,\mathbf{R}} \backslash G_{\mathbf{R}}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty))$ は高々 1 次元である。
- (ii) 上の絡空間の元 Ψ に対して, $B_{\xi_0} := \Psi(\xi_0) \in C_{mg}^\infty(R_{\beta,\mathbf{R}} \backslash G_{\mathbf{R}}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty)$ のある 1 次元トラス上での値は Meijer の G 関数で書ける ((2.10) を見よ)。

注意 $\beta \in \text{Sym}^2(\mathbf{R})$ を定符号実対称行列のときには, 対応する事実は [Mi-2] で実質的に示されている。 [Mi-2] では, 本稿とは, 増大度条件のつけ方等が異なるが, 上の定理と同様の定式化も可能である ($\text{supp}(B_{\xi_0}) \subset G_{\mathbf{R}}^+ := \{g \in G_{\mathbf{R}} \mid \nu(g) > 0\}$ を示す必要があるが, これも [Mi-2] の計算から分かる)。

(2.2) 局所 Bessel 関数の満たす微分方程式. T. Miyazaki ([Mi-2]) は, ξ_0 から生じる局所 Bessel 関数 $B_{\xi_0}^{(\infty)} \in C_{mg}^\infty(R_{\beta,\mathbf{R}} \backslash G_{\mathbf{R}}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty)$ の満たす微分方程式系を構成した。まず,

$\beta = \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\text{Lie}(T_\beta) = \mathbf{R} \cdot Z \oplus \mathbf{R} \cdot Y_\beta, \quad Y_\beta := \left(\begin{array}{c|c} c_1^{-1} & \\ \hline -c_2^{-1} & \\ \hline & c_2^{-1} \\ & \hline & -c_1^{-1} \end{array} \right).$$

補題 6. $A := \{\text{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) | a_i > 0\}$ と置く。

(i) $c_1 c_2 > 0$ とする。 $T_{\beta, \mathbf{R}} \cong \mathbf{C}^\times$ は連結である。また、次の分解が成立する：

$$G_{\mathbf{R}} = R_{\beta, \mathbf{R}} A \left\langle \begin{pmatrix} -1_2 & \\ & 1_2 \end{pmatrix} \right\rangle K_0.$$

(ii) $c_1 c_2 < 0$ とする。 $c := |c_2/c_1| > 0$ と置くと、

$$T_{\beta, \mathbf{R}} = T_{\beta, \mathbf{R}}^\circ \times \langle -1_4, \epsilon_\beta \rangle \cong \mathbf{R}^\times \times \mathbf{R}^\times, \quad \epsilon_\beta := \left(\begin{array}{c|c} 1/\sqrt{c} & \sqrt{c} \\ \hline -1/\sqrt{c} & -\sqrt{c} \end{array} \right)$$

が成立する。また、分解 $G_{\mathbf{R}} = R_{\beta, \mathbf{R}} A K_0$ が成立する。

いま、 β が不定符号なので、 $c_1 > 0 > c_2$ として一般性を損なわない。補題 6 の (ii) から、 $B_{\xi_0}^{(\infty)}$ は A 上の値で決まる。

$$x = 2\pi(c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2), \quad y = 2\pi(c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2)$$

によって新しい座標 (x, y) を導入し、

$$B_{\xi_0}(\text{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})) = (\sqrt{|c_1|} a_1)^{n+1} (\sqrt{|c_2|} a_2)^{n+1} \exp(-2\pi(c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2)) \varphi(x, y)$$

によって、関数 $\varphi(x, y)$ を定める。[Mi, page 260, (7.3), (7.4)] によれば、 $\varphi(x, y)$ は

$$\begin{aligned} & \left\{ x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c_1 c_2 \chi(Y_\beta)^2}{4} \right\} \varphi(x, y) = 0; \\ & \left\{ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (n+1) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} - 2xy \frac{\partial}{\partial x} - y + \frac{n^2 - \nu_1^2}{4} \right\} \varphi(x, y) = 0. \end{aligned}$$

を満たす。 $\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) y^m$ と展開すると、 $\varphi_m(x)$ は次の微分差分方程式系を満たす：

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \chi(Y_\beta)^2 \frac{c_1 c_2}{4} \right\} \varphi_m(x) = (m+2)(m+1) x^2 \varphi_{m+2}(x), \quad m \geq 0; \\ & (2x \frac{\partial}{\partial x} + m) \varphi_{m-1}(x) - \left\{ \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + (n+2m)x \frac{\partial}{\partial x} + m(m+n) + \frac{n^2 - \nu_1^2}{4} \right\} \varphi_m(x) \\ & + (m+1) x^2 \varphi_{m+1}(x) = 0, \quad m \geq 0. \end{aligned}$$

これらの関係式から、 $\varphi_0(x)$ を決めれば、次々に $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ が決まる。また、 $\varphi_0(x)$ は次の単独方程式を満たす：

$$(2.4) \quad \left\{ \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{n-2+\nu_1}{2} \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{n-2-\nu_1}{2} \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{n+\nu_1}{2} \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{n-\nu_1}{2} \right) \right. \\ \left. - x^2 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + 1 + \rho_\infty \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + 1 - \rho_\infty \right) \right\} \varphi_0(x) = 0.$$

但し、ここで $\rho_\infty := \frac{\chi(Y_\beta) \sqrt{-c_1 c_2}}{2} \in \sqrt{-1} \mathbf{R}$ と置いた。

(2.3) 局所 Bessel 関数の明示公式. 方程式 (2.4) は一般化超幾何方程式なので, その解空間はいわゆる Meijer の G -関数 ([Er],[Me]) で張られる. まず,

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \varphi_0^{<1>}(x) &= G_{2,4}^{4,0}\left(\frac{x^2}{4} \middle| \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\right) \\
 \varphi_0^{<2>}(x) &= G_{2,4}^{4,0}\left(\frac{x^2}{4} e^{2\pi\sqrt{-1}} \middle| \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\right) \\
 \varphi_0^{<3>}(x) &= G_{2,4}^{4,1}\left(\frac{x^2}{4} e^{\pi\sqrt{-1}} \middle| \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\right) \\
 \varphi_0^{<4>}(x) &= G_{2,4}^{4,1}\left(\frac{x^2}{4} e^{\pi\sqrt{-1}} \middle| \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\right).
 \end{aligned}$$

と置こう. ここで, パラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \beta_4$ は

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1 + \rho_\infty}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \rho_\infty}{2}, \\
 \beta_1 &= \frac{2 - n + \nu_1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{2 - n - \nu_1}{2}, \quad \beta_3 = \frac{-n + \nu_1}{2}, \quad \beta_4 = \frac{-n - \nu_1}{2}
 \end{aligned}$$

である. 以下, 指標 $\chi: \mathbb{T}_{\beta, \mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}$ が

$$(2.6) \quad \alpha_j - \beta_k \notin \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1 \leq j \leq 2, 1 \leq k \leq 4), \quad \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbf{Z}.$$

を満たすことを仮定する. この仮定の下で上の 4 つの解が線型独立なことは, 次の Barnes による $\varphi_0^{(k)}(x)$ たちの漸近挙動 ([Me, §2]) から従う. まず, $\varphi_0^{(1)}(x), \varphi_0^{(2)}(x)$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad \varphi_0^{<1>}(x) &= e^{-x} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{-(2n+1)/4} (\sqrt{\pi} + O(x^{-2})); \\
 \varphi_0^{<2>}(x) &= e^x \left(\frac{x^2}{4}\right)^{-(2n+1)/4} (\sqrt{\pi} + O(x^{-2}));
 \end{aligned}$$

である. また, $\varphi_0^{(3)}(x), \varphi_0^{(4)}(x)$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき, 次の漸近展開が成立する:

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad \varphi_0^{<3>}(x) &\sim C_3 \times (x^2)^{-1+a_1} {}_4F_1\left(\begin{matrix} 1-\beta_1-\alpha_1, 1-\beta_1-\alpha_1, 1-\beta_1-\alpha_1, 1-\beta_1-\alpha_1 \\ 1+\alpha_1-\alpha_2 \end{matrix} \middle| -\frac{4}{x^2}\right); \\
 \varphi_0^{<4>}(x) &\sim C_4 \times (x^2)^{-1+a_2} {}_4F_1\left(\begin{matrix} 1-\beta_1-\alpha_2, 1-\beta_1-\alpha_2, 1-\beta_1-\alpha_2, 1-\beta_1-\alpha_2 \\ 1+\alpha_2-\alpha_1 \end{matrix} \middle| -\frac{4}{x^2}\right).
 \end{aligned}$$

ここで, C_3, C_4 は non-zero constant である. 漸近挙動 (2.7) と緩増大条件から, $\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^4 A_k \varphi_0^{<k>}(x)$ と書いたときに, $A_2 = 0$ が出る. さらに, $A_3 = A_4 = 0$ を示そう. そのために, 次の『Harish-Chandra の補題』 ([HC-2, Lemma 14, page15], [HC-1, Theorem 1]) を用いる.

命題 7 (Harish-Chandra). $G \subset GL(N, \mathbf{R})$ を簡約線型リー群とし, K をその極大コンパクト部分群とする. G 上のノルムを $\|g\| := \max\{|g_{i,j}|, |(g^{-1})_{i,j}| \mid 1 \leq i, j \leq N\}$ で定める. G 上の C^∞ 関数 F が緩増大, すなわち, ある正定数 $C, R > 0$ が存在して, $|F(g)| < C\|g\|^R$

を満たすとする。このとき、さらに F が、 $Z(\text{Lie}(G))$ -有限かつ右 K -有限ならば、 F は一様に緩増大 (*uniformly of moderate growth*) である。ここで、 F が一様に緩増大とは、

$$\exists r > 0, \forall X \in U(\text{Lie}(G)) \text{ s.t. } \sup\left\{\frac{|F(g; X)|}{\|g\|^r} \mid g \in G\right\} < \infty$$

が成立する事をいう (r が X によらず一様にとれる)。

いま、 $B_{\xi_0}(g)$ は命題の仮定を満たすから、一様に緩増大である。 $E_{2,0} := (\delta_{1,i}\delta_{3,j})_{1 \leq i,j \leq 4} \in \mathfrak{g}$ でリー環の元を定義し、

$$\tilde{a} := \text{diag}(\sqrt{a}, \sqrt{a/c}, \sqrt{1/a}, \sqrt{c/a}) \in A, \quad a > 0$$

と置く。すると、

$$(2.9) \quad \begin{aligned} B_{\xi_0}(\tilde{a}; E_{2,0}) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B_{\xi_0}(\tilde{a} \exp(tE_{2,0})) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B_{\xi_0}(\exp(atE_{2,0})\tilde{a}) \\ &= 2\pi\sqrt{-1}ac_1 B_{\xi_0}(\tilde{a}) \end{aligned}$$

なので、十分大なる $N > 0$ が存在して、

$$B_{\xi_0}(\tilde{a}; E_{2,0}^l) = (2\pi\sqrt{-1}ac_1)^l B_{\xi_0}^{(\infty)}(\tilde{a}) = O(a^N), \quad (a \rightarrow +\infty, \forall l \in \mathbf{Z})$$

が成立する。一方で、 $B_{\xi_0}(\tilde{a}) = a^{n+1} \times \varphi_0(4\pi c_1 a)$ であるので、上の漸近展開 (2.7), (2.8) から、 $A_3 = A_4 = 0$ がでる。従って、 B_{ξ_0} の一意性が分かる。同時に、次の公式

$$(2.10) \quad \begin{aligned} B_{\xi_0}(\tilde{a}) &= \text{const} \times \int_{-\sqrt{-1}\infty}^{\sqrt{-1}\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+2+\nu_1}{2} - 2s_1)\Gamma(\frac{n+2-\nu_1}{2} - 2s_1)}{\Gamma(\frac{n+2+\rho_\infty}{2} - s_1)\Gamma(\frac{n+2-\rho_\infty}{2} - s_1)} \\ &\quad \times (8\pi c_1 a)^{2s_1} \frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

も得られ定理 5 の証明が終わる。

注意 B_{ξ_0} が尖点形式 F から生じている場合には、 F が急減少なので、 B_{ξ_0} も急減少であり、命題 7 や (2.9) を持ち出さずに、(2.10) が得られる。ただし、尖点形式の急減少性の (標準的) 証明には、[HC-1, Theorem 1] が用いられることに注意する。

付録 1 Bessel 関数と Novodvorsky 積分. $W : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}$ を π_∞ の ξ_0 に関する局所 Whittaker 関数とする。このとき、次の「局所 Novodvorsky 積分」を考える：

$$Z_N^{(\infty)}(W; s; g) := \int_{\mathbf{R}^\times} d^\times y \int_{\mathbf{R}} dx W\left(\begin{array}{c|c} y & \\ \hline y & 1 \\ x & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline -1 & 1 \\ 1 & \end{array}\right) g |y|^{s-3/2}$$

($s \in \mathbf{C}, g \in G_{\mathbf{R}}$)。容易に確かめられるように、

$$Z_N^{(\infty)}(W; s; \left(\begin{array}{c|cc} 1 & x_1 & x_2 \\ \hline 1 & x_2 & x_3 \\ & 1 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} u & \\ \hline 1 & \\ & u \end{array}\right) g) = e^{2\pi\sqrt{-1}x_2} |u|^{-s+1/2} Z_N^{(\infty)}(W; s; g)$$

よって、 $Z_N^{(\infty)}(W; s; g)$ は、もし緩増大関数であれば、不定符号指標指標 $\beta = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ に関する Bessel 関数である。従って、 $Z_N^{(\infty)}(W; \rho_\infty + 1/2; \text{diag}(a, a, 1, 1))$ と $B_{\xi_0}(\tilde{a})$ で $c_1 = -c_2 = 1/2$ としたもの に等しいことが期待される。ところで、 $Z_N^{(\infty)}(W; s; \text{diag}(a, a, 1, 1))$

は, Novodvorský の局所ゼータ積分に他ならず, Whittaker 関数の明示式を用いて計算することができる ([Mo-2]). 結果は, $\rho_\infty \gg 0$ で積分は収束し,

$$\begin{aligned} & Z_N^{(\infty)}(W; \rho_\infty + 1/2; \text{diag}(a, a, 1, 1)) \\ &= \text{const} \times \Gamma_{\mathbf{C}}(\rho_\infty + \frac{n + \nu_1}{2}) \Gamma_{\mathbf{C}}(\rho_\infty + \frac{n - \nu_1}{2}) \\ &\times \int_{-\sqrt{-1}\infty}^{+\sqrt{-1}\infty} \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}} (4\pi a)^{2z} \frac{\Gamma(-2z + \frac{\nu_1 + n + 2}{2}) \Gamma(-2z + \frac{-\nu_1 + n + 2}{2})}{\Gamma(-z + \frac{\rho_\infty + n + 2}{2}) \Gamma(-z + \frac{-\rho_\infty + n + 2}{2})} \end{aligned}$$

となって上述の期待が確かに成立していることが分かる。このように, 局所 Novodvorský 積分が spinor L -関数の Γ 因子と完全には等しくはならず, むしろその比として局所 Bessel 関数が現れるのは興味深いと思う。さらに, (筆者にとって) 面白いことに, この比は $GL(2) \times GL(2)$ の Novodvorský 積分からも意味がつく ([I-M] を参照)。

付録 2 Andrianov の局所ゼータ積分. Andrianov の局所ゼータ積分を,

$$Z_A^{(\infty)}(s, B_{\xi_0}) := \int_0^\infty B_{\xi_0}(\tilde{a}) |a|^{s-3/2} d^\times a$$

で定義する ([An], [Su], [Ps]). $B_{\xi_0}(\tilde{a})$ が Mellin-Barnes 型積分 (2.10) で表示されているので, これは容易に計算できて

$$Z_A^{(\infty)}(s, B_{\xi_0}) = \text{const} \times \frac{\Gamma(s + \frac{n-1+\nu_1}{2}) \Gamma(s + \frac{n-1-\nu_1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}(s + n + \rho_\infty + \frac{1}{2})) \Gamma(\frac{1}{2}(s + n + \rho_\infty + \frac{1}{2}))}$$

となる。これから, 尖点形式の spinor L -関数の解析接続や関数等式を出すことができるが, 詳しくは別の機会に述べたい。

REFERENCES

- [An] ANDRIANOV, A. N., Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus two, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **112** (1971), 73-94.
- [B] BUMP, D., The Rankin-Selberg method: a survey. In: *Number theory, trace formulas and discrete groups*, Academic Press (1989), 49-109.
- [Er] ERDELYI, A. ET AL, *Higher transcendental functions, vol I.*, (1953), McGrawHill.
- [HC-1] HARISH-CHANDRA., Discrete series for semisimple Lie groups, II. *Acta Math* **166** (1966), 1-111.
- [HC-2] HARISH-CHANDRA., *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture notes in Math. **62** (1968), Springer.
- [Ho] HORI, A., Andrianov's L -functions associated to Siegel wave forms of degree two, *Math. Ann.* **303** (1995), 195-226.
- [Is] ISHII, T., Siegel-Whittaker functions on $\text{Sp}(2, \mathbf{R})$ for principal series representations, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **9** (2002), 303-346.
- [Is-Mo] ISHII, T. AND MORIYAMA, T., this volume.
- [K-R-S] KUDLA, S., RALLIS, S AND SOUDRY, D., On the degree 5 L -function for $\text{Sp}(2)$, *Invent. Math.* **107** (1992), 483-541.
- [Li] LI, J. S, Nonexistence of singular cusp forms, *Compositio Math.* **83** (1992), 43-51.
- [Me] MEIJER, C. S., On the G -functions I, II, *Indagationes Math.* **8**, 124-134, 213-225 (1946).
- [Mi-1] MIYAZAKI, T., Slowly increasing generalized Whittaker functions for derived functor modules of $\text{Sp}(2, \mathbf{R})$ and nilpotent orbits, *京都大学数理解析研究所講究録* **1094** (1999) 83-87.
- [Mi-2] MIYAZAKI, T., The generalized Whittaker functions for $\text{Sp}(2, \mathbf{R})$ and the gamma factor of the Andrianov L -functions, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* **7** (2000), 241-295.
- [Mi-3] MIYAZAKI, T., Nilpotent orbits and Whittaker functions for derived functor modules of $\text{Sp}(2, \mathbf{R})$, *Canad. J. Math.* **54** (2002), 769-794.
- [Mo-1] MORIYAMA, T., A remark on Whittaker functions on $\text{Sp}(2, \mathbf{R})$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **9** (2002), no. 4, 627-635.

- [Mo-2] MORIYAMA, T., Entireness of the Spinor L -functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$, Amer J. Math. **126** (2004), 899–920.
- [Ni-1] NIWA, S., On Siegel wave forms on the covering groupon $Sp(2, \mathbf{R})$, 京都大学数理解析研究所講究録 **843** (1993), 36–44 .
- [Ni-2] NIWA, S., On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space od degree 2. Nagoya Math. J. **121** (1991), 171–184.
- [No] NOVODVORSKY, M. E., On uniqueness theorems for generalized Bessel models. Math. USSR Sb. **19** (1973), 275–286.
- [No-Ps] NOVODVORSKY, M. E. AND PIATETSKI-SHAPIRO, I. I., Generalized Bessel models for a symplectic group of rank 2. Math. USSR Sb. **19** (1973), 243–255.
- [Ps] PIATETSKI-SHAPIRO, I. I., L -functions for GSp_4 . Olga Taussky-Todd: in memoriam. Pacific J. Math. (1997), Special Issue, 259–275.
- [Su] SUGANO, T., On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **31** (1985), 521–568.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SOPHIA UNIVERSITY, 7-1 KIOI-CHO, CHiyODA-KU, TOKYO, 102-8554 JAPAN

E-mail address: moriyama@mm.sophia.ac.jp