

Perfect Crystals of $U'_q(D_4^{(3)})$

東京大学大学院数理科学研究科 山田大輔 (YAMADA Daisuke)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo.

1 Motivation

量子 Yang-Baxter 方程式の解の研究のなかで, Drinfeld と神保は独立に量子普遍包絡環 (quantum enveloping algebra) を導入した. これは対称化可能な Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数の q アナログで, 量子群 (quantum group) とも呼ばれる. ([D, J]) その後, 柏原は任意の対称化可能な Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する量子普遍包絡環の結晶基底 (crystal base) を構成した. ([Kas]) これは可積分最高ウェイト加群の構造及び, そのテンソル積の分解則を研究するのに強力なツールとなった. 柏原と中島は一般化されたヤング盤の立場から, $\mathfrak{g} = A_n, B_n, C_n, D_n$ の場合に $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現の詳細な結晶基底の構成をした. ([KN]) 同様な方法で, Kang と Misra は $\mathfrak{g} = G_2$ の場合で結晶基底の構成をした. ([KM])

完全結晶 (perfect crystal) は, 可解格子模型の 1 点関数を計算するために導入された. ([KM1]) Kang 達は $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}, A_{2n-1}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$ の場合に任意のレベルの完全結晶の例を与えた. ([KM2]) 山根はある $U_q(G_2^{(1)})$ crystal の完全性を示した. ([Y]) しかしながら, $\mathfrak{g} = E_n^{(1)}, F_4^{(1)}, E_6^{(2)}, D_4^{(3)}$ の場合の完全結晶の存在は未解決であった.

この研究の動機は, $U_q(D_4^{(3)})$ の crystal structure を [KKM] に見られるような「座標形式」で表現したいことである. $D_4^{(3)}$ の Dynkin 図形から vertex 0 を除去すると ([Kac] とは vertex のラベルが逆になるが) G_2 の Dynkin 図形が得られる.

$$D_4^{(3)} \quad 0 \circ -1 \circ \Leftarrow \circ^2 \quad \xrightarrow{\text{Delete vertex } 0} \quad G_2 \quad 1 \circ \Leftarrow \circ^2$$

[KM] では上のようにラベル付けされた G_2 型の crystal が構成されているので, $U_q(D_4^{(3)})$ における柏原作用素の 1,2-action は既知となる. そこで $U_q(D_4^{(3)})$ の crystal structure を定義するためには次の問題を解くことが鍵となる.

[問題] $U_q(D_4^{(3)})$ crystal の rule of 0-action を見つけよ.

それを見つけた過程は第 4 節で述べる.

2 Review of Crystal

2.1 Quantum enveloping algebra $U_q(\mathfrak{g})$

データは以下の通り.

$\mathfrak{g}$	: 対称化可能な Kac-Moody 代数,
$U_q(\mathfrak{g})$	: $\mathfrak{g}$ に付随する量子包絡環
$\mathfrak{h}$	: Cartan subalgebra,
I	: Dynkin 図形の index の集合,
$\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}^*$	: simple roots,
$\{h_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}$	: simple coroots,
$\{\Lambda_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}^*$	: fundamental weights,
$\langle, \rangle$	: $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ のペアリング,
$P = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \Lambda_i$	: weight lattice,
$P^* = \text{Hom}(P, \mathbb{Z})$	: dual weight lattice.

$U_q(\mathfrak{g})$ は, e_i, f_i, q^h ($i \in I, h \in P^*$) で生成され, (ここでは書かないが) 生成元の間に幾つかの関係式を持つ $\mathcal{Q}(q)$ 上の associative な代数である. また $U_q(\mathfrak{g})$ はホップ代数の構造を持つ. $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M と $\lambda \in P$ に対し, M_λ を $M_\lambda = \{u \in M \mid q^h u = q^{\langle h, \lambda \rangle} u, \forall h \in P\}$ で与える. M が次を満たすとき可積分 (integrable) という.

$$(i) \quad M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda.$$

(ii) M は全ての $i \in I$ に対し有限次元 $U_q(\mathfrak{g})_i$ 加群の union になっている. ただし, $U_q(\mathfrak{g})_i$ は e_i, f_i, q^h で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数である.

u を $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M の任意のウェイトベクトルとする. すると u は $u_k \in M_{\lambda + k\alpha_i} \cap \text{Ker}(e_i)$ と $i \in I$ によって $u = \sum_k f_i^{(k)} u_k$ として一意的に表すことができる. 柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ を次で定義する:

$$\tilde{e}_i u = \sum f_i^{(k-1)} u_k, \quad \tilde{f}_i u = \sum f_i^{(k+1)} u_k$$

ただし, $f_i^{(k)} = f_i^k / [k]_i!$, $[k]_i! = \prod_{m=1}^k [m]_i$, $[m]_i = (q_i^m - q_i^{-m}) / (q_i - q_i^{-1})$.

2.2 Crystal base

$\mathcal{Q}(q)$ の部分環 A を, $q = 0$ で正則な有理関数環とする. (L, B) が次の 7 つの条件を満たすとき, 可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M の結晶基底という.

$$(C1) \quad L \text{ は, } \mathcal{Q}(q) \otimes_A L \simeq M \text{ なる } M \text{ の自由 } A \text{ 加群.}$$

$$(C2) \quad L = \bigoplus_{\lambda \in P} L_\lambda. \text{ ただし, } L_\lambda = L \cap M_\lambda.$$

- (C3) $\tilde{e}_i L \subset L, \tilde{f}_i L \subset L (\forall i \in I).$
- (C4) B は $\mathbf{Q}$ ベクトル空間 L/qL の基底である.
- (C5) $B = \bigsqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$. ただし、 $B_\lambda = B \cap (L_\lambda/qL_\lambda).$
- (C6) $\tilde{e}_i B \subset B \cup \{0\}, \tilde{f}_i B \subset B \cup \{0\}. (\forall i \in I)$
- (C7) $b, b' \in B$ と $i \in I$ に対し、 $b' = \tilde{f}_i b \iff b = \tilde{e}_i b'.$

結晶基底のテンソル積について述べる. $b \in B$ と $i \in I$ に対し、

$$\epsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{e}_i^n b \in B\}, \quad \varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{f}_i^n b \in B\}.$$

$b \in M_\lambda$ のウェイトを $\text{wt}(b) = \lambda$ で表すことにする. このとき任意の $i \in I$ に対して、 $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = \varphi_i(b) - \epsilon_i(b)$ が成り立つことが容易にチェックできる.

2つの結晶基底 B_1, B_2 のテンソル積 $B_1 \otimes B_2$ に対し、柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \epsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) < \epsilon_i(b_2), \end{cases} \\ \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) > \epsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \epsilon_i(b_2). \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、“ $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ を crystal の多重テンソル積 $b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_N$ ($b_i \in B_i, 1 \leq i \leq N$) に作用させるときどの成分に作用するか?” という問題が生じるが、これは次のアルゴリズム (signature rule) に従うとよい.

1. crystal $b_1 \otimes \cdots \otimes b_N$ に対し、+と-の列

$$b_1 \otimes \cdots \otimes b_N = \underbrace{\overbrace{- \cdots -}^{\epsilon_i(b_1)} \underbrace{+ \cdots +}_{\varphi_i(b_1)}}_{\cdots} \cdots \underbrace{\overbrace{- \cdots -}^{\epsilon_i(b_N)} \underbrace{+ \cdots +}_{\varphi_i(b_N)}}$$

を書く.

2. この列で最近接する (+, -) の対を次々にキャンセルする操作を、

$$b_1 \otimes \cdots \otimes b_N = - - \cdots - - + + \cdots + + \quad (i\text{-signature})$$

を得るまで続ける.

3. $\tilde{e}_i$ (resp. $\tilde{f}_i$) は、 i -signature の最も右端の- (resp. 最も左端の+) が属していたテンソル積の成分に作用する.

2.3 Perfect crystal

$\mathfrak{g}$ を affine Kac-Moody algebra とする。 c, δ をそれぞれ canonical central element, null root とする。 weight lattice を、 $P = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \Lambda_i + \mathbb{Z} \delta$ とおくと、 dual weight lattice $P^* = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \Lambda_i + \mathbb{Z} d$ で与えられる。 任意の $i \in I$ に対して、 $\langle \delta, h_i \rangle = 0$ なので canonical map を $cl : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}_{cl}^* := \mathfrak{h}^*/Q\delta$ で定義できる。 さらに classical weight を、 $P_{cl} = \sum_{i \in I} \mathbb{Q} \Lambda_i$ で与える。 crystal B の全ての元の weight が P_{cl} に含まれるとき、 B を classical crystal という。 $U'_q(\mathfrak{g})$ を $e_i, f_i, q^{(\alpha_i, \alpha_i)h_i}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とする。 ここで幾つかの新しい notation を導入する。

$$P_{cl}^+ = \{\lambda \in P_{cl} \mid \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0, \forall i \in I\}, \quad (P_{cl}^+)_l = \{\lambda \in P_{cl}^+ \mid \langle h_i, \lambda \rangle = l\},$$

$$\epsilon(b) = \sum_{i \in I} \epsilon_i(b) \Lambda_i, \quad \varphi(b) = \sum_{i \in I} \varphi_i(b) \Lambda_i$$

任意の正整数 l に対し、 classical crystal B が次の条件を満たすとき、 レベル l の perfect crystal という。 (see.[KMN1])

(P1) $B \otimes B$ は連結。

(P2) $\exists \lambda_0 \in P_{cl}$ s.t. $\text{wt}(B) \subset \lambda_0 + \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \mathbb{Z}_{\leq 0} \alpha_i$ and $\#(B_{\lambda_0}) = 1$

(P3) crystal (pseudo)base をもつ有限次元可積分 $U'_q(\mathfrak{g})$ 加群が存在する。

(P4) $\forall b \in B, \langle c, \epsilon(b) \rangle \geq l$.

(P5) 写像 $\epsilon, \varphi : B_l = \{b \mid \langle c, \epsilon(b) \rangle = l\} \rightarrow (P_{cl}^+)_l$ は全単射。

特に、 $\min B_l$ の元を minimal element という。

3 Results

3.1 Definition

与えられた正整数 l に対し、 $U'_q(D_4^{(3)})$ の l 次対称テンソル表現に付随する crystal を集合

$$B_l = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1) \left| \begin{array}{l} x_i, \bar{x}_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i = 1, 2, 3) \\ l - \sum_{i=1,2} (x_i + \bar{x}_i) \geq (x_3 + \bar{x}_3)/2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array} \right. \right\}$$

で与える。 特に $l = 1$ のとき、 フレーム付きの数字 (letter) を次で与える。

$$\boxed{1} = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \boxed{2} = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \boxed{3} = (0, 0, 2, 0, 0, 0),$$

$$\boxed{0} = (0, 0, 1, 1, 0, 0), \quad \boxed{\bar{3}} = (0, 0, 0, 2, 0, 0), \quad \boxed{\bar{2}} = (0, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$\boxed{\bar{1}} = (0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \phi = (0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

B_l の元 $b = (x_1, x_2, x_3, \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1)$ に対し, l 以下の正整数 $s(b)$ を

$$s(b) = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + \frac{\bar{x}_3}{2} + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$$

で与え, $b \in B_l$ が

$$(i) s(b) > l, \quad (ii) \exists x_i < 0, \quad (iii) \exists \bar{x}_i < 0$$

のいずれかを満たすとき, $b = 0$ (i.e. $b \notin B_l$) と解釈する.

またパラメータ $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{Z}$ を

$$z_1 = \bar{x}_1 - x_1, \quad z_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3, \quad z_3 = x_3 - x_2, \quad z_4 = (\bar{x}_3 - x_3)/2$$

とおき, これらに関する条件を以下で与える.

$$(E_1) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 \geq 0, z_1 + z_3 + 3z_4 \geq 0, z_1 + z_3 \geq 0, z_1 \geq 0,$$

$$(E_2) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 < 0, z_2 + 3z_4 < 0, z_2 < 0, z_1 \geq 0,$$

$$(E_3) \quad z_1 + z_3 + 3z_4 < 0, z_3 + 3z_4 < 0, z_4 < 0, z_2 \geq 0, z_1 + z_2 \geq 0,$$

$$(E_4) \quad z_1 + z_2 + 3z_4 \geq 0, z_2 + 3z_4 \geq 0, z_4 \geq 0, z_3 < 0, z_1 + z_3 < 0,$$

$$(E_5) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 \geq 0, z_3 + 3z_4 \geq 0, z_3 \geq 0, z_1 < 0,$$

$$(E_6) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 < 0, z_1 + z_2 + 3z_4 < 0, z_1 + z_2 < 0, z_1 < 0,$$

$$(F_1) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 > 0, z_1 + z_3 + 3z_4 > 0, z_1 + z_3 > 0, z_1 > 0,$$

$$(F_2) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 \leq 0, z_2 + 3z_4 \leq 0, z_2 \leq 0, z_1 > 0,$$

$$(F_3) \quad z_1 + z_3 + 3z_4 \leq 0, z_3 + 3z_4 \leq 0, z_4 \leq 0, z_2 > 0, z_1 + z_2 > 0,$$

$$(F_4) \quad z_1 + z_2 + 3z_4 > 0, z_2 + 3z_4 > 0, z_4 > 0, z_3 \leq 0, z_1 + z_3 \leq 0,$$

$$(F_5) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 > 0, z_3 + 3z_4 > 0, z_3 > 0, z_1 \leq 0,$$

$$(F_6) \quad z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4 \leq 0, z_1 + z_2 + 3z_4 \leq 0, z_1 + z_2 \leq 0, z_1 \leq 0.$$

これらの条件の関して次が成り立っていることに注意されたい。

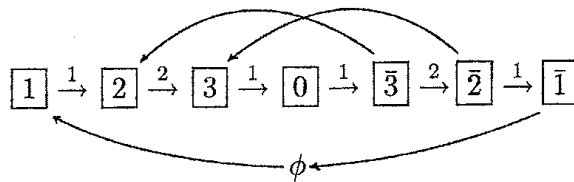
$$\{b \text{ with } (X_i)\} \cap \{b \text{ with } (X_j)\} = \emptyset \quad \text{if } i \neq j, X = E, F.$$

$$\bigcup_{i=1}^6 \{b \text{ with } (E_i)\} = \bigcup_{i=1}^6 \{b \text{ with } (F_i)\} = B_l.$$

我々は B_l の crystal structure を次で与える.

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_0 b &= \begin{cases} \mathcal{E}_1 b := (\dots, \bar{x}_1 + 1) & \text{if } (E_1), \\ \mathcal{E}_2 b := (\dots, x_3 - 1, \bar{x}_3 - 1, \dots, \bar{x}_1 + 1) & \text{if } (E_2), \\ \mathcal{E}_3 b := (\dots, x_3 - 2, \dots, \bar{x}_2 + 1, \dots) & \text{if } (E_3), \\ \mathcal{E}_4 b := (\dots, x_2 - 1, \dots, \bar{x}_3 + 2, \dots) & \text{if } (E_4), \\ \mathcal{E}_5 b := (x_1 - 1, \dots, x_3 + 1, \bar{x}_3 + 1, \dots) & \text{if } (E_5), \\ \mathcal{E}_6 b := (x_1 - 1, \dots) & \text{if } (E_6). \end{cases} \\
 \tilde{f}_0 b &= \begin{cases} \mathcal{F}_1 b := (\dots, \bar{x}_1 - 1) & \text{if } (F_1), \\ \mathcal{F}_2 b := (\dots, x_3 + 1, \bar{x}_3 + 1, \dots, \bar{x}_1 - 1) & \text{if } (F_2), \\ \mathcal{F}_3 b := (\dots, x_3 + 2, \dots, \bar{x}_2 - 1, \dots) & \text{if } (F_3), \\ \mathcal{F}_4 b := (\dots, x_2 + 1, \dots, \bar{x}_3 - 2, \dots) & \text{if } (F_4), \\ \mathcal{F}_5 b := (x_1 + 1, \dots, x_3 - 1, \bar{x}_3 - 1, \dots) & \text{if } (F_5), \\ \mathcal{F}_6 b := (x_1 + 1, \dots) & \text{if } (F_6). \end{cases} \\
 \tilde{e}_1 b &= \begin{cases} (\dots, \bar{x}_2 + 1, \bar{x}_1 - 1) & \text{if } \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \geq (x_2 - x_3)_+, \\ (\dots, x_3 + 1, \bar{x}_3 - 1, \dots) & \text{if } \bar{x}_2 - \bar{x}_3 < 0 \leq x_3 - x_2, \\ (x_1 + 1, x_2 - 1, \dots) & \text{if } (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)_+ < x_2 - x_3. \end{cases} \\
 \tilde{f}_1 b &= \begin{cases} (x_1 - 1, x_2 + 1, \dots) & \text{if } (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)_+ \leq x_2 - x_3, \\ (\dots, x_3 - 1, \bar{x}_3 + 1, \dots) & \text{if } \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \leq 0 < x_3 - x_2, \\ (\dots, \bar{x}_2 - 1, \bar{x}_1 + 1) & \text{if } \bar{x}_2 - \bar{x}_3 > (x_2 - x_3)_+. \end{cases} \\
 \tilde{e}_2 b &= \begin{cases} (\dots, \bar{x}_3 + 2, \bar{x}_2 - 1, \dots) & \text{if } \bar{x}_3 \geq x_3, \\ (\dots, x_2 + 1, x_3 - 2, \dots) & \text{if } \bar{x}_3 < x_3. \end{cases} \\
 \tilde{f}_2 b &= \begin{cases} (\dots, x_2 - 1, x_3 + 2, \dots) & \text{if } \bar{x}_3 \leq x_3, \\ (\dots, \bar{x}_3 - 2, \bar{x}_2 + 1, \dots) & \text{if } \bar{x}_3 > x_3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

以下は B_1 の crystal graph である.



ただし, 数字がラベルされていない矢印は 0-arrow をあらわす.

以下 B_l の tableaux としての解釈を述べる. B_l は $U_q(G_2)$ -crystal として, $\bigoplus_{n=0}^l B(n\Lambda_1)$ と同型である. ただし, $B(n\lambda_1)$ は最高ウェイト $n\Lambda_1$ をもつ既

約表現に付随する crystal である. $B(n\Lambda_1)$ は, 次の total order をもつ letter

$$\boxed{1} < \boxed{2} < \boxed{3} < \boxed{0} < \boxed{\bar{3}} < \boxed{\bar{2}} < \boxed{\bar{1}}$$

で構成される. 特に $n = 1$ のときの crystal graph は,

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{1} \boxed{0} \xrightarrow{1} \boxed{\bar{3}} \xrightarrow{2} \boxed{\bar{2}} \xrightarrow{1} \boxed{\bar{1}}$$

で与えられる. この描像の中で $b = (x_1, x_2, x_3, \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1) \in B(n\Lambda_1)$ は長さ n の one-row-tableau

$$\underbrace{\boxed{1 \dots 1}}_{x_1} \underbrace{\boxed{2 \dots 2}}_{x_2} \underbrace{\boxed{3 \dots 3}}_{[x_3/2]} \underbrace{\boxed{0}}_{x_0} \underbrace{\boxed{\bar{3} \dots \bar{3}}}_{[\bar{x}_3/2]} \underbrace{\boxed{\bar{2} \dots \bar{2}}}_{\bar{x}_2} \underbrace{\boxed{\bar{1} \dots \bar{1}}}_{\bar{x}_1}$$

$$x_0 = n - \left(x_1 + x_2 + \left\lfloor \frac{x_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\bar{x}_3}{2} \right\rfloor + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \right) \in \{0, 1\}$$

を表している. 例えば,

$$(1, 2, 3, 1, 0, 2) = \boxed{1} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{\bar{1}} \boxed{\bar{1}}.$$

さて, 新しい letter ϕ を導入することにより, $b \in B_l$ を長さ l の tableaux で表そう. B_l の total order 付きの letter を

$$\boxed{1} < \boxed{2} < \boxed{3} < \boxed{0} < \boxed{\bar{3}} < \boxed{\bar{2}} < \boxed{\bar{1}} < \phi$$

とする. これにより $b \in B_l$ は次で与えられる.

$$\underbrace{\boxed{1 \dots 1}}_{x_1} \underbrace{\boxed{2 \dots 2}}_{x_2} \underbrace{\boxed{3 \dots 3}}_{[x_3/2]} \underbrace{\boxed{0}}_{x_0} \underbrace{\boxed{\bar{3} \dots \bar{3}}}_{[\bar{x}_3/2]} \underbrace{\boxed{\bar{2} \dots \bar{2}}}_{\bar{x}_2} \underbrace{\boxed{\bar{1} \dots \bar{1}}}_{\bar{x}_1} \underbrace{\boxed{\phi \dots \phi}}_{l-s(b)}$$

$$x_0 = \left(\frac{x_3}{2} - \left\lfloor \frac{x_3}{2} \right\rfloor \right) + \left(\frac{\bar{x}_3}{2} - \left\lfloor \frac{\bar{x}_3}{2} \right\rfloor \right) \in \{0, 1\}$$

ここで $s(b)$ は tableau $b \in B_l$ の長さに相当することに注意されたい.

3.2 Perfect crystals

我々は組合せ論的に次の結果を得た. ただし, “組合せ論的に”とは perfect crystal の条件 (P1), (P4), (P5) を満たすという意味である.

定理 1 任意の $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, B_l はレベル l の perfect crystal.

この主張において特に次の 2 つを強調しておく.

- 同型写像 $\epsilon, \varphi : \min B_l \longrightarrow (P_{cl}^+)_l$ は次で与えられる.

$$(\alpha, \beta, \beta, \beta, \beta, \alpha) \mapsto (l - 2\alpha - 3\beta)\Lambda_0 + \alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2.$$

- minimal element の集合は次で与えられる.

$$\min B_l = \{ (\alpha, \beta, \beta, \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 2\alpha + 3\beta \leq l \}.$$

以下は, レベル 7 以下の minimal element を全て列挙したものである.

$$\min B_1 = \phi$$

$$\min B_2 = \min B_1 \cup \{(1, 0, 0, 0, 0, 1)\},$$

$$\min B_3 = \min B_2 \cup \{(0, 1, 1, 1, 1, 0)\},$$

$$\min B_4 = \min B_3 \cup \{(2, 0, 0, 0, 0, 2)\},$$

$$\min B_5 = \min B_4 \cup \{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\},$$

$$\min B_6 = \min B_5 \cup \{(3, 0, 0, 0, 0, 3), (0, 2, 2, 2, 2, 0)\},$$

$$\min B_7 = \min B_6 \cup \{(2, 1, 1, 1, 1, 2)\}.$$

3.3 Crystal structure of $U_q(A_2)$

B_l の crystal graph から 2-arrow を無視した部分グラフの連結成分の構造を考える.

定義 2 任意の正整数 l に対し, パラメータ i, j_0, j_1 を次で与える.

$$0 \leq i \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor, \quad i \leq j_0, j_1 \leq l - i, \quad j_0 \leq j_1$$

$$(1) \bar{b}_{j_0, j_1}^{l, i} = (0, y_1, -2y_1 + 3y_0 + i, y_0 + i, y_0 + j_0, 0); y_a = (l - i - j_a)/3 \\ (a = 0, 1).$$

$$(2) B_l \text{ の crystal graph から全ての 2-arrow を無視した部分グラフの連結成分の中で, } \bar{b}_{j_0, j_1}^{l, i} \text{ を含むものを } B_{j_0, j_1}^{l, i} \text{ とする.}$$

2×3 行列の集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} j_0 + j_1 - p - r & r & p \\ 0 & j_1 + p - q & q - p \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 0 \leq p \leq j_0, \\ p \leq q \leq j_1 + p, \\ 0 \leq r \leq j_0 + q - 2p \end{array} \right\}$$

の各元の (i, j) 成分を i -th row ($i = 1, 2$) に含まれる letter $\boxed{j}$ ($j = 1, 2, 3$) の個数と解釈したときの 2-row tableau を $t(p, q, r)$ とし, $t(p, q, r)$ の集合を $B^{A_2}(j_0\Lambda_0 + j_1\Lambda_1)$ とおく. letter のウェイトをそれぞれ

$$\text{wt}(\boxed{1}) = \Lambda_0, \quad \text{wt}(\boxed{2}) = \Lambda_1 - \Lambda_0, \quad \text{wt}(\boxed{3}) = -\Lambda_1$$

と定義すると [KN] より, $t(p, q, r)$ に対する $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ ($i = 0, 1$) の作用は次で与えられ, これらは $U_q(A_2)$ の crystal structure に相当する.

$$\begin{aligned}\tilde{e}_0 t(p, q, r) &= \begin{cases} t(p, q, r-1) & \text{if } r > 0, \\ 0 & \text{if } r = 0, \end{cases} \\ \tilde{e}_1 t(p, q, r) &= \begin{cases} t(p-1, q-1, r+1) & \text{if } p > 0, p-q+r \geq 0, \\ t(p, q+1, r) & \text{if } p-q+r < 0, \\ 0 & \text{if } p=0, p-q+r \geq 0, \end{cases} \\ \tilde{f}_0 t(p, q, r) &= \begin{cases} t(p, q, r+1) & \text{if } 0 \leq r < j_0 + q - 2p, \\ 0 & \text{if } r = j_0 + q - 2p, \end{cases} \\ \tilde{f}_1 t(p, q, r) &= \begin{cases} t(p+1, q+1, r-1) & \text{if } p \leq q < p+r, \\ t(p, q+1, r) & \text{if } p+r \leq q < j_1 + p, \\ 0 & \text{if } p+r \leq q = j_1 + p. \end{cases}\end{aligned}$$

我々は crystal B に対し, $B \simeq B^{A_2}(j_0\Lambda_0 + j_1\Lambda_1)$ が成り立つとき “ B は $U_q(A_2)$ の crystal structure をもつ” という.

定理 3 任意の $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して次が成り立つ:

$$B_l = \bigsqcup_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \bigsqcup_{\substack{i \leq j_0, j_1 \leq l-i \\ j_0, j_1 \equiv l-i \pmod{3}}} B_{j_0, j_1}^{l, i}, \quad B_{j_0, j_1}^{l, i} \simeq B^{A_2}(j_0\Lambda_0 + j_1\Lambda_1).$$

4 On 0-action

この節では, $U_q(D_4^{(3)})$ crystal の rule of 0-action を見つけた過程について述べたい. 2つの Dynkin 図形

$$D_4^{(3)} \quad 0 \circ -1 \circ \Leftarrow \circ^2, \quad G_2^{(1)} \quad 0 \circ -1 \circ \Rightarrow \circ^2$$

の 2 vertex の square root の比をとると 3:1 になっていて, これは $U_q(G_2^{(1)})$ の crystal graph の 2-arrow を 3 乗して読んだときに得られる部分グラフが $U_q(D_4^{(3)})$ の crystal graph と同型になっていることを意味している.

[Y] では, $U_q(G_2^{(1)})$ crystal の完全性が示されている. この論文の中で, $U_q(D_4^{(3)})$ crystal の rule of 0-action を見つけるために必要となった最低限の情報を列挙してみる.

$$(Y1) \quad B_l \simeq \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \bigoplus_{i \leq j_0, j_1 \leq l-i} B_{j_0, j_1}^{l, i}, \quad B_{j_0, j_1}^{l, i} \simeq B^{A_2}(j_0\Lambda_0 + j_1\Lambda_1).$$

$$(Y2) \quad B_{j_0, j_1}^{l, i} \text{ は連結で,}$$

$$\exists \bar{b}_{j_0, j_1}^{l, i} \in B_{j_0, j_1}^{l, i} \text{ s.t. } \varphi_a(\bar{b}_{j_0, j_1}^{l, i}) = j_a, \quad \epsilon_a(\bar{b}_{j_0, j_1}^{l, i}) = 0 \quad (a = 0, 1).$$

(Y3) 0-string $\{\tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, l-i}^{l,i} \mid 0 \leq p \leq j_0\}$ の explicit な形式.

$U_q(G_2^{(1)})$ の表現空間は 15 次元で与えられる. $U_q(G_2^{(1)})$ の crystal graph (see. q-alg/9712012, Figure 1) で 2-arrow を 3 乗して読むと現れる letter は, $\{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{6}, \boxed{0_2}, \boxed{\bar{6}}, \boxed{\bar{2}}, \boxed{\bar{1}}, \phi\}$ で, この基底の数は $U_q(D_4^{(3)})$ の表現空間の次元に一致している. そこで letter $\boxed{6}, \boxed{0_2}, \boxed{\bar{6}}$ をそれぞれ $\boxed{3}, \boxed{0}, \boxed{\bar{3}}$ と書きなおすと, $U_q(D_4^{(3)})$ の crystal graph は 3.1 節で与えたものとなる. l が低いところで $U_q(D_4^{(3)})$ の表現空間の次元を数えてみると, j_0, j_1 に対する条件は $0 \leq i \leq [l/2]$ に対し $i \leq j_a \leq l-i$, $j_a \equiv l-i \pmod{3}$ ($a=0,1$) であろう. そこで正整数のパラメータ y_0, y_1 を $y_a = (l-i-j_a)/3$ ($a=0,1$) で与える. 柏原作用素の 0-action と 2-action の可換性 ($D_4^{(3)}$ の vertex 0 と 2 は非連結!) と, $\tilde{e}_2^{y_1} \tilde{b}_{j_0, l-i}^{l,i}$ の 1-signature により,

$$\tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} = \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, l-i-3y_1}^{l,i} = \tilde{f}_0^p \tilde{e}_2^{y_1} \tilde{b}_{j_0, l-i}^{l,i} = \tilde{e}_2^{y_1} \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, l-i}^{l,i}$$

が得られる. これにより 0-string $\{\tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} \mid 0 \leq p \leq j_0\}$ の具体系が得られたことになる. $B_{j_0, j_1}^{l,i}$ は $U_q(A_2)$ の crystal structure を持っているので,

$$\tilde{f}_0^q \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} = \begin{cases} \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^{p+1} \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} & \text{if } 0 \leq p < j_0, p \geq q, \\ 0 & \text{if } p = j_0, p \geq q \end{cases}$$

が成り立つ. したがって, 次の 0-string 達を得る.

$$S_{p,q,r}^{l,i} = \{ \tilde{f}_0^s \tilde{e}_2^r \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} = \tilde{f}_2^r \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^{p+s} \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} \mid 0 \leq s \leq j_0 - p \}$$

ただし, $\tilde{f}_2^{-1}b = \tilde{e}_2b$, $p \geq q \geq 0$, $-\epsilon_2(\tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i}) \leq r \leq \varphi_2(\tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i})$.

これをもとに 0-action のパターンを分類すると

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 \tilde{f}_2^r \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^{p+s} \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} &= \tilde{f}_2^r \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^{p+s+1} \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i}, \\ \tilde{f}_0(\tilde{f}_2^r \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^{p+s+1} \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i})^\vee &= (\tilde{f}_2^r \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^{p+s} \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i})^\vee, \end{aligned}$$

where $p \geq q \geq 0$, $0 \leq s \leq j_0 - p - 1$, $-\epsilon_2(\tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i}) \leq r \leq \varphi_2(\tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i})$.

[Y] に載っている $U_q(G_2^{(1)})$ のレベル 2 の crystal graph (q-alg/9712012, Figure 9) を眺めてみると, $0 \leq p < j_0$, $p < q$, $\min(j_0, j_1) > i$ に対し

$$\tilde{f}_0 \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} = \mathcal{F}_1 \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i}, \quad \tilde{f}_0(\tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i})^\vee = \mathcal{F}_6(\tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i})^\vee$$

が成り立っている.

$$B' := \{ \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l,i} \mid 0 \leq p \leq j_0, p < q \leq j_1 + p, \min(j_0, j_1) = i \}.$$

とおく. さらに [Y] より $U_q(D_4^{(3)})$ の crystal graph に関して

$$\forall b \in B', \exists r \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad \tilde{f}_2^r b \notin B'$$

が成り立っていることが期待される. この予想は

$$\{\tilde{f}_0^s \tilde{f}_1^q \tilde{f}_0^p \tilde{b}_{j_0, j_1}^{l, i} \mid 0 \leq s \leq j_0 + q - 2p\}; \quad 0 \leq p < j_0, p < q, \min(j_0, j_1) = i$$

が $S_{p, q, r}^{l, i}$ の元になっていることを意味する.

以上のことから, 長さ l の全ての tableau に対する 0-action が与えられたことになる. レベル l の $U_q(D_4^{(3)})$ crystal における 0-action のデータは, 長さが l 以下の tableau への 0-action のデータの union で与えられる. 実際にレベル 5 までの crystal graph を描くと, 0-action のパターンは前節で与えた 6 通りである. ここまでの話から, B_l の全ての元に対し $\tilde{f}_0$ を作用させたときに 6 パターンのどれに該当するかは判るはずである. よって, l に具体的な数値を与えて B_l の元を 0-action のパターンにしたがって分類できる.

私が見つけたこのアルゴリズムをもとに 6 パターンある 0-action の境界条件を, 共同研究者の尾角氏が巧みな計算機実験により発見した! この境界条件が 3.1 節の $(F_1), (F_2), (F_3), (F_4), (F_5), (F_6)$ である. (2004 年 2 月末頃)

5 Future problems

かくして我々は $U'_q(D_4^{(3)})$ -crystal の 0-action を見つけ, crystal structure を座標形式で定義した. その後, Misra, 尾角諸氏とともに $U'_q(D_4^{(3)})$ -crystal の完全性を組合せ論的に証明した. 結晶基底をもつ有限次元可積分 $U'_q(\mathfrak{g})$ 加群の存在性は [KMN2] と同様な議論により証明できるであろう.

ここで新たな問題がある:

[問題] $D_4^{(3)}$ -crystal の 0-action は我々が与えたもので 一意的 か?

この問題に関して我々はしばらく考えていたが, 巧いアイデアが見つからなかった. その後, 柏原正樹氏がより一般的な立場から解決したという報告をうけた (2004 年 11 月末頃).

今後の研究課題としては, 組合せ R とエネルギー関数 (H -関数) の導出し, $D_4^{(3)}$ -crystal に付随する箱玉系を構成することができるだろう. これらに関しては近い将来報告したい.

Acknowledgement

この研究成果は, Kailash. C. Misra, 尾角正人両氏との共同研究によるものである. あとこの研究集会において発表する機会を与えてくださり, この原稿の遅れを辛抱強く待っていただいた佐垣大輔先生に深く感謝致します.

参考文献

- [D] V. G. Drinfeld, *Hopf algebra and the Yang-Baxter equation*, Soviet Math Dokl. **32** (1985), 254–258
- [J] M. Jimbo, *A q -difference analogue of $U_q(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69
- [Kac] V. G. Kac, *"Infinite Dimensional Lie Algebras,"* 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
- [Kas] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63**, 465–516 (1991).
- [KKM] S-J. Kang, M. Kashiwara, K.C. Misra, *Crystal bases of Verma Modules for Quantum Affine Lie Algebras*, Compositio Math. **92** (1994), 299–325
- [KM] S-J.Kang, K.C.Misra, *Crystal Bases and Tensor Product Decompositions of $U_q(G_2)$ -Modules*, J. Algebra **163**, (1994), 675–691
- [KMN1] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Int. J. Mod. Phys. A **7** (suppl. 1A), 449–484 (1992).
- [KMN2] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math. J. **68** (1992) 499–607.
- [KN] M. Kashiwara and T.Nakashima, *Crystal graphs for representations of q -analogue of classical Lie algebras*, J. Algebra **163** (1994), 295–345.
- [Y] S. Yamane, *Perfect crystals of $U_q(G_2^{(1)})$* , J. Algebra **210** (1998), 440–486.