

Fourier 超函数, 指数型函数, 及び Avanissian - Clay 変換について

東大数理 程 遠 (Cheng Yuan)

$\mathcal{Q}$: Fourier 超函数, $\mathcal{F}_{[a,b]}(\mathcal{Q})$ は $\text{supp}(\mathcal{Q}) \subset [a,b]$ の Fourier
超函数. $\text{Exp}(\mathcal{C}, [a,b])$ は指数型函数. 即ち.

$$\text{Exp}(\mathcal{C}, [a,b]) = \{ F \in \mathcal{O}(\mathcal{C}); \forall \varepsilon > 0 \exists C \geq 0$$

$$|F(z)| \leq C \exp(H_{[a,b]}(\text{Im } z) + \varepsilon |z|) \}$$

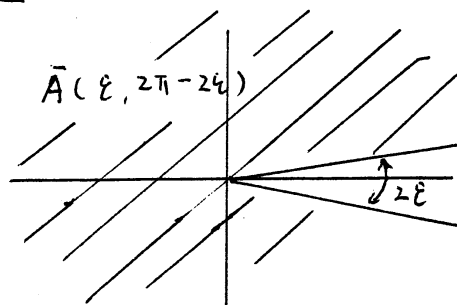
$\mathcal{O}_0(\mathcal{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$ は次の様な函数空間である.

$\varphi(z) \in \mathcal{O}_0(\mathcal{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$, 次の (i) (ii) を満たす:

$$(i) \lim_{|z| \rightarrow \infty} |\varphi(z)| = 0$$

$$(ii) \sup \{ |\varphi(z) z^{\varepsilon'}|; z \in \bar{A}(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \} < +\infty$$

$$\text{但し } 0 < 2\varepsilon < 2\pi \quad 0 < \varepsilon' < 1$$



すでにわかった様に, 次の図の中で, I, II, III は
どれも線型同相写像である.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{E}_{[a,b]}(\alpha) & \\
 \text{I} \nearrow & & \nwarrow \text{II} \\
 \text{Exp}(\mathbb{C}, [a,b]) & \longleftrightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])
 \end{array}$$

Avanissian-Gay 変換と Mellin 変換の定義は Appendix に参照。
 I は Paley - Wiener - Ehrenpreis の定理であり, II は

Avanissian - Gay 変換であり, II は Mellin 変換である。

だから, この三つの空間は実は一つの空間の三つのちがう表現に他ならない。一つの空間のある性質は他の二つ空間に対応して表現できるはずである。例えば, $\forall u \in \mathcal{E}_{[a,b]}(\alpha)$ に対して, $\text{supp}(u)$ の凸包の存在は勿論のことである。だから, Exp 空間のことばでいえば, 次の様にいえるだろう。

$$\forall f \in \text{Exp}(\mathbb{C}, [a,b])$$

・ 唯一の区間 J_f が存在して,

$f \in \text{Exp}(\mathbb{C}, J_f)$ が J_f よりも小さい区間に対して成り立たない。

$$f \in \{\text{指数関数}\} \iff J_f = \{0\}$$

統一の空間として見ると, ある元があれば, $\mathcal{A}$, Exp , $\mathcal{O}$ 中での表現はそれぞれ u , $\hat{u}$, G_u として記すると, u の台は $\mathbb{R}$ と Exp 空間でどのように表わすねが?

この論文の主定理として, 下の関係式を証明した

$$e^{-\text{supp}(u)} = \{ G_u(z) \text{ の 特異点 } \}$$

一方 $G_u(z)$ は次の様な Taylor 展開式と Laurent 展開式を持つ.

$$G_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \hat{u}(in) \quad (|z| < e^{-b})$$

$$G_u(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \hat{u}(-in) \quad (|z| > e^{-a})$$

三つの空間を関連させて見ればもっと面白い. 例ば,
 $\forall \hat{u} \in \text{Exp}(\mathbb{C}, [a, b])$ に対して, かつ $\hat{u} \in \{\text{多指数関数}\}$
 であろうか? 空間がちがうので表現もちがう:

$$\text{Exp } \mathcal{T} : \quad \mathcal{T}\hat{u} = \{0\} \quad ;$$

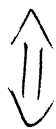
$$\mathcal{T} : \quad \text{supp}(u) = \{0\}$$

$$\mathcal{U} : \quad \{G_u(z) \text{ の特異点} \} = \{e^{-0}\} = \{1\}$$

$G_u(z)$ の Laurent と Taylor 展開式から 再び次の
 ことがわかる.

$$\forall \hat{u} \in \text{Exp}(\mathbb{C}, [a, b]) \text{ に対して}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\hat{u}(in)|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\hat{u}(-in)|} = 1$$



$$\hat{u} \in \{\text{多指数関数}\}$$

この結論は吉野先生よりもっと弱い条件で得た.
 図1の図像式は non-compact 台に拡張される. 拡張し

てから、次の同値関係を得た。

$$(i) \quad u(x) \in \mathcal{F}_{+\infty}(\Omega)$$

$$(ii) \quad \hat{u}(x) \in \text{Exp}(\mathbb{C}, +\infty)$$

$$(iii) \quad G_u(z) \text{ は } \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ で解析的である。}$$

$$(iv) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g(-in)|} = 0$$

この関係より、 $\mathcal{F}_{+\infty}(\Omega)$ に対して、分類することが出来る。それ分類によって、 $\{+\infty\}$ で σ 函数様なる函数が存在していることが証明できる。即ち：

σ 函数は次の性質を持つ。

$$\{\mathcal{J}(D) \sigma; \mathcal{J}(D) \text{ は局所作用素である}\} = \mathcal{F}_{\{0\}}(\Omega)$$

この性質は $\{+\infty\}$ で成立している。

$\forall \alpha(x) \in \mathcal{F}_{+\infty}(\Omega)$ を固定すると

$$\{\mathcal{J}(D) \alpha(x)\} \subsetneq \mathcal{F}_{\{+\infty\}}(\Omega)$$

Appendix :

- $u \in \mathcal{P}_{[a,b]}(\mathbb{C})$ に対し

$$G_u(\zeta) = \langle u(z), (1 - \zeta e^z)^{-1} \rangle$$

は $\zeta \in [e^{-b}, e^{-a}]$ で定義域を持つ。
 z は u の Avanissian - Gray 変換という。

$$G_u(\zeta) \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$$

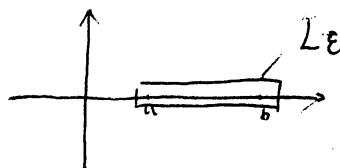
- $\phi \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$ とする。

$$M(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \exp(-L_\varepsilon)} \phi(w) w^{z-1} dw$$

(ε は十分小さい)

は ϕ の Mellin 変換という。

$$M(\phi)(z) \in \text{Exp}(\mathbb{C}, [a, b])$$



References

- [1] 金子晃 : 超函数入門・上・下 VP 応用数学選書 1,6
東大出版会 , 1980, 1982
- [2] 小松 亨三郎 : 超函数入門・岩波講座基礎数学
1978
- [3] 森本 光生 : Analytic Functions with Non-compact Carrier . Tokyo J. MATH. Vol. 1, No. 1, 1978
- [4] M. Morimoto and K. Yoshino : A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type
- [5] K. Yoshino Lerch's Theorem for Analytic Functions with Non-compact Carrier and its Applications to Entire Functions Complex Variables, 1984, Vol. 2, pp 303-310
- [6] 片岡 清 臣 : 超函数のフーリエ変換とその応用について . 東大修士論文 1976
- [7] 河合 隆裕 : 超函数論における Fourier 変換の理論とその応用 .
東大修士論文 ; 1979