

集合の包含に関する一般化された結果とその適用例

島根大学大学院総合理工学研究科¹ 鈴木 聡 (Satoshi Suzuki)

島根大学総合理工学部² 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)

ABSTRACT. 本論文では, 集合の包含に関する特徴付けについて述べる. Jeyakumar による凸関数による集合の包含に関する特徴付け, 著者による準凸関数による集合の包含に関する特徴付け, および Penot and Volle による準凸関数に関する定理について紹介し, 準凸関数による集合の包含に関する特徴付けについて, 具体的な適用例を与える.

1. INTRODUCTION

本論文では, 様々な関数によって表される集合と, それを包含する集合に関しての特徴付けについて述べる. すなわち, 次のような式の特徴付けについて考える.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leq 0, i \in I\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_j(x) \leq 0, j \in J\}.$$

集合の包含に関する特徴付けは, サポートベクターマシンのなどのデータの分類の観点からその研究が始まったものであったが, 最近では最適化における制約想定との関係も指摘されるなど, 様々な研究がなされている分野である. Mangasarian は, 一般的なデータの分類の観点に基づき, 線形関数や微分可能な凸関数による集合の包含に関する特徴付けを与えた. その特徴付けにおいては Farkas の補題や凸計画法における双対定理などが用いられていた ([4]).

さらにその拡張として, Jeyakumar は一般的な凸関数による集合の包含に関する特徴付けを与えた, すなわち, 無限個の凸制約によって表される閉凸集合が, 多面体によって包含される場合, および凸制約によって表される reverse-convex set によって包含される場合の 2 通りの特徴付けを行った. その特徴付けにおいては, 凸関数の Fenchel 共役が非常に重要な役割を成している ([3]).

また我々は, 準凸関数による集合の包含に関して, 準凸関数について相性の良い H -quasiconjugate, R -quasiconjugate といった二つの共役関数を用いて特徴付けを行った. この特徴付けは, 準凸関数という, 線形, 凸関数に比べて非常に広い範囲の関数による集合の包含について適用することが出来るものである. しかしこの特徴付けは, Jeyakumar や Mangasarian が示したものとは別のものであり, 拡張ではない.

最近, 我々は, 準凸関数による集合の包含に関する特徴付けについて, Jeyakumar の結果の拡張を行った. その際, Penot and Volle [5] による準凸関数についての趣深い結果を用いた. 無限個の準凸制約によって表される閉凸集合が, 多面体に

¹Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University

²Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

よって包含される場合と凸制約によって表される reverse-convex set によって包含される場合の2通りの特徴付けを、関数の共役の概念を用いずに行った ([7]).

本論文では、Jeyakumar による特徴付け、著者による特徴付け、および Penot and Volle による定理を紹介し、さらに特別な準凸関数のクラスにおける制約集合の包含について具体的な適用例を示す。

2. NOTATION AND PRELIMINARIES

本論文を通じて、 f は $\mathbb{R}^n$ から $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ への関数とする。 f が準凸関数であるとは、任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$ に対して、

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

が成り立つときをいう。また、 f が準凹関数であるとは、 $-f$ が準凸関数であるときをいい、関数 f が quasi-affine であるとは、 f が準凸かつ準凹であるときをいう。

次に、準凸関数に関する次の定理を紹介する。

Theorem 1 ([5]). X を局所凸ハウスドルフ線形位相空間とし、 W をその双対空間とする。このとき、 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が下半連続準凸関数であることと、 $f = \sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot \rangle)$ となるような $\{w_i\}_{i \in I} \subset W$ および $\{k_i\}_{i \in I} \subset Q = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{下半連続非減少}\}$ が存在することは同値である。

$k \in Q$, $w \in \mathbb{R}^n$ ならば、 $k(\langle w, \cdot \rangle)$ は下半連続 quasi-affine 関数であることが分かる。よって、Theorem 1 は、下半連続準凸関数はある下半連続 quasi-affine 関数の族の上限に等しいということを示している。このことは、下半連続凸関数が、ある affine 関数の上限に等しいということと非常に良く対応している。[7]において、我々はこの定理を用いて集合の包含に関する特徴付けを行った。

次に、Jeyakumar による制約集合の包含に関する定理を紹介する。

Theorem 2 ([3]). I : 添字集合、各 $i \in I$ に対して、 $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; 凸関数、 $(u, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ は空集合でないとする。このとき、次の二つの条件は同値:

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq \alpha\}$,
- (ii) $(u, \alpha) \in \text{cl cone co } \bigcup_{i \in I} \text{epig}_i^*$.

我々は [7] において準凸関数による集合の包含に関する特徴付けを示した。

Theorem 3 ([7]). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$; 下半連続準凸関数、(すなわち $f = \sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot \rangle)$ となる $\{k_i\} \subset Q$, $\{w_i\} \subset \mathbb{R}^n$ が存在する), $u \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sup\{t \mid k_{i_0}(t) \leq \beta\} \in \mathbb{R}$ となる $i_0 \in I$ が存在する, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}$ は空集合でないとする。このとき、次の二つの条件は同値。

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq \alpha\}$,
- (ii) $(u, \alpha) \in \text{cl cone co } \{(w_i, \delta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid i \in I, \delta \geq \sup\{t \mid k_i(t) \leq \beta\}\}$.

Theorem 3 を用いて Theorem 2 を示すことが出来る。なぜならば、 f を下半連続な真凸関数とすると $I = \text{dom } f^*$, 各 $v \in \text{dom } f^*$ に対して $k_v(t) = t - f^*(v)$

$(\forall t \in \mathbb{R})$ とおくと, $\sup\{t \mid k_v(t) \leq 0\} = f^*(v)$ が成り立つ, すなわち

$$\{(v, \delta) \mid v \in \text{dom} f^*, \delta \geq \sup\{t \mid k_v(t) \leq 0\}\} = \text{epi} f^*.$$

であることが分かる. よって Theorem 3 を用いることにより, Jeyakumar の定理を示すことが出来る.

次に, reverse convex set による包含に関する特徴付けについて, 過去の結果を紹介する.

Theorem 4 ([3]). I : 添字集合, 各 $i \in I$ に対して, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; 凸関数, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; 凸関数, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ は空集合でないとする. このとき, 次の二つの条件は同値.

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \geq 0\}$,
- (ii) $0 \in \text{epi} h^* + \text{cl cone co } \bigcup_{i \in I} \text{epi} g_i^*.$

我々は, 準凸関数による集合の, reverse convex set による包含について, 次のような特徴付けを示した.

Theorem 5 ([7]). $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$; 下半連続準凸関数, (すなわち, $f = \sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot \rangle)$ となるような $\{k_i\} \subset Q$, $\{w_i\} \subset \mathbb{R}^n$ が存在する), $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 凸関数, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sup\{t \mid k_{i_0}(t) \leq \beta\} \in \mathbb{R}$ となる $i_0 \in I$ が存在する, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}$ は空集合でないとする. このとき, 次の二つの条件は同値.

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \geq 0\}$,
- (ii) $0 \in \text{epi} h^* + \text{cl cone co } \{(w_i, \delta) \mid i \in I, \delta \geq \sup\{t \mid k_i(t) \leq \beta\}\}.$

Theorem 3 と同様に, Theorem 5 を用いて Theorem 2 を示すことが出来る.

3. EXAMPLES

次の集合について考える.

$$L = \{k_{(\alpha, \beta, \gamma, p)} \mid (\alpha, \beta, \gamma, p) \in \mathbb{R}^4, \alpha \geq 0, p > 0\},$$

ここで, $k_{(\alpha, \beta, \gamma, p)}$ は次のような $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数とする; $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$k_{(\alpha, \beta, \gamma, p)}(t) = \text{sgn}(t - \beta) \alpha |t - \beta|^p + \gamma.$$

また, $\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$ ($t \neq 0$), $\text{sgn}(0) = 0$ とする. 明らかに, $k_{(\alpha, \beta, \gamma, p)}$ は連続非減少関数であるので, $L \subset Q$ が成り立つ. この章では L によって表される下半連続準凸関数の族, すなわち,

$$\mathcal{F}_L = \{\sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot \rangle) \mid \{k_i\}_{i \in I} \subset L, \{w_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n\}$$

に属する関数について考える. ここで, この関数の族 $\mathcal{F}_L$ は, 十分に広いクラスであるということが言える. まず, 明らかに, 全ての凸関数は $\mathcal{F}_L$ に含まれている. さらに, 下半連続凸関数 f が, 次の条件

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0 \text{ かつ } \cdot \text{下に有界},$$

を満たすとき, $\mathcal{F}_L$ に属することが分かる (see [8]). さらに, L の関数はその逆関数を求めやすいため, Theorem 3 などにおいて非常に扱いやすいものとなっている. それらの事から, [8] において, 次のような形での, より分かりやすい特徴付けを得た. ここで, $f \in \mathcal{F}_L$ は次のように表されているとする.

$$f = \sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot \rangle)$$

ただし, I は添字集合, $\{k_i = k_{(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, p_i)}\} \subset L$, $\{w_i\} \subset \mathbb{R}^n$ である. また $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ は空集合でなく, $\alpha_{i_0} > 0$ となる $i_0 \in I$ が存在すると仮定する.

Theorem 6 ([8]). 任意の $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, 次の (i) と (ii) は同値.

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq \lambda\}$,

(ii) $(u, \lambda) \in \text{cl cone co } \bigcup_{i \in I, \alpha_i > 0} \left\{ (w_i, \delta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \delta \geq \beta_i - \text{sgn}(\gamma_i) \sqrt[p]{\frac{|\gamma_i|}{\alpha_i}} \right\}$.

Theorem 7 ([8]). 任意の凸関数 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 次の (i) と (ii) は同値.

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \geq 0\}$,

(ii) $0 \in \text{epi } h^* + \text{cl cone co } \bigcup_{i \in I, \alpha_i > 0} \left\{ (w_i, \delta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \delta \geq \beta_i - \text{sgn}(\gamma_i) \sqrt[p]{\frac{|\gamma_i|}{\alpha_i}} \right\}$.

以下において, Theorem 6, Theorem 7 における特徴付けに対する, 具体的な適用例を与える.

Example 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$f(x) = \max\{k_i(\langle w_i, x \rangle) \mid i \in I\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

として与える. ただし $I = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$k_i(t) = k_{(i, 0, -3, \frac{1}{2})}(t) = \text{sgn}(t) i |t|^{\frac{1}{2}} - 3, \quad t \in \mathbb{R}, i \in I,$$

$w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (0, 2)$, $w_3 = (-3, 0)$, $w_4 = (0, -\frac{1}{4})$ とする. このとき

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq 0\} = \left[-\frac{1}{3}, 9\right] \times \left[-\frac{9}{4}, \frac{9}{8}\right]$$

であり, Theorem 6(ii) の右辺の集合は

$$\text{cone co } \bigcup_{i \in I} \left\{ (w_i, \delta) \in \mathbb{R}^3 \mid \delta \geq \frac{9}{i^2} \right\}$$

となる. 任意の $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, 確かに

$$\{x \mid f(x) \leq 0\} \subset \{x \mid \langle u, x \rangle \leq \lambda\} \iff (u, \lambda) \in \text{cone co } \bigcup_{i \in I} \left\{ (w_i, \delta) \mid \delta \geq \frac{9}{i^2} \right\}$$

が成立している.

Example 2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$f(x) = \max\{k_{(1,2,-2,\frac{1}{2})}(x), k_{(1,1,-8,3)}(-x)\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

として定義する ($k_1 = k_{(1,2,-2,\frac{1}{2})}$, $k_2 = k_{(1,1,-8,3)}$, $w_1 = 1$, $w_2 = -1$) と, 明らかに

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\} = [-3, 6]$$

である. また, 定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して凸関数 $h_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $h_c(x) = (x - c)^2 - 4$ で定めると, Theorem 7 の (i), すなわち $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid h_c(x) \geq 0\}$ が成立しているのは $c \geq 8$ または $c \leq -5$ のときであることが判る. 一方,

$$\beta_1 - \operatorname{sgn}(\gamma_1) \sqrt[p]{\frac{|\gamma_1|}{\alpha_1}} = 6, \quad \beta_2 - \operatorname{sgn}(\gamma_2) \sqrt[p]{\frac{|\gamma_2|}{\alpha_2}} = 3,$$

であり, $h_c^*(v) = \frac{1}{4}v^2 + cv + 4$ であることが分かるので, Theorem 7 の (ii) の条件は,

$$(0, 0) \in \left\{ (v, \delta) \mid \delta \geq \frac{1}{4}v^2 + cv + 4 \right\} + \{(a, b) \mid b \geq 6a, b \geq -3a\}$$

となる. これは二次曲線 $b = \frac{1}{4}a^2 + ca + 4$ が集合 $\{(a, b) \mid b \leq 6a, b \leq -3a\}$ と交わること, すなわちこの二次曲線が次の二つの集合

$$\{(a, b) \mid b = -3a, a \geq 0\}, \quad \{(a, b) \mid b = 6a, a \leq 0\}$$

のどちらかと交わることと同値となる. 前者と交わるのは $c \leq -5$ のとき, 後者と交わるのは $c \geq 8$ のときであることが容易に判る.

REFERENCES

- [1] M. A. GOBERNA, V. JEYAKUMAR AND N. DINH, *Dual characterizations of set containments with strict convex inequalities*, J. Global Optim. 34 (2006), pp. 33–54.
- [2] M. A. GOBERNA, M. M. L. RODRÍGUEZ, *Analyzing linear systems containing strict inequalities via evenly convex hulls*, European J. Oper. Res. 169 (2006), pp. 1079–1095.
- [3] V. JEYAKUMAR, *Characterizing set containments involving infinite convex constraints and reverse-Convex constraints*, SIAM J. Optim. 13 (2003), pp. 947–959.
- [4] O. L. MANGASARIAN, *Set containment characterization*, J. Global Optim. 24 (2002), pp. 473–480.
- [5] J. P. PENOT, AND M. VOLLE, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. 15 (1990), pp. 597–625.
- [6] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *Set containment characterization for quasiconvex programming*, submitted to J. Global Optim.
- [7] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *Generalized characterizations on set containments for quasiconvex programming*, preprint.
- [8] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *Generalized characterizations on set containments for a certain class of quasiconvex functions*, submitted.