

複素 2 次元解析的常微分方程式の特異点

愛知教育大 岡 伸篤 (Nobuatsu Oka)

§ 1 Introduction $\mathbb{C}^2$ 上原点を孤立特異点を持つ複素 vector 場 $Z(z_1, z_2)$ を考える。ここで, (z_1, z_2) は $\mathbb{C}^2$ の原点を中心とする座標とする。 Z は, $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍に複素常微分方程式
$$\frac{dz}{dT} = Z(z_1, z_2) \quad z = (z_1, z_2), \quad T \in \mathbb{C}$$
 の解曲線となる複素 1 次元特異葉層構造を定める。 C. Camacho と P. Sad は, [2] の中で, このような $\mathbb{C}^2$ で定義される微分方程式の解 V で $\bar{V} = V \cup \{0\}$, $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ となるものが必ず存在し, $\bar{V}$ は複素解析曲線, 即ち plane curve である事を示した。ここで, 解曲線 V を separatrix と呼ぶ。

一方, 我々は [8] および [9] で, separatrices と $\mathbb{C}^2$ の原点を中心とする十分小さい球面 S_ε^3 を考え, それらの交点から vector 場 Z の原点のまわりでの位相不変量を定義した。その際, この交点は S_ε^3 の中の link になっているが, W. D. Neumann が定義した, ある種のグラフ (splice diagram) を用いて, その link を表現する事ができる。もちろん, separatrix V の閉包 $\bar{V}$ は, plane curve 故,

その link は代数的 link になる。

位相不変量を考える時, link のみを調べただけでは次のような場合, 2つの Vector 場 Z_1, Z_2 が位相共役かどうか判定できない。例えば同じ plane curve $f(z_1, z_2) = 0$ で定義される $\bar{V}$ を持つ 2つの Vector 場が与えられた時である。更に, C. Camacho, A. L. Neto, P. Sad が [1] で定義した, $\mathbb{C}^2$ 上の Vector 場の位相不変量は, 同 (separatrix) を持つか, 位相共役とならない, generalized curve と呼ばれる Vector 場を判別する。たとえば Milnor number が, その典型的な例である。我々が, [9] で定義した multiplicity を各 link component に付加させると, 上記 Vector 場については, 同 (separatrices) を持つか, 位相共役とならない場合を判別する事が可能となる。実際 separatrices と S^3_ε の交点 が n -Hopf link になる時に, Milnor 数が 同いでも, 互に位相共役とならない可算無限個の Vector 場が存在する事を示すことができる。(詳しくは [10] を参照) 同時に証明の中で, 同 (plane curve を持つ Vector 場で, 互に位相共役でないもの (separatrices) を判定し得る事も示される。この事を考える過程で, 次の事が必要となる。即ち, Vector 場 Z が与えられた時, Z の separatrices V_Z と S^3_ε の intersection により作られる代数的 link が, multiplicity をこめて, どのようなものであるか? 更に, multiplicity を与えた代数的 link (以下 multi-link と呼ぶ。) に対し, それを実現する Vector 場の存在が示されねばならない。ここでは, $S^3_\varepsilon \cap V_Z$ が n -Hopf

link, n -torus link, 一般の代数的 link に場合別して multi-link の特徴づけと, 存在問題を考える。

§2 準備. まず [9] で定義した multiplicity について復習する。

原点を孤立特異点を持つ $\mathbb{C}^2$ 上のかつての複素 vector 場を Z とする。 Z の特異点に対し blow-up を行なう事で, (必要があれば, この操作を繰り返す。) その vector 場の特異点をすべて simple 特異点にすることができている事が知られている。(図1参照)



また, それらの各 simple 特異点のまわりの適当な局所座標系 (z_1, z_2) を用いると, 次のように書ける事も知られている。

$$\{\lambda_1 z_1 + \phi_1(z_1, z_2)\} \partial/\partial z_1 + \{\lambda_2 z_2 + \phi_2(z_1, z_2)\} \partial/\partial z_2, \quad \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}_+$$

ここで, ϕ_1, ϕ_2 は Z の simple 特異点 $(0,0)$ の Taylor 展開をした時の高次の項を意味する。

ここで, 上記の vector 場において, 固有値 λ_1, λ_2 に対し, $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = 0$ $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ を満足する時, この simple 特異点の separatrix が定義する link の各成分に, 多重度 (multiplicity) m_1 または m_2 を添加する。separatrix が $z_1 = 0$ で定義される時は, multiplicity m_1 とし $z_2 = 0$ の時は, m_2 とする。それ以外の場合は, separatrix が定義する link の component には multiplicity 1 を与

える。ここで $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$ を共鳴条件と言う。このようにして γ の link component に対し、多重度 (multiplicity) を定義する。実際に意味があるのは、blowing-up した時に出現する、 γ の simple 特異点に対し、共鳴条件を満足する場合である。

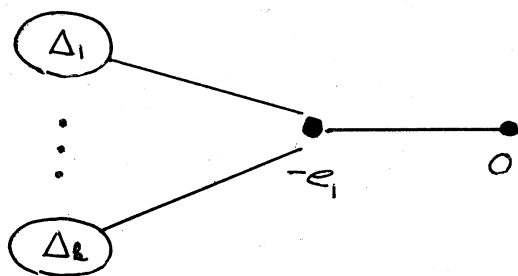
§ 3. Vector 場 Z に対し、separatrices V_Z と S^3 の intersection の作る link が満足する主要条件を考える。まず次が示される。

Lemma 1. Vector 場 Z の separatrices V_Z から導かれる link は既約である。

注意 link が既約とは、 S^3 における link complement が、3次元多様体として既約な時に言う。

(証明) Vector 場の final resolution picture (定義は [9] を参照) は、連結グラフである。したがって、その dual graph である plumbing diagram も連結になる。ここで、separatrices は、plane curve 故、この plumbing diagram の γ の vertex weight は γ の負の整数になる ([3] の中の定理 24.1 を見よ)。ここで link が既約でないとする。この場合でも plumbing diagram は、連結グラフでなければならない。したがってそのグラフの中に図 (2) で定義されている 0-vertex を持たねばならない。(これは 2次元球面 S^2 で分離される複数の non-trivial link component を 1つのグラフに表現したものである。) しかし、代数的 link であるためには、weight 0 の vertex を持たない。これは矛盾。したがって link は既約である。□

図2



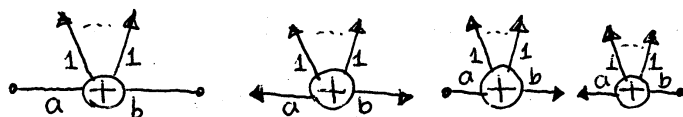
まず, Vector 場 の separatrices が満足する条件を splice diagram を用いて表現する。さてこの Vector 場 に対し, その $\text{minimal plumbing diagram}$ (定義は [9] を参照) は, その separatrices の $\text{minimal plumbing diagram}$ に等しい。([9]) の plumbing diagram を用いて, S^3 と V_{Σ} との交点としての link を表現する事ができた。ここで, separatrix の閉包は, plane curve 故, Vector 場 の $\text{minimal plumbing diagram}$ は, $\mathbb{C}^2$ 上原点 0 を孤立特異点に持つ, ある代数曲線の $\text{minimal plumbing diagram}$ に等しいはずである。したがってこの plumbing diagram を splice diagram におきかえた時, そのすべての edge weight を正の整数に, Vertex weight を $+$ で表現できる事が Neumann, Eisenbud, Mumford の結果によりわかる。また, Lemma 1 より, その link は既約になる事もわかる。したがってこの Vector 場 の splice diagram は以下のように分けて表現できる。

(1) multi-Hopf link

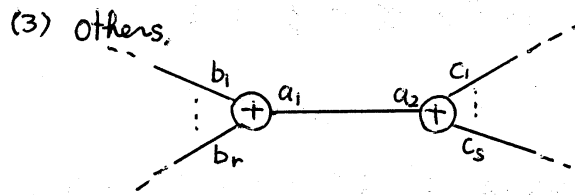
(1 回の blowing up で separatrices が divisor と横断的に交わる場合)



(2) torus link



$a, b \in \mathbb{N}$ a または b は 1 に等しくない。



各 Vertex のまわりの edge weight は
高々 2 つか 2 以上の整数

(*) この条件はこのような 2 つの

Vertex 間の edge weight について
成り立っている。

$$(*) a_1 a_2 - \prod_{j=1}^h b_j \cdot \prod_{k=1}^s c_k > 0$$

$$a_i, b_j, c_k \in \mathbb{N} \quad (1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq h, 1 \leq k \leq s)$$

注意 (3) についている条件は splice diagram が代数的 link である
事と, S^3 中の link であることを表現している。

§4. Hopf link について その各 component が満足する multiplicity に
ついて次が成り立つ。

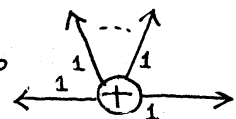
Proposition 2 Vector 場 Z の separatrices V_Z と原点を中心とする
十分小さい球面 S_ε^3 の交点で作る link が n components の multi-Hopf
link の時, その multiplicity は次を満足する n 個の正の整数の組
である。

$$(\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \cdots \langle n_n \rangle) \text{ か } n_1 + n_2 + \cdots + n_n = -1 \quad n_i \in \mathbb{C}$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

ここで $\langle * \rangle$ の意味は, 複素数 $*$ が, 負の有理数であれば,
 $\langle * \rangle$ は $*$ の絶対値の分子にあたる正の整数。その他の場合
 $\langle * \rangle = 1$ とする。

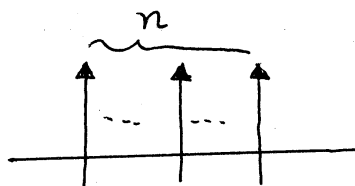
(証明) multi-Hopf link は, 次の splice diagram を持つ。



これに対応する plumbing diagram は、以下の様に書ける。



これに対応する final resolution picture は以下のとおりである。



(divisor は $\longrightarrow$ $\mathbb{P}^1$ 表わす。
separatrix は $\longrightarrow$ $\mathbb{P}^1$)

この final resolution picture の表現する Vector 場に blow-down を 1 回行なうと、もとの $\mathbb{C}^2$ の原点 0 の近傍に定義される Vector 場となる。したがって、link の multiplicity は、final resolution picture の上にある divisor と separatrix の交点にあたる simple 特異点のところで計算される。今、各 simple 特異点における Camacho の index を、 $r_1, r_2, \dots, r_n$ とすると、Camacho の Index Theorem ([2] 参照) により、 $r_1 + r_2 + \dots + r_n = -1$ を満足する。(上記の divisor の Chern class は -1 に等しいから) ここで multiplicity の定義と、simple singularity における index の計算からその時の link の multiplicity は $(\langle r_1 \rangle \langle r_2 \rangle \dots \langle r_n \rangle)$ となる。 $\square$

本質的なのは、 $r_1, r_2, \dots, r_n$ がすべて負の有理数の時なので、Vector 場の存在を論じる時は次の形のものを示せばよい。

Theorem 3. multi-Hopf link から n 成分からなっているとすると、

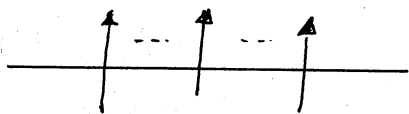
P_k と Q_k を互に素な正の整数としよう ($k=1, 2, \dots, n$) この時、

$$\frac{Q_1}{P_1} + \frac{Q_2}{P_2} + \dots + \frac{Q_n}{P_n} = 1 \quad \text{を満足するとしよう。}$$

この時 separatrices V と S^3_ε との交点が n -Hopf link となり その k 番目の component の multiplicity が g_k ($k=1, 2, \dots, n$) となる, Vector 場 Z が $\mathbb{C}^2$ の原点 0 の近傍に定義される。

Cor. $r_1 + r_2 + \dots + r_n = -1$ となる複素数 $r_1, \dots, r_n$ に対し, multiplicity が $(\langle r_1 \rangle, \langle r_2 \rangle, \dots, \langle r_n \rangle)$ となる n -Hopf link を実現する Vector 場 Z が存在する。

証明の概略. prop. 2 でみたように, splice diagram の形が, そのまま, plumbing diagram の形なので, multi-Hopf link の final resolution picture は以下の形となる。



これに対応する Vector 場を実際に構成する方法で存在を示す事が可能となる。本質的に A.L. Neto の [7] の方法を適用して構成する。今の場合 divisor は S^2 に微分同相である。そこで S^2 の中に n 個の特異点を置き, S^2 上に複素 1 次元の特異葉層構造を作ればよい。 n 個の特異点を $0_1, \dots, 0_n$ とし 各 0_j ($j=1, 2, \dots, n$) を中心とする円板 D_j^2 ($j=1, 2, \dots, n$) を用いる。 $D_j^2 \times \mathbb{C}$ 上に以下の微分方程式の解となる複素葉層構造を作る。

$$\begin{cases} \frac{dZ_1^k}{d\tau} = Z_1^k \\ \frac{dZ_2^k}{d\tau} = -\frac{g_{1k}}{p_{1k}} Z_2^k \end{cases}$$

ただしこの座標の原点を 0_k に選ぶ。

ここで Z_1^2 は D_2^2 の座標を Z_2^2 は $\mathbb{C}$ の座標を与えろ。この時の2つの separatrix のうち blow-down した時に、残っている方に対応する multiplicity は g_2 となる。すべての Vector 場を構成した後、blow-down して作られた Vector 場の作る各番目の link component の multiplicity が g_2 ということである。続いて、バンド B_j を $n-1$ 個用意し下の図(3)のように上で作った円板たちの間をつなげる。またバンド B_j 上に σ trivial な葉層構造を導入しておく。

図3

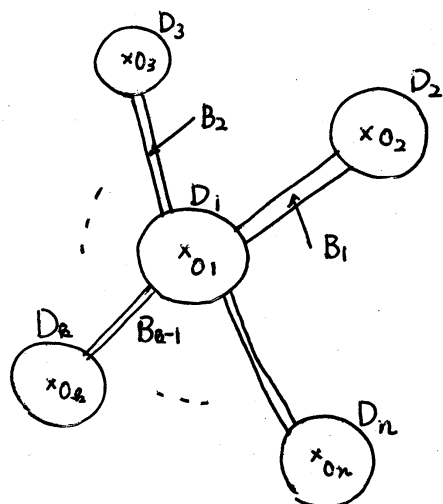


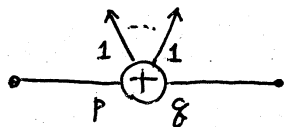
図3で与えられる集合を S^2 の一部分だと思って S^2 の残りの部分に拡張して葉層構造を作る。この時 $\frac{g_1}{p_1} + \frac{g_2}{p_2} + \dots + \frac{g_n}{p_n} = 1$ という条件

からこの図形の外側には、自明な葉層として拡張できる。([7] を参照)。このようにすれば、final resolution picture を実現する Vector 場が構成できたので、これを blow-down すれば、求める multiplicity $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ を持つ Vector 場が構成できたことになる。

注意、この構成では、separatrix が同時に作られており、それは、ある複素解析曲線となっている事もわかる。

§5. n -parallel torus link および, 一般の torus link

n -parallel torus link の splice diagram は一般に次で与えられる。

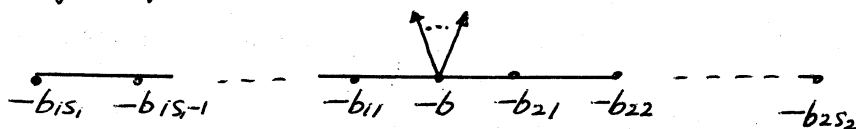


p または q は 1 ではない
正の整数

これに対しては次の必要条件が成り立つ。

Proposition 4 複素 Vector 場 Z の separatrices と S^3_ε との交点から,
 n -parallel (p, q) -torus link の時 その splice diagram の n 個の
multiplicity は $r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{1}{pq}$ を満足する $(\langle r_1 \rangle \langle r_2 \rangle \dots \langle r_n \rangle)$
で与えられる。

(証明の概略) n -parallel (p, q) -torus link の splice diagram に
W. D. Neumann の定理 ([3] 参照) を, 適用する事により, 次の
plumbing diagram が得られる。



$$z = z'' \quad \frac{q}{p} = \left[\left(\frac{q}{p} \right), b_{1s_1} \dots b_{11} \right] \quad b_{1l} \geq 2 \quad (l=1, 2, \dots, s_1)$$

$$\frac{p}{q} = \left[\left(\frac{p}{q} \right), b_{2s_2} \dots b_{21} \right] \quad b_{2l} \geq 2 \quad (l=1, 2, \dots, s_2)$$

$$b = \frac{1}{pq} + [b_{11}, \dots, b_{1s_1}] + [b_{21}, \dots, b_{2s_2}]$$

$$\left(\frac{q}{p} \right) \text{ (or } \left(\frac{p}{q} \right)) \text{ は } \frac{q}{p} \left(\frac{p}{q} \right) \text{ に等しいか大きい最小の}$$

正整数を表わし, $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ は連分数 $\frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \dots \frac{1}{a_n}}}$ を定義する。

次に上記 plumbing diagram が minimal であることを示す。代数曲線 $x^p - y^q = 0$ ($(x, y) \in \mathbb{C}^2$) は、原点 $0 \in \mathbb{C}^2$ を孤立特異点を持ち、 0 を中心とする十分小さい球 S_ε^3 との交点は (p, q) -torus knot になることが容易にわかる。この孤立特異点の blowing-up による曲線の resolution を考えれば、 (p, q) -torus knot を与える plumbing diagram が作れる。次に, knot を表わす arrowhead line を除く。この時, (-1) -blow-down operation だけで, trivial diagram となる plumbing diagram で, かつ minimal となるものが構成できる。一方 (p, q) -torus knot の splice diagram も, n -parallel (p, q) -torus link の splice diagram も arrowhead を除いてしまえば, まったく同じなので, Neumann の方法によって, 得られた上記の plumbing diagram は (p, q) -torus knot の diagram も表現する。(ただし, arrowhead line の数は違う。) ここで, この diagram の vertex weight の ^{絶対値は} $\frac{1}{b}$ を除いて 2 以上であることから arrowhead を除かなければそれ以上で diagram を変形できない状態になっている。(p, q)-torus knot の minimal plumbing diagram を一意的に定まらなければならぬので, それは, まさに上で定義したものにになっている。したがって, dual graph をとったものが, torus link を持つ vector 場の final resolution picture である。おと, 上記 minimal plumbing diagram の vertex weight を用いて, simple 特異点の index の和が計算できる事になった。ここで再び, Camacho の index 定理を利用して計算すると以下のとおりである。

各 simple 特異点の index を $r_1, r_2, \dots, r_n$ とすると,

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = -b + [b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1s_1}] + [b_{21}, \dots, b_{2s_2}] \text{ という}$$

関係式が成り立つ。一方, $b = \frac{1}{p_8} + [b_{11}, \dots, b_{1s_1}] + [b_{21}, \dots, b_{2s_2}]$

という事がわかっているので, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{1}{p_8}$ が求まる。

(2)から, simple 特異点の index の値と multiplicity の定義から, link の multiplicity は $r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{1}{p_8}$ を満足する素数の組に
対し, $(\langle r_1 \rangle, \langle r_2 \rangle, \dots, \langle r_n \rangle)$ で与えられる。

存在を保証する定理は, 以下の通りである。

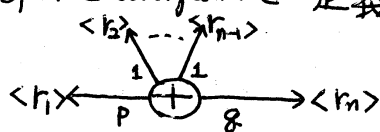
Theorem 5 L を n -parallel $(p, 8)$ -torus link で, その multiplicity $(m_1, \dots, m_n)$ は既約分数 $8_i/p_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) の分子たち $(8_1, \dots, 8_n)$ で定義されたとする。ただし $8_i/p_i$ ($i=1, \dots, n$) は次の関係式を持つとする。 $8_1/p_1 + \dots + 8_n/p_n = 1/p_8$ この時, separatrices と S^3 との intersection から multi-link L であるような vector 場が存在する。

(証明の概略) 本質的には, Theorem 3 の証明と同じだが, $(p, 8)$ -torus link を与える minimal plumbing diagram に対応する final resolution picture の形から 1 回の blowing up で構成できず, この diagram の edge に対応する divisor たちの近傍がいわゆる 4 次元 plumbed manifold になっている。まず, final resolution picture に対応する manifold を作り, CP^1 上の Disk bundle (対応する plumbing diagram の vertex weight と同じ整数の Euler class を持つもの) を作り, plumbing diagram の vertex の数だけ用いる。次に,

final resolution pictureの表致するところ, plumbingをする事で構成する。
 その中で, A, L, N の構成方法により Theorem 3 と同じような葉層を
 作る。上の minimal plumbing diagram と同じ divisor が出現するように
 $\mathbb{C}^2$ の原点 0 を起点として何回かの blowing-up を行なう。するとそこ
 にあらわれた divisor の近傍が, 上記で構成した plumbed-manifold
 と holomorphic diffeo. になる (Grauert の定理である。) その際, plumbed
 manifold 上に構成した葉層ごとこの diffeo. で divisor の近傍に対
 応させる事ができる。(c.f. [7]) 最後にこの divisor の近傍を順次,
 blow-down させれば, $\mathbb{C}^2$ の 0 の近傍に必要な multiplicity を持つ vector
 場が存在する事になる。■

一般の torus link の時は, 結果は煩雑だが, 考え方, 証明方法は, ま
 ったく同じなので, 存在を保証する定理を結果だけ述べる事にする。

Theorem 6. L を (p, q) torus link で n 成分を持つものとする。ただし, この
 link は次の splice diagram で定義されているとする。



ここで, link L の multiplicity は $(\langle r_1 \rangle, \dots, \langle r_n \rangle)$ で与えられ,
 更に各 $r_i \in \mathbb{C}$ は次の関係式を満足するとする。

$$r_2 + r_3 + \dots + r_{n-1} = [c_1, c_2, \dots, c_s + r_1] + [d_1, \dots, d_e + r_n] - 1$$

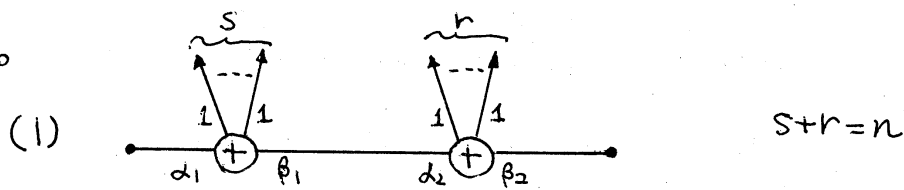
ここに, $c_1, \dots, c_s$ および, $d_1, \dots, d_e$ は, p, q から一意的に定ま
 る。また, $[\dots]$ は連分数を表わす記号である (Prop. 4 を参照)

■ L を実現する vector 場 Z が存在する。

§6. 一般の場合.

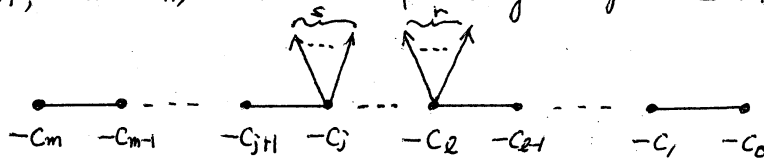
一番簡単な 2つの torus link $\alpha_1 \beta_1$ および $\alpha_2 \beta_2$ をつなげる場合を考える。この時、かつてなつた方がよいわけではない。ではなく、たとえば、 $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$ とする場合には、 $\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 > 0$ を満足せねばならない。W. D. Neumann によつて、2つの torus link の minimal plumbing diagram を接続する方法が開発されているので、それを用いて上の ^{それそれの} splice diagram に対応する 2つの minimal plumbing diagram を作り、それをつなげる事になる。ここで、 $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$ の場合を考える。その際 $\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 > 0$ という条件から、つなげた plumbing diagram が、そのまま、minimal plumbing diagram になるわけではない。このために、-1-blow down operation に代えて、0-chain absorption という、diagram (plumbing diagram) 上の operation を導入することにより、minimal plumbing diagram を作る。その際与えられている 2つの plumbing diagram の各 vertex weights たちは、これらの操作のために変化してしまうし、vertex が消滅する事も起る (実際 0-chain absorption に起る)。しかし、weights や graph の形は、 $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$ を与えれば、一意的に定まる。(minimal plumbing diagram の一意性より) そのようにして得られた minimal plumbing diagram から各 link component の multiplicity の満足する条件が求められる。ここでも、結果のみを記述するにとどめる。また、別のつなぎ方をすれば、multiplicity の満足する条件は変化するが、本質的には同じものである。詳しくは [10] を参照せよ。

Theorem 7 $\mathcal{L}$ を次の条件を満足する n component を持つ link とする。



(2) $\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 > 0$

この時, 次の形の minimal plumbing diagram を持つ。



$$C_j = 1 \text{ on } C_l = 1$$

$$j \geq l+1$$

また multiplicity は次の条件を満足する n 個の integer の組

$$(\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_s \rangle, \langle a_{s+1} \rangle, \dots, \langle a_{s+r} \rangle) \quad s+r=n \quad \text{である。}$$

$$C_j + (a_1 + \dots + a_s) = [C_{j-1}, \dots, C_l + (a_{s+1} + \dots + a_{s+r}), C_{l-1}, \dots, C_0] + [C_{j+1}, \dots, C_m] \quad (C_j = 1 \text{ on } C_l = 1)$$

ここで, $C_1, C_2, \dots, C_m$ は, 上記 minimal plumbing diagram の vertex weight である。また, $C_1, C_2, \dots, C_m$ は $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ から一意的に定まる。

その他のつなぎ方の場合, 3つの torus link をつなぐ場合等は [10] を参照せよ。証明等は, この Theorem 7 とほぼ同じにできる。この方法で, 一般にかつこれに与えられた代数的 link を実現す

る Vector 場 を, 構成する事が可能となる。しかし, multiplicity の間の関係式を, 一般的に書く事は, 困難である。

これまでの考察から, Vector 場において実現される同一の link に対し, multiplicity をとりかえて, multi-link として異なるものが, 実際に存在する事が言えた。また, 同一の link を持つ Vector 場に対しては, その separatrices は, みな, 同じ複素解析曲線となっているものが構成されている。これらの事に注意して, Vector 場を特に, generalized curve (定義は [1] を参照) にとると, 次の事がわかる。generalized curve の Milnor 数は, その separatrices が同じ時, その値はすべて等しい。[12] 一方, [9] で定義した, multiplicity を考慮する。

Thurston norm は, separatrices が同じ generalized curve の間でも異なる値を持ち, 位相共役にならない事が示される。実際 Hopf link で, この事を示した。(計算は複雑になるが他の link でも同様な事を示せる。)

証明については, [10] を参照して下さい。また, Thurston norm は一般の複素 2 次元 Vector 場に対しても, 定義できるので, 理論的には, 同一 plane curve を separatrices に持つ一般の Vector 場に対しても位相共役でない物を見つけ出す事は可能だが, その様な例を筆者は, 知らない。

Reference

- [1] C. Camacho, A.L. Neto and P. Sad, Topological invariants and equisingularization for holomorphic vector fields, *J. Differential Geometry* 20(1984), 143-174.

- [2] C. Camacho and P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, *Ann. of Math.* 115 (1982) 579-595.
- [3] D. Eisenbud, and W.D. Neumann, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, *Ann. Math. Studies* 110 (1986) Princeton Univ. Press.
- [4] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley New York, 1978
- [5] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, *Ann. Math. Studies* 61, Princeton Univ. Press.
- [6] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and criterion for simplicity, *Publ. Math. I. H. E. S.* N09. (Paris 1961).
- [7] A. L. Neto, Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two, *J. Differential Geometry* 26 (1987) 1-31.
- [8] N. Oka, Remarks on holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$ and invariants of the graph links, *Advance Series in Dynamical Systems Vol. II* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1992), 185-200.
- [9] ———, Graph link invariants of isolated singularity of holomorphic vector field in $\mathbb{C}^2$ I, II, *Tokyo J. Math.* Vol 19 N02 (1996), P 289-316, *Tokyo J. Math.* Vol 19 N02 (1996), P 317-329.
- [10] ———, Graph link invariants of isolated singularity of holomorphic vector field in $\mathbb{C}^2$ III, preprint (1997).