

ヘクスとラクト

阪大 理 山崎 洋平

本稿では §1. に述べるようなゲーム "Hex" を一般化して論じる。このゲーム "Hex" は次のような性質をもつ。

- 1). 二人の競技者による有限ゲーム……更に、変化が有限個のゲーム……である。
- 2). いかなる変化に対しても勝者、敗者が定まる。
- 3). 先手必勝の原理が成り立つ。

これらの性質のうち上の二つに注目して拡張した "Division game" を次のような順で論じる。

PART I …… ゲームを行う盤の話。

- | | | |
|------|--|---------|
| § 1. | はじめに …… Hex の紹介。 | No. 1 ~ |
| § 2. | Connex, Division space …… Hex を一般化した盤。 | 2 ~ |
| § 3. | Free connex, Essentially plane connex …… 例の一群。 | 5 ~ |
| § 4. | 同型 | 9 ~ |
| § 5. | 平面化定理. …… Free connex の平面化。 | 15 ~ |

PART II …… ゲーム

- | | | |
|-------|--------------------------------|------|
| § 6. | Division game …… 先手必勝の原理の拡張。 | 20 ~ |
| § 7. | Hex $\mathcal{H}_n$ | 28 ~ |
| § 8. | 一様な勝ち方 | 30 ~ |
| § 9. | $\mathcal{H}_{n+1}$ …… § 8 の例。 | 32 ~ |
| § 10. | あとがき。 | 35 ~ |

Hex (= Nash game) の一般化

----- その理論と実例 .

阪大・理 小崎 洋平

§ 1 . はじめに .

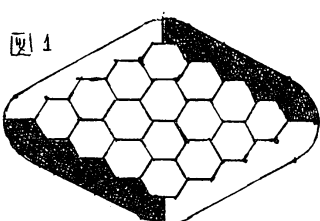


図1

左図のような盤の六角形 (この場合 4×4 個) の中に、白と黒が交互

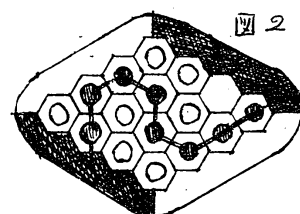


図2

に碁石を打ち合っており、両端の白陣を結ぶ白石の列-----隣りあつた六角形に位置する白石の列-----ができれば白の勝ちとし、逆に両端の黒陣を結ぶ黒石の列ができれば黒の勝ち、つまりは“最終的には一方のみが勝つ”ようなゲームか

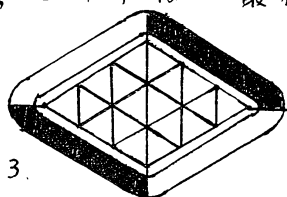


図3

できる。この六角形の中点を結んで図3のような盤にし線の交わるところに石を打ち合っても本質的に同じである。また

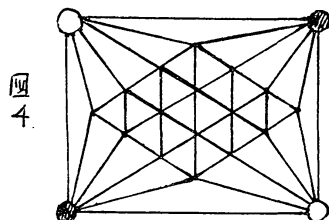


図4

陣地を点にして、図4としても全く同じことである。このゲームを 4×4 の Hex (Nash game, 連結ゲームの名もある) と

いい，同様にして，すべての自然数 n に対して $n \times n$ の Hex ...
 ... $\mathcal{H}_n$ とかく ... が定義される。

11月19日の集会では，これを一般化して “Connex” として
 論じたが，その定義はいさゝか泥臭く，ここに新たな体裁と
 も，て書き改められることになった，その結果はかろうとも，
 大げさともみえる程抽象的に，たことをお許し願いたい。
 また “Connex の理論” は，更に一般的に “Division game の理
 論” として，ここに論ぜられることになった。

§ 2. Connex. Division space.

本稿で用いる用語のうち念のため，次の二つを断，しておく。
 即ち， A, B を集合とあるとき，

$|A|$ A の濃度 (有限集合では元の個数)

$\text{Map}(A, B)$ A から B への写像の全体

と置く。

P を4点からなる集合， $M = \{a, b\}$ を集合とし，fixする。
 M の involution を $\hat{}$ と置く，即ち $\hat{a} = b, \hat{b} = a$ である。.....
 以下 M の元を一般的に m で表すことにする。

Definition. $\mathcal{C} = (X; \rho, \Psi)$ が connex であるとは，次の
 1), 2), 3), 4) をみたすことという。

1). X は P と交わらない有限集合である.

..... 以下, $\tilde{X} = X \cup P$ とおく

2). p は $P \rightarrow M$ なる写像で, $|p^{-1}(m)| = 2$ である.

..... 以下, $p^{-1}(m) = P_m = \{m, \bar{m}\}$ とおく. ここに m

が実際に a, b で与えられた時, m の文字はそれぞれ a, b に書き改められるものとする.

3). Ψ は $M \rightarrow \text{Map}(\tilde{X} \times \tilde{X}, \{0, 1\})$ なる写像で, 各 m に

対し $\Psi(m)$ を ψ_m とおくと, 次の三条件をみたす.

$$i) \quad \psi_m(u, u) = 1 \quad \forall u \in \tilde{X}$$

$$ii) \quad \psi_m(u, v) = \psi_m(v, u) \quad \forall u, v \in \tilde{X}$$

$$iii) \quad \psi_m|_{P_m \times P_m} = 1$$

$$4). \quad \mathcal{D} = \{D: M \rightarrow 2^X \mid \bigcap_{m \in P} D(m) = \emptyset, \bigcup_{m \in M} D(m) = X\}$$

とおくとき, $\mathcal{D}$ の各元 D に対し ~~次の~~ ような m

が唯一存在する.

$$\{u_i; 0 \leq i \leq n\} \subset D(m) \quad u_0 = m \quad u_n = \bar{m}$$

$$\text{s.t.} \quad \psi_m(u_{i-1}, u_i) = 1 \quad 1 \leq i \leq n$$

$\mathcal{C}$ が convex のとき, $\mathcal{D}$ の各元 D に上の条件 4) における m を対応させる写像を χ^+ , $\wedge \circ \chi^+$ を χ^- とおく. 今, 新たな対象として $\mathcal{C}^+ = (X; \chi^+)$, $\mathcal{C}^- = (X; \chi^-)$ が出現するが, これら二つを一般化して次のような対象 $\mathcal{C}^*$ が定義される.

Definition. X を有限集合, $\chi^*: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を写像とすると
 $\mathcal{Q}^* = (X; \chi^*)$ は division space といい、 $\exists T$, $\widehat{\mathcal{Q}}^* = (X; \widehat{\chi}^*)$
 $\dots$ 但し $\widehat{\chi}^*(b) = \widehat{\chi^*}(b)$ と $\mathcal{Q}^* < \dots$ は $\mathcal{Q}^*$ の dual space といい、

Definition. Division space $\mathcal{Q}^*$ は $\mathcal{D}(\mathcal{Q}^*) \supset \mathcal{D}'(\mathcal{Q}^*)$ なる $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ に
 対し常に 1) の χ^* は regular, 常に 2) の χ^* は misère であるといふ。

$$1). \quad \chi^*(b') = \text{null} \implies \chi^*(b) = \text{null}$$

$$2). \quad \chi^*(b) = \text{null} \implies \chi^*(b') = \text{null}$$

Proposition. (2.1). $\mathcal{C}$ は convex とするときは $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^-$ は
 それぞれ regular, misère の convex である。

————— 証明略 —————

Division space は必ずしも regular, misère のどちらかである
 とはいえないが、このような場合はそれぞれ $\mathcal{Q}^+, \mathcal{Q}^-$ とかく。
 また、以後あらゆる“ところ”で $+$ と $-$ を一括して論じる
 ことがあるが、それが可能な時は $\pm$ という記号を用いる。

Definition. $\mathcal{Q}^*$ が regular 且 $\sim$ misère であるのは χ^* が constant
 であることと同値である、このとき $\mathcal{Q}^*$ は trivial であるといふ。
 また convex $\mathcal{C}$ は、 $\mathcal{C}^\pm$ が trivial あるいは trivial であるといふ。

Definition. Division space $\mathcal{D}^*$ において, X の部分集合 N が negligible であるとは, $\mathcal{D} \ni \forall D$ に對し

$$D'(a) = D(a) \cup N$$

$$D'(b) = D(b) - N$$

なる D' をつくる時, すべての D に對して

$$\chi^*(D') = \chi^*(D)$$

が成り立つことという。また, connex $\mathcal{C}$ に對しても, $\mathcal{C}^\pm$ における negligible set は $\mathcal{C}$ の negligible set である。

Proposition (2.2). $\mathcal{D}^*$ は division space となるとき, 次のような $N' (\subset X)$ が存在する。

$$X \supset N' \text{ が negligible } \iff N' \subset N$$

——— 証明略 ———

§ 3. Free connex, Essentially plane connex.

Definition. Connex $\mathcal{C} = (X; p, \Psi)$ は次の条件を満たすとき free であるという。

$$\overline{\Psi}(m) = \overline{\Psi}(\widehat{m})$$

このようにするとき $\psi = \overline{\Psi}(m) (= \overline{\Psi}(\widehat{m}))$ とおくことにする。

Theorem 1.

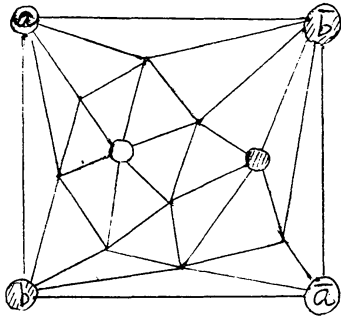
 $[0, 1]^2$ の四隅を正の方向に順に $a, b, \bar{a}, \bar{b}$ 

図 5

として，辺に頂点を持たないように単
体分割する．隅以外の頂点から成る
disjoint な二つの集合 A, B をとり，
残りの頂点の全体を X とする．．．．．

例によつて A, B を一般的に M で表す．

今， $P = \{a, \bar{a}; b, \bar{b}\}$ とおき， p と $\bar{p}$ を次のように定める．

$$p(m) = \begin{cases} a & \dots m = a \text{ 又は } \bar{a} \text{ のとき} \\ b & \dots m = b \text{ 又は } \bar{b} \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\psi_{\text{one}}(u, v)$$

$$= \begin{cases} 1 & \dots \text{“} \exists \{u = m_0, m_1, \dots, m_n = v\} \text{ s.t.} \\ & m_i \in M \quad 0 < i < n, \\ & 1 \leq i \leq n \text{ に対し, } m_i \text{ と } m_{i-1} \text{ が 1-単体} \\ & \text{を共有している” 場合} \\ 0 & \dots \text{その他} \end{cases}$$

このようにして得られる $\mathcal{C} = (X; p, \bar{p})$ は Connex で
ある．

我々の目的は A, B, δ が与えられた時に m_0 から $\bar{m}_0$ までの道を $M \cup \delta(m_0)$ 内にとれる者: $m_0 = \chi^+(S)$ を求めることにあるが, こういう m_0 は "Jordan の曲線定理" から高々一つである。従って存在をいえばよい。今 M の代りに $M \cup \delta(m_0)$, δ の代りに各弧に対して $\delta_\phi(m_0) = \phi$ なる δ_ϕ が与えられている, としてよい。このとき, もし $\psi_a(a, \bar{a}) = 1$ なら $\chi^+ = a$ である。もし $\psi_a(a, \bar{a}) = 0$ なら,

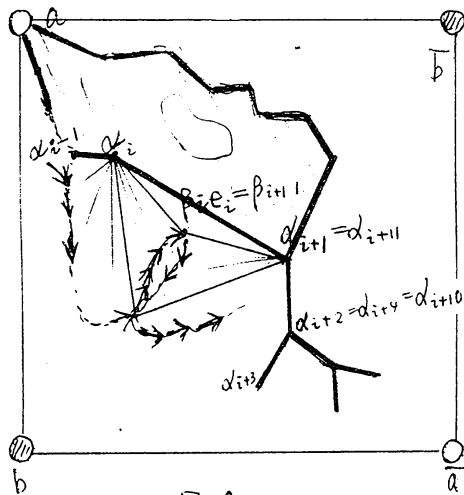


図 6

$P_a \cup A$ の a を含む連結成分内の, 外部領域 Q に沿った正の向きでの列:

$a = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \bar{a}$ (当然重複を許す, 更に形式的に $\bar{b} = \alpha_{-1}, \alpha_{n+1} = \bar{b}$)

に対し, 各 i ($0 \leq i \leq n$) について α_{i-1} ($= \beta_{i0}$) から $(\beta_{ie_i} =) \alpha_i$ まで α_i のまわ

りを順に Q 内で巡る列 $\beta_{i1}, \dots, \beta_{ie_i-1}$

がとれるが, $b = \beta_{00}; \beta_{01}, \dots, \beta_{0e_0-1} = \beta_{11}, \dots, \beta_{n1}, \dots; \beta_{ne_n} = \bar{b}$ は $P_b \cup B$ の中の列なので $\psi_b(b, \bar{b}) = 1$, よって $\chi^+ = b$ である。

Definition. 上の方法で得られる connex と plane connex といい。特に $A = B = \phi$ なる与え方の時 initial plane connex といい。

Remark. Initial plane connex は free.

Definition. $\mathcal{C} = (X; p; \mathbb{P})$, $\mathcal{C}' = (X'; p'; \mathbb{P}')$

が次の関係をみたすとき, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}'$ の上の connex であるという.

- 1). $X \supset X'$
- 2). $p = p'$
- 3). $\psi_m|_{X' \times X'} = \psi'_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Remark. このとき $X - X'$ は $\mathcal{C}$ の negligible set である.

Definition. plane connex の上の connex を essentially plane connex という.

Example.

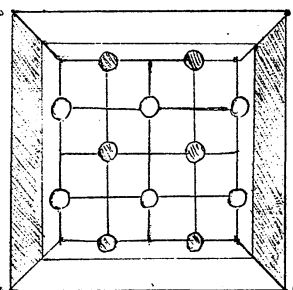


図 7

碁盤の上に図 7 のように石を配置して連結を競うゲームがあるが, これは図 8 のような plane connex

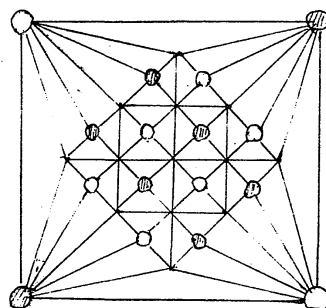


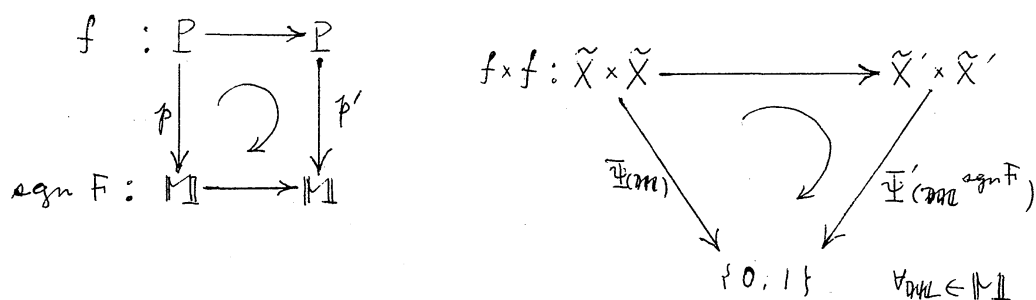
図 8

と同じになることが容易に知れる。

この例によ, て “Connex は本質的には平面的なものに限られるのではないか” という疑問が生じる. これについて考える前に, 次の節で, まず “同型” について論じよう.

§ 4. 同型

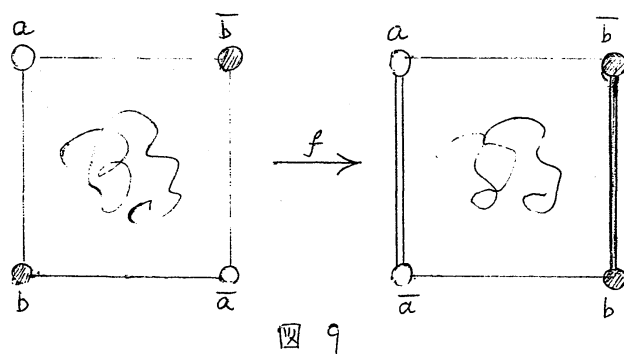
Definition. $\bar{F} = (f, \text{sgn } F)$ が $\mathbb{M}$ の connex $\bar{C} = (X, p, \bar{\Psi})$ から $\bar{C}' = (X', p', \bar{\Psi}')$ への pseudo-isomorphism であるとは, f 及び $\text{sgn } F$ が次の図式を可換となる bijection であることと...
 $\dots (f: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}', \text{sgn } F: \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M})$.



また特に $\text{sgn } F = i_{\mathbb{M}}$ のときは isomorphism,
 $\text{sgn } F = \wedge$ のときは anti-isomorphism と... isomorphism
 $(f, \text{sgn } F)$ は更に $f|_P = i_P$ のときは strong-isomorphism と...
 $(f, \text{sgn } F)$ は更に $f|_P = i_P$ のときは strong-isomorphism と...
 $(f, \text{sgn } F)$ は更に $f|_P = i_P$ のときは strong-isomorphism と...

Remark. 一般に connex
 は $\psi_m|_{P_a \times P_b} = 1$ を満たす
 から, 右図にみるように

$$|\bar{p}^{-1}(m) \cap \bar{p}'^{-1}(m)| = C \text{ 又は } 2$$



でなければならぬ. 例えは $f(a) = a$ $f(b) = \bar{a}$ なら

$$\psi_m(a, b) = \psi'_{m \text{sgn } F}(a, \bar{a}) = 1$$

となり $\bar{C}' = (X', p', \bar{\Psi}')$ が connex なることになり得る.

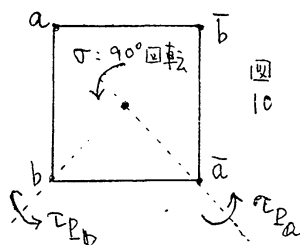
Definition. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ のとき isomorphism (resp. pseudo-, strong) の $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ automorphism (resp. pseudo-, strong) と... , γ によって $\mathcal{C}$ の automorphism 群 $\text{Aut}_{\text{Aut}}(\mathcal{C})$ (resp. $\text{Aut}(\mathcal{C})$, $\text{Aut}_p(\mathcal{C})$) とおく.

$$\text{Aut}(\mathcal{C}) \supset \text{Aut}_{\text{Aut}}(\mathcal{C}) \supset \text{Aut}_p(\mathcal{C}).$$

pseudo-automorphism $\bar{f}$ が $f|_P = i_P$ を満たせば, $\bar{f} = \bar{f}'$ である: γ と併せて $\text{sgn } \bar{f} = i_{\text{Aut}}$ が必然的に成り立つ.

Proposition (4.1).

$\text{Aut}_p(\mathcal{C})$ は $\text{Aut}(\mathcal{C})$ の正規部分群であり, また右の図式が得られる.



$$\begin{array}{ccc} & & D_{2,4} = \langle \sigma \rangle \wr \langle \tau_{Pa} \rangle \\ & & = \langle \sigma \rangle \wr \langle \tau_{Pb} \rangle \\ & \swarrow & \downarrow \\ \text{Aut}(\mathcal{C}) / \text{Aut}_p(\mathcal{C}) & & \langle \tau_{Pa} \rangle \oplus \langle \tau_{Pb} \rangle \\ & \downarrow & \swarrow \\ \text{Aut}_{\text{Aut}}(\mathcal{C}) / \text{Aut}_p(\mathcal{C}) & & \\ & \parallel & \\ (\text{Aut}(\mathcal{C}) / \text{Aut}_p(\mathcal{C})) \cap (\langle \tau_{Pa} \rangle \oplus \langle \tau_{Pb} \rangle) & & \end{array}$$

但し, σ は 90° 回転 $a \rightarrow b \rightarrow \bar{a} \rightarrow \bar{b} \rightarrow a$.
また τ_{Pa} は P_a と τ_{Pb} は P_b を点として固定する反転写像である.

—— 証明略 ——

Proposition 4.2. $\mathcal{C}$ が initial plane connex とする. このとき, 次の式が成り立つ.

$$\text{Aut}_p(\mathcal{C}) = \{i_{\mathcal{C}}\}$$

証明

$|X|$ について induction で示そう。

i). $|X| = 0$ のとき正しい。

ii). $|X| \leq N$ に対して正しいとする。今, $|X| = N+1$ なる

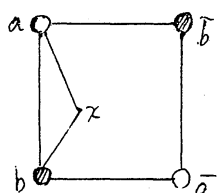


図 11

initial plane connex とその strong automorphism γ が与えられているとする。 $|X| \geq 1$ であるから

a と b を頂点とする 2-単体 (即ち最小の三角形) のもう一つの頂点 x , 又は $\bar{a}$ と $\bar{b}$ を頂点とするもののもう一つの頂点が X に属する。簡単の為 $x \in X$ とする。

今 $p \in P$ に対し $U_p = \{x \in X \mid \psi_{\alpha\alpha}(p, x) = 1, \forall \alpha \in A\}$ とおくと $x \in U_a \cap U_b$ であるが, 同様に $x^\gamma \in U_a \cap U_b$ でなければならぬ。もし $x^\gamma \neq x$ なら右図のように x^γ から $\bar{a}$ 又は $\bar{b}$ に達する $X - \{x\}$ 内の列が得

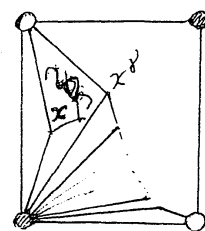


図 12

られるが, 元の γ による像は x^γ を含まないので $\bar{a}$ にも $\bar{b}$ にも達しない。従って $x^\gamma = x$ でなければならぬ。そこで, a

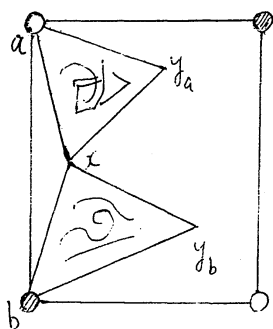


図 13

x を頂点とする (しかも b を頂点としない) 最大の三角形を考え, 元のもう一つの頂点を y_a , 内部の X の点を S_a とおく。同様に b , x を頂点とするものに対して y_b, S_b を定義する。ここに, $y_a = y_b$ である。たり, $y_* \in P$

である。たりするとは構わないが, $S_a \cap S_b$ は空でなければ

ならないことは容易に知れる。前と同じ論法で $\{y_a\}, \{y_b\}$
 S_a, S_b は集合として γ -不変であることが知れる。今、新
 たな connex $\mathcal{C}_a = (X_a; p_a, \overline{\Psi}_a)$ を次のように定める。

$$X_a = X - S_a - \{x\}$$

$$p_a = p$$

$$\overline{\Psi}_a^{(m)}|_{(X_a - \{a\}) \times (X_a - \{a\})} = \overline{\Psi}^{(m)}|_{(X_a - \{a\}) \times (X_a - \{a\})}$$

$$\overline{\Psi}_a^{(m)}(a, u) = \overline{\Psi}_a^{(m)}(u, a)$$

$$= \max(\overline{\Psi}^{(m)}(a, u), \overline{\Psi}^{(m)}(x, u)),$$

この置くと $\mathcal{C}_a$ は、 a と x を同一視し S_a を取り除いた
 initial plane connex である。同様に $\mathcal{C}_b$ を作る。このとき
 $\{y_a\}, \{y_b\}, S_a, S_b$ が γ -不変なことから γ は $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ の
 strong isomorphism を与える。すなわちこれは induction の仮定
 から i_{X_a}, i_{X_b} である。即ち、 γ は $X - S_a - \{x\}, X - S_b - \{x\}$
 上で一点ごとに不変である。従って $X - \{x\}$ 上では不変な為、

$$\gamma = i_X$$

である。

Q. E. D.

この証明は一見 plane connex 一般に適用されるかに見
 える。しかし A, B の元は $\tilde{X}$ の“点”ではないので γ の関知す

るところではない。事実 plane connex が陽然
 free であ、 $\mathcal{C}$ も右図のように $\text{Aut}_P(\mathcal{C}) \neq \{i_X\}$
 なることがある ($X \longleftrightarrow Y$ なるものが存在する)。
 $\mathcal{C}$ が free であり、 $\mathcal{C}$ が non-empty negligible set を持たないとき

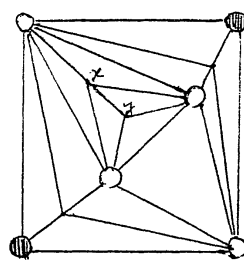


図 14

は initial plane connex に同型になり、 $\text{Aut}_P(\mathcal{C}) = \{i_X\}$ であ
 る。

Definition. $F = (f, \text{sgn } F)$ が division space $\mathcal{Q}^* = (X; \chi^*)$
 から $\mathcal{Q}'^* = (X'; \chi'^*) \leadsto$ a pseudo-isomorphism であるとは、下
 の図式が可換なることをいう。

$$\begin{array}{ccc} f: \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D}' \\ \chi^* \downarrow & & \downarrow \chi'^* \\ \text{sgn } F: \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

また $\text{sgn } F = i_{P\perp}$ のとき isomorphism といい、 $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}'^*$ のとき
 pseudo-automorphism, automorphism といい、下の群 ~~(群)~~ が得
 られる。

$$\text{Aut}(\mathcal{Q}^*) \supset \text{Aut}_{P\perp}(\mathcal{Q}^*)$$

Definition. Connex $\mathcal{C}$ に対し下の完全系列が得られる。これが $\cdots \rightarrow \{1\}$ まで完全系列のとき, $\mathcal{C}$ は normal (であるという)。
ここに $\text{Aut}_{X_{\mathbb{M}}}(\mathcal{C}) = \{\gamma \in \text{Aut}_{\mathbb{M}}(\mathcal{C}) \mid x^\gamma = x \ \forall x \in X\}$ である。

$$\{1\} \rightarrow \text{Aut}_{X_{\mathbb{M}}}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}^\pm) \rightarrow \cdots \rightarrow \{1\}.$$

Proposition (4.3). $\mathcal{H}_n$, 及び後述の $\mathcal{H}_{n-1,n}$ は normal である。

—— 証明概要 ——

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $K = \{\kappa: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{Z}_+\}$ とおく。 K の元 κ に対し height $h^\kappa: X \rightarrow \text{Map}(\mathbb{M}, \mathbb{Z}_+)(=K)$ を次のように定める (一般の $\mathcal{Q}^*$ に対して)。

$$h^\kappa(x)_{(pqr)} = |\{b \in \mathcal{D} \mid b_{(pqr)} \ni x, |b_{(pqr)}| = \kappa(pqr), \chi(b) = pqr\}|$$

κ_0 として次のようなものを考える。

$$\kappa_0(pqr) = \begin{cases} \min_{b \in \mathcal{D}, \chi(b)=pqr} \{|b_{(pqr)}|\} & \dots \dots \dots \{\cancel{b \in \mathcal{D}, \chi(b)=pqr}\} \neq \emptyset \\ |X| + 1 & \dots \dots \dots \{\phantom{b \in \mathcal{D}, \chi(b)=pqr}\} = \emptyset \end{cases}$$

$\mathcal{Q}^* = \mathcal{H}_n^\pm$ のときは対角線上では $h^{\kappa_0}(x)_{(pqr)} = 2^{n-1}$, h の他では $h^{\kappa_0}(x)_{(pqr)} < 2^{n-1}$ であり $h^{\kappa_0}(x) = h^{\kappa_0}(y) \iff x = y \text{ or } x^2 = y$ である。また $\mathcal{Q}^* = \mathcal{H}_{n-1,n}^\pm$ でも, $h^{\kappa_0}(x) = h^{\kappa_0}(y) \iff x = y \text{ or } x^2 = y$ が任意の点の間に成立する。このことから $\text{Aut}(\mathcal{C}^\pm)$ が iX 及び ι のみから得られることが簡単に知られる。

§ 5. 平面化定理

Theorem 2. Free connex $\mathcal{C}$ は, ある plane connex $\mathcal{C}'$ の上の essentially plane connex に同型である.

1). $X - X' = \cup N_{\nabla} \dots$ ここに和は $\mathcal{C}'$ の 2-単体をわたる.

2). $\psi = \psi_a = \psi_b$ とおくとき $u \in N_{\nabla}$, $v \in \tilde{X}$ に対し

$$\psi(u, v) = 1 \implies v \in \nabla \cup N_{\nabla}$$

証明

$|X|$ について induction で示そう.

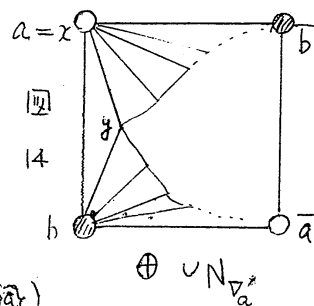
i). $|X| = 0$ のとき明白である.

ii). $|X| \leq N$ のとき正しいとしよう. 今 $|X| = N+1$ としよう.

Proposition (4.2) に基いて $\bigcup a \cap \bigcup b \neq \emptyset$ としてよい. その一点を x とおこう. a と x を同一視して

$\bar{\Psi}_a$ を次のようにおくと再び free connex

が得られる. ($\mathcal{C}_a = (X - \{x\}; p, \bar{\Psi}_a)$)



$$\bar{\Psi}_a(m) |_{(\tilde{X} - \{a\}) \times (\tilde{X} - \{a\})} = \bar{\Psi}(m) |_{(\tilde{X} - \{a\}) \times (\tilde{X} - \{a\})}$$

$$\bar{\Psi}_a(m)(a, u) = \bar{\Psi}_a(m)(u, a)$$

$$= \max \{ \bar{\Psi}(m)(a, u), \bar{\Psi}(m)(x, u) \}$$

この $\mathcal{C}_a$ は induction の仮定からある $\mathcal{C}'_a$ の上の essentially plane connex である. ここに $\mathcal{C}'_a$ の negligible set は $\emptyset$ の

みであるとしてよい。 $\mathcal{C}'_a = (X'_a; p, \bar{x}'_a)$ とおいて、これに對して $\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_b$ を考えると、もし $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset$ なら $\mathcal{C}'_a$ が trivial になるので $\mathcal{C}$ が求める性質をもつことが容易に知られる。今、 $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \ni y$ としよう。 $\mathcal{U}_a$ は y から $\bar{b}$ への、 $\mathcal{U}_b$ は y から $\bar{a}$ へのそれぞれ X 内の列であり、また $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \{y\}$ である。よって $\mathcal{C}'_a$ に non-empty negligible set が無いことがわかる。これに基づいて $X'_a - \{ay\}$ の点、 a, x を $\mathcal{C}$ のグラフに於いて描いてみよう。まず y は a 又は x と、且つ b とは 1-単体を別個に共有する。 $\mathcal{U}_a - \{ay\}$ の点は a 又は x のみと、 $\mathcal{U}_b - \{ay\}$ の点は b のみと 1-単体を共有する。 $\mathcal{C}$ のグラフに於いて図 15 のように交叉する部分があれば a から $\bar{a}$ への $\mathcal{U}_a$ の列と、 b から $\bar{b}$ への $\mathcal{U}_b$ の列が両立できることになり convex ではなくなる。従って交叉は無い筈である。また $\mathcal{U}_a$ の点が

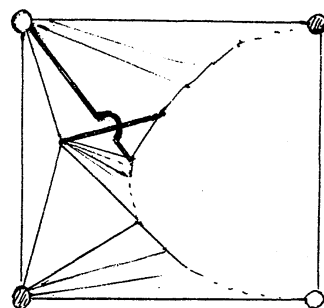


図 15

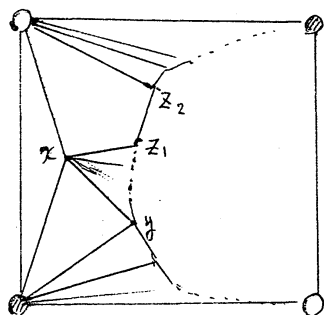


図 16

すべて x 又は a と 1-単体を共有するので図 16 のようになっている筈である。ここに $z_1 = z_2$ などであることは差しつかえない。 $\mathcal{C}'_a$ における ∇_a のうち $\mathcal{C}$ では単体でないものから来るものは $\square axz_1, z_2$ の他は、 $\triangle ax*$ ($* = b$ 又は $* = z_1 = z_2$) とそれに隣接する単体との和のみである。これらのうち $\square axz_1, z_2$ 以外では、 $N_{\square}$ が二

つの単体 σ 上の negligible set $N_{\sigma_1}, N_{\sigma_2}$ に分解されねばなら

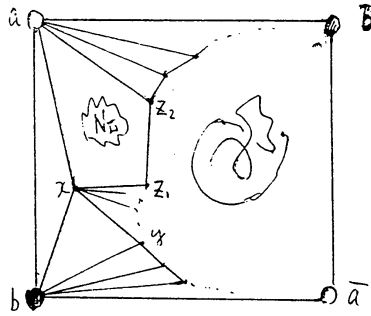


図 17

ない。今 $z_1 = z_2$ であれば求める結果は既に明白である。そこで $\mathcal{C}_a$ における

$N_{\sigma_{a, z_1, z_2}}$ を $\mathcal{C}$ において $\times \square$ とかく。今、
 $\mathcal{C}_\square = (X_\square; p, \Psi_\square)$ を次のように定め

と connex である。

これは図 18 のものと同型である。

$$\begin{aligned} & \Psi_{\square(m)}(x_1, x_2) \\ &= \bar{\Psi}_{\square(m)}(x_1, x_2) \quad x_1, x_2 \in X_\square \end{aligned}$$

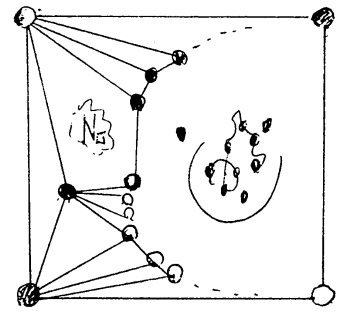


図 18

$$\bar{\Psi}_{\square(m)}(x_1, a) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(a, x_1) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(a, x_1)$$

$$\bar{\Psi}_{\square(m)}(x_1, b) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(b, x_1) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(x, x_1)$$

$$\bar{\Psi}_{\square(m)}(x_1, \bar{a}) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(\bar{a}, x_1) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(z_1, x_1)$$

$$\bar{\Psi}_{\square(m)}(x_1, \bar{b}) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(\bar{b}, x_1) = \bar{\Psi}_{\square(m)}(z_2, x_1)$$

$x_1 \in X_\square$

これによつて $\mathcal{C}_\square$ は free connex となるが

$$|X_\square| \leq |X - \{x\}| < |X|$$

よつて induction の仮定より、 $\mathcal{C}_\square$ は essentially plane connex である。これによつて $\mathcal{C}_\varepsilon$ は plane connex 上の essentially plane connex として表すことはたやすい。証明おわり。

Example

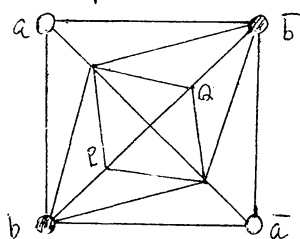


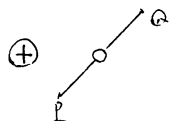
図 19

図 19 の よう な 連結状態 の $|X| = 5$

の space は connex と なる か

$$\psi_a(p, q) = 1$$

$$\psi_b(p, q) = 0$$



この space で connex と して は essentially plane

connex に 同型 ではない が , division space と して は 同型 である .

その 存在 する .

Free connex , essentially plane connex , connex の 同型類
 の 全体 を , それ ぞれ Free, Ess, Conn で , また これら から 得ら
 れる division space の 同型類 全体 を $Free^\pm$, $Ess^\pm$, $Conn^\pm$ で 表す
 . また division space の 同型類 全体 を Div^* で 表すと

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{C} & & Free & \hookrightarrow & Ess & \hookrightarrow & Conn \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}^\pm & & Free^\pm & \hookrightarrow & Ess^\pm & \hookrightarrow & Conn^\pm \hookrightarrow Div^\pm
 \end{array}$$

なる 図式 が 得られる . ① $^\pm$ 及び ③ $^\pm$ につ いて は 後記 の よう に ~~等~~
 $=$ ではない 例 がある が , ② $^\pm$ につ いて は 良く わから ない . わかっ
 ている こ と は $|X| \leq 5$ の ^{場合} 例 は すべて 肯定的 である とい う こ と であ
 る . ① 及び ② につ いて は 例 を 挙げる こ と は 至 , ち 簡単 であ
 る .

Example 1. 図 20 は plane convex C と与えるが, C の division space C^+ は free convex であることがわかる。これは同型でない。

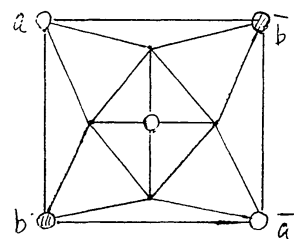


図 20

—— 証明 ——

C に a, b に対しては $\chi^+(b) = \overline{b} \iff D(b) \cap U_a \neq \emptyset$ 又は $D(b) \cap U_{\overline{a}} \neq \emptyset$ であるが, C から $C' = (X; \rho, \Psi')$ へは free convex と同型であれば, $U_a \ni x_1, y_1, U_{\overline{a}} \ni x_2, y_2$ を適当にとり, Ψ'

$$\Psi'_{(a)}(b, x_1) = \Psi'_{(a)}(x_1, y_1) = \Psi'(y_1, \overline{b}) = 1$$

$$\Psi'_{(a)}(b, y_2) = \Psi'_{(a)}(x_2, \overline{b}) = 0$$

となる。以下, 次を成り立たせ, C を成り立たなくして矛盾を導き出すことができる。

$$\Psi'_{(a)}(x_1, y_2) = \Psi'_{(a)}(x_2, y_1) = 0.$$

Example 2. $|X| = 3$ なる集合 X に, 下のような χ^+ を定め $\mathcal{G}^+ = (X; \chi^+)$ を作ると, convex から得られないものができる。

$$\chi^+(b) = \overline{b} \iff |D(b)| \geq 2$$

—— 証明 ——

もし $|U_a| \geq 2$ ならば $D(a) = U_a$ なる b に対し $\chi^+(b) = \overline{b}$ から, “ C は nontrivial” と併せ $U_a \cap U_{\overline{a}} \neq \emptyset$ となり矛盾。 $|U_a| \leq 1$ ならば $D(a) = X - U_a$ なる b に対し $\chi^+(b) = 1$ とより nontrivial に反する。

§ 6. Division game

Definition. $\mathcal{Q}^* = (X; \chi^*)$ を division space とするとき,
次のような写像 $\mathcal{O}, \partial$ をそれぞれ order, initial condition という.

$$\mathcal{O}: \{1, 2, \dots, |X|\} \longrightarrow \mathbb{M}$$

$$\partial: \mathbb{M} \longrightarrow 2^X \quad \text{s.t.} \quad \bigcap_{m \in \mathbb{M}} \partial(m) = \emptyset.$$

$\mathcal{O}$ が order, $i, j \in \mathbb{Z}^+$ が $i+j \leq |X|$ をみたすとき次のように,
写像 $\mathcal{O}_i^j: \{1, 2, \dots, |X|-i-j\} \longrightarrow \mathbb{M}$ を定める. 但し i, j は 0
のとき書くこと省略する.

$$\mathcal{O}_i^j(n) = \mathcal{O}(n+j)$$

Definition. 自然数 N , order $\mathcal{O}$ について次の条件を導く
する.

$$1). \quad N^+ \text{-periodic} \iff \exists m \in \mathbb{M} \quad \text{s.t.}$$

$$\mathcal{O}(n) = m \iff n \equiv 1, \dots, N \pmod{2N}$$

$$2). \quad N^- \text{-periodic} \iff \exists m \in \mathbb{M} \quad \text{s.t.}$$

$$\mathcal{O}(n) = m \iff |X|-n \equiv 1, \dots, N \pmod{2N}$$

$$3). \quad (\pm) \text{-periodic} \iff \exists N \quad \text{s.t.} \quad N^\pm \text{-periodic}$$

$$4). \quad \text{alternate} \iff 1^\pm \text{-periodic}$$

Definition. order $\mathcal{O}$ について次の用語を導入する.

$$1). \quad ml^+(\mathcal{O}) = \mathcal{O}(1) \dots \text{starter (先手)}$$

$$2). \quad ml^-(\mathcal{O}) = \mathcal{O}(|X|) \dots \text{anchor (終手)}$$

$\partial_1, \partial_2 \in \bigcap_i (\cup_{ml} \partial_i(ml)) = \emptyset$ なる initial condition の組とするとき $\partial_1 + \partial_2$ なる initial condition を次のように定める.

$$\partial_1 + \partial_2(ml) = \cup_i \partial_i(ml) \quad \forall ml \in \mathbb{M}$$

また $\mathcal{S} \in X$, $ml \in \mathbb{M}$ に対し initial condition $\mathcal{S}, ml$ を次のように定める. ($\mathcal{S} = \{x \mid \text{ある } x \text{ が } \mathcal{S} \text{ に入る}\}$).

$$\mathcal{S}, ml(ml) = \{x\}$$

$$\mathcal{S}, ml(\emptyset) = \emptyset$$

$\mathcal{D}^*$ は division space, ∂ は initial condition とする. このとき $\mathcal{D}_\partial^*$ を次のように定める.

$$X_\partial = X - \cup_{ml} \partial(ml)$$

$$\chi_\partial^*(b_\partial) = \chi^*(b_\partial + \partial) \quad \forall b_\partial \in \mathcal{D}_\partial$$

Definition. $\mathcal{D}^*$ は division space, $\mathcal{O}$ は order とするとき
 “先手は $\mathcal{O}(1)$ が着手する” という約束で X の点を占め合い、最終的に得られた分割状態 b に対し $\chi^*(b)$ が勝者とする
 というゲームを $\mathcal{D}^* \pm \text{order } \mathcal{O}$ の division game とし $\mathcal{D}^*(\mathcal{O})$ とかく. $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_\partial^*$ に対し order $\mathcal{O}'$ のゲームを $\mathcal{D}_\partial^*(\mathcal{O}')$ とかく.

有限ゲームの一般論から, $\mathcal{D}_{\mathcal{D}^*}^*(\mathcal{C}')$ は "必勝者" 常に
最善を尽せば勝つことができる者 を持つゲームである。
これによ, 次の定義が得られる。

Definition. $\mu_{\mathcal{D}^*}^+ : \{\mathcal{C}\} \longrightarrow \mathbb{M}$
 $\mathcal{C} \longmapsto \mathcal{D}_{\mathcal{D}^*}^*(\mathcal{C})$ の必勝者
 $\mu_{\mathcal{D}^*}^-(\mathcal{C}) = \widehat{\mu_{\mathcal{D}^*}^+(\mathcal{C})}$

Lemma. $X \neq \emptyset$ のとき次のことからわかる。

$$1). \quad \mu_{\mathcal{D}^*}^+(\mathcal{C}) = \mu\mu^+(\mathcal{C}) \iff \exists x \in X \quad \mu_{\mathcal{D}_{x, \mathcal{C}(1)}}^+(\mathcal{C}') = \mu\mu^+(\mathcal{C})$$

$$2). \quad \mu_{\mathcal{D}^*}^-(\mathcal{C}) = \mu\mu^-(\mathcal{C}) \iff \exists x \in X \quad \mu_{\mathcal{D}_{x, \mathcal{C}(1)}}^-(\mathcal{C}') = \mu\mu^-(\mathcal{C})$$

$$3). \quad \text{regular connex } \mathcal{D}^+, \text{ misère connex } \mathcal{D}^- :$$

対しては次のことからわかる。 : : :

initial conditions ∂, ∂' は

$$\partial(\mu\mu) \supset \partial'(\mu\mu), \quad \partial(\widehat{\mu\mu}) \subset \partial'(\widehat{\mu\mu})$$

と π_1, π_2 とする。

$$\mu_{\mathcal{D}_{\partial}^+}^+(\mathcal{C}_{\partial 1}) = \mu\mu \implies \mu_{\mathcal{D}_{\partial}^+}^+(\mathcal{C}_{\partial 1}) = \mu\mu$$

$$\mu_{\mathcal{D}_{\partial}^-}^-(\mathcal{C}_{\partial 1}) = \widehat{\mu\mu} \implies \mu_{\mathcal{D}_{\partial}^-}^-(\mathcal{C}_{\partial 1}) = \widehat{\mu\mu}$$

$$\text{但し } |\partial| = |\bigcup_{\mu\mu} \partial(\mu\mu)|, \quad |\partial'| = |\bigcup_{\mu\mu} \partial'(\mu\mu)| \text{ とする。}$$

この Lemma の 2) の式を “一般時に $\Leftrightarrow$ という形にする” ことはできない。もしそれができれば, order $\mathcal{C}$ に対し, $\check{\mathcal{C}}$ を

$$\check{\mathcal{C}}(n) = \mathcal{O}(n-1)$$

と置くとき

$$\mu_{\mathcal{C}^+}^+(\mathcal{O}) = \mu_{\check{\mathcal{C}}^+}^-(\check{\mathcal{C}})$$

という驚異的な結論を induction で得ることはできるが, これには次の反例がある。

Example. 図 21 から得られる connex $\check{\mathcal{C}}$ に対して $\mathcal{C}^+$ を考える。今 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}(n) = a \iff n \equiv 0 \pmod{2}$ により定めると, 次の式が成り立つ (証明は割愛する)。

$$\mu_{\mathcal{C}^+}^+(\mathcal{O}) = \mu_{\check{\mathcal{C}}^+}^-(\check{\mathcal{C}}) = a.$$

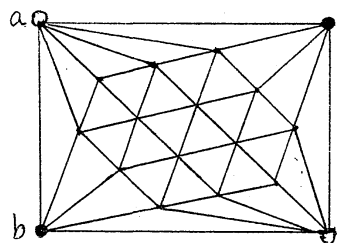


図 21

この例は $\check{\mathcal{C}}$ が free connex, $\mathcal{O}$ が alternate order である為, 上の命題 $\mu_{\mathcal{C}^+}^+(\mathcal{O}) = \mu_{\check{\mathcal{C}}^+}^-(\check{\mathcal{C}})$ に本質的不足があることを示している。しかし misère における anchor の不利が regular における starter の有利を凌ぐものではないかという疑問が残る。我々は $\mu_{\mathcal{C}^+}^+(\mathcal{O}) = \mu_{\check{\mathcal{C}}^+}^-(\check{\mathcal{C}})$ の為には free connex と alternate order が無効であることを知ったが, 別な条件のもとに, ~~次の~~ 結論を得ることが出来る。

Theorem 3. $\mathcal{Q}^\pm \in \text{Aut}(\mathcal{Q}^\pm) \not\subseteq \text{Aut}_{\text{full}}(\mathcal{Q}^\pm)$ なる division space, $\mathcal{Q} \in (\pm)$ -periodic order とする。このとき次の関係が成り立つ。ここに $\pm$ は一斉に同じ符号をとるものとする。

$$\mu_{\mathcal{Q}^\pm}^\pm(\mathcal{Q}) = \text{mz}^\pm(\mathcal{Q}),$$

—— 証明概要 ——

まず $\text{Aut}(\mathcal{Q}^\pm) = \text{Aut}_{\text{full}}(\mathcal{Q}^\pm) \ni \gamma$ が与えられているとしよう。このことから $|X| \neq 0$ なることがわかる。今、 $d \geq 0, 0 \leq r \leq N$ なる d, r により $|X| = 2Nd + r$ と表す。これから (H) の場合と (I) の場合、 $r \leq N$ の場合と $r > N$ の場合のあわせて四つの場合に分けて、背理法に従って証明しよう。~~ここに~~ initial condition $\mathcal{Q}$ が $\mu_{\mathcal{Q}^\pm}^\pm(\mathcal{Q}^{\text{pl}})$ に与える必勝法、即ち着手点の集合 $\Sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ で表す。

(H) の場合、今 $\mu_{\mathcal{Q}^\pm}^\pm(\mathcal{Q}) = \text{mz}^\pm(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ とする。

i). $r \leq N$ の場合、 $\mathcal{Q}$ は与えられた各局面 $\mathcal{Q}$ に対

し次の方針に従って帰納的に打つことが出来る。

・まず、最後の r コ以外では $\mathcal{Q}$ に対して次のよ

うな $\mathcal{Q}'$ が存在する (ように帰納的に打つ)。

$$\mathcal{Q}'(\alpha) = \mathcal{Q}(\alpha), \mathcal{Q}'(\beta) \supset \mathcal{Q}(\beta), |\mathcal{Q}'| = |\mathcal{Q}| + N$$

$$\mu_{\mathcal{Q}^\pm}^\pm(\mathcal{Q}^{\text{pl}}) = \mathcal{Q}$$

~~はせ~~ ~~はせ~~ ~~はせ~~ order $\mathcal{Q}' \in \mathcal{Q}'(n) = \mathcal{Q}(n+N)$ と $a' < a$

最後の L 以前までから N^+ -periodic である。このとき $S_{\partial'}$ に打つようにすればよい。最後の L コに關しては残りの L コを打つようにする。

ii). $L > N$ の場合, ∂ に對して常に次のような ∂' が存在する。

$$\partial'(a) = \partial(a), \quad \partial'(b) > \partial(b), \quad |\partial'| = |\partial| + N$$

$$\mu^+_{\partial'}(a^{|\partial'|}) = a.$$

最後の N コ以外は $S_{\partial'}$ に打つようにする。最後の N コは $S_{\partial'}(L-N)$ と残りのうちから任意に $2N-L$ コ打つようにすればよい。

(-) の場合, 今 $\mu^-_{\partial'}(a) = \widehat{\mu L}(a) = a$ とする。最初の節以外は ∂ が与えられた時は, 次のような ∂' が存在する。

$$\partial'(b) < \partial(b), \quad |\partial'| = |\partial| - N$$

$$\mu^+_{\partial'}(a^{|\partial'|}) = a.$$

最初の節については, 二つの場合に分ける。

i). $L \leq N$ の場合, $\partial(a) = \partial(b) = \emptyset$ なる ∂ に對する $S_{\partial}(L)$ のうち打てるものを打ち, N コのうち残りを任意に打つ。

ii). $L > N$ の場合, 任意に $L-N$ コ打てばよい。

これらの方針が与えられた場合に可能なことは ∂ の存在

及び, $\mathcal{Q}$ が (+)-periodic であることからわかる. また: これら b の必勝法を適用するものであることは, $\mathcal{Q}^\pm$ がそれぞれ, regular, misère であることから知れる. これで証明の筋道は明らかである.

上の証明において (+)-periodic は本質的である. 仮に: 次のような order にまで定理を拡張すると (+) については下記の反例を得る.

$$(+)\text{-periodic} \Rightarrow \text{最優先的 i.e. } |\mathcal{Q}_i^{-1}(a)| \geq |\mathcal{Q}_i^{-1}(b)| \quad \forall i$$

$$(-)\text{-periodic} \Rightarrow b \text{ が残務処理的 i.e. } |(\mathcal{Q}^\pm)^{-1}(a)| \leq |(\mathcal{Q}^\pm)^{-1}(b)| \quad \forall j$$

Example. $\mathcal{Q}^+ = \mathcal{H}_4^+$ とし $\mathcal{Q}$ を次のように定める.

$$\mathcal{Q}^{-1}(a) = \{1, 2, 3; 7, 9, 11, 13, 15\}$$

この場合 a は先行的である. しかし $\#4, 5, 6$ 手目を打つのが b であること, $\#7$ 手目からは交互に着手することに注意すれば, a は u で表わされる点, v で表わされる点には,

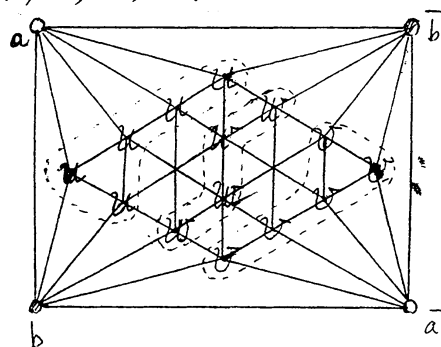


図 22

それだけ少くとも一つ打たねばならない. 従って残りの場所には高々 1 個しか打てないので, u で表わされる点に一つ打たねばならないことがわかる. 以下 $\mu_{\mathcal{Q}^+}^+(a) = m\hat{\mathcal{Q}^+}(a) = b$ であ

ることを各自確かめられたい (ω をどこにとるか ~~で可類~~). (一)
 については, まだ反例は挙げ, ていない. もしかすると "残
 務処理者は不利である" という因縁じみた命題が成立してい
 るかも知れない, ときには単なる irregular である "misère" の
 宿命があるような気配しないうてもない. 尚 $|X|$ と k 木に 対する
 order を固定するとき, $\mathcal{O}$ が 先行的, 残務処理的である限り,
 k 木それぞれ $\mathcal{O}^+, \mathcal{O}^-$ で $M_{\mathcal{O}^\pm}^\pm(\mathcal{O}) = \widehat{mz}^\pm(\mathcal{O})$ と なるものが存在す
 ることは容易である (§5 の最後の例参照).

Definition. $\mathcal{E}^*$ is division space, $\mathcal{O}$ is order とするとき,
 次の集合を定義する, ~~$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}^*}^\pm(\mathcal{O}) = \{S \subset X \mid |S| = N_\pm, M_{\mathcal{O}^*}^\pm(S, \mathcal{O}_{(X)}) = \widehat{mz}^\pm(\mathcal{O})\}$~~

$$Z_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}) = \{S \subset X \mid |S| = N_+, M_{\mathcal{O}^*}^+(S, \mathcal{O}_{(X)}) = \widehat{mz}^+(\mathcal{O})\}$$

$$Z_{\mathcal{O}^*}^-(\mathcal{O}) = \{S \subset X \mid |S| = N_-, M_{\mathcal{O}^*}^-(S, \mathcal{O}_{(X)}) = \widehat{mz}^-(\mathcal{O})\}$$

ここに

$$N_+ = \max\{0, i \mid \mathcal{O}_{(j)} = \mathcal{O}_{(1)} \text{ for } 1 \leq j \leq i\}$$

$$N_- = \max\{0, i \mid \mathcal{O}_{(j)} = \mathcal{O}_{(|X|)} \text{ for } |X| - i + 1 \leq j \leq |X|\}$$

とする.

Remark. $|X| \neq 0$ ならば $4 - 4 = 0$ は

$$Z_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}) \neq \emptyset \iff M_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}) = \widehat{mz}^+(\mathcal{O})$$

$$Z_{\mathcal{O}^*}^-(\mathcal{O}) \neq \emptyset \iff M_{\mathcal{O}^*}^-(\mathcal{O}) = \widehat{mz}^-(\mathcal{O}).$$

§ 7. Hex $\mathcal{H}_n$

Hex $\mathcal{H}_n$ ($n \geq 1$) は initial plane convex で, Proposition (4.3) に π に π 通し normal である. よ, π は π の π とかわかる.

$$\text{Aut}_P(\mathcal{H}_n) = \{1\}$$

$$\{1\} \longrightarrow \text{Aut}_{X, \mathbb{H}}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}_n^\pm) \longrightarrow \{1\}$$

$n=1$	$\langle \tau_{Pa} \rangle \oplus \langle \tau_{Pb} \rangle$	$D_{2,4}$	$\{ \sim \}$
$n \geq 2$	$\{1\}$	$\langle \sigma \tau_{Pa} \rangle \oplus \langle \sigma \tau_{Pb} \rangle$	$\langle \quad \rangle \oplus \langle \quad \rangle$

$$\{1\} \longrightarrow \text{Aut}_{X, \mathbb{H}}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}_n^\pm) \longrightarrow \{1\}$$

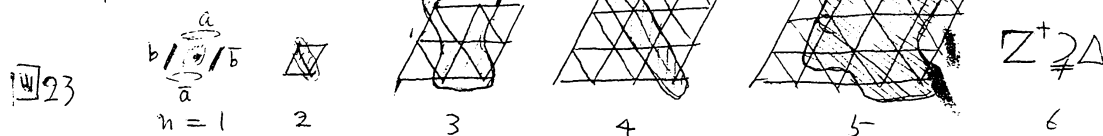
$n=1$	$\langle \tau_{Pa} \rangle \oplus \langle \tau_{Pb} \rangle$	$\{1\}$
$n \geq 2$	$\langle \tau \rangle$	$\langle \tau \rangle$

ここに $\tau = \sigma^2$ である. 従, τ $N^\pm$ -periodic order $\mathcal{C}$ に π 対して τ は

$$\mu_{\mathcal{H}_n^\pm}^\pm(\mathcal{C}) = \pi \pi^\pm(\mathcal{C})$$

である. 以下この π 対して τ は alternate order $\mathcal{C}$ に π 対して $Z_{\mathcal{H}_n^\pm}^+(\mathcal{C})$ を考察する.

Example $\mathcal{C}^+(\mathcal{C}) = \{\text{even}\}$ とするとき $Z_{\mathcal{H}_n^\pm}^+(\mathcal{C})$ は次の図の斜線部分である.



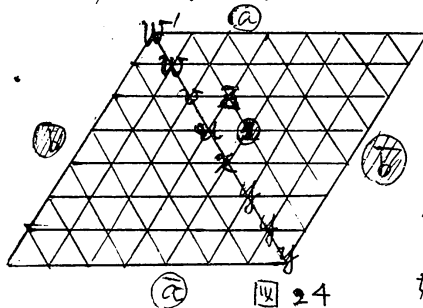
盤の記載は Hex の慣例になら, た. Δ は対角線を表す.

Conjecture. alternati order $\mathcal{Q}$ に対して

$$1) \quad Z^+_{\mathcal{H}_n^+}(\mathcal{Q}) \supseteq \Delta$$

$$2) \quad Z^+_{\mathcal{H}_n^+}(\mathcal{Q}) = \Delta \iff n: 2 \text{ 中}$$

この conjecture について, まず 1) は相当信頼できるが証明の手がかりは皆目ない, 2) については $n=2^3$ のとき正しそうな正しくなさそうな, どちらかといえば実験的には非観的な結果が多いが明確には分っていない. $n=2^3$ は解明し得る限界あたりにあるようである. 一般に, $Z^+_{\mathcal{H}_n^+}(\mathcal{Q}) = \Delta$ がどれくらい大きいか ($|X|$ に対し相対的に) ということと, n の素因数分解との関係も注目される. その意味では $n=6, 7$ (特に 6) の場合も完全に決定すること興味を引く問題である.



実際問題として $n=2^3$ では ② が有力点である. $Z^+_{\mathcal{H}_8^+}(\mathcal{Q}) = \Delta$ かどうかのみを知るには $\mathcal{Q}$ が ② を対角線上で妨げることができるかどうか焦点となる.

$\mathcal{Q}$ が π に打てば ν で, ν のどれかに打てば π で $\mathcal{Q}$ が必勝となることは腕に自信のある向きは確認していった. また w は論理的に w に劣ることもある. 従って u, v, w のうちに $\mathcal{Q}$ の対策があれば最有力点 ② は Z^+ に属さないし, 対策がなければ $Z^+ \supsetneq \Delta$ が確定する.

§ 8. 一様な勝ち方

以下本節では $|X| = \text{even}$ なる division space $\mathcal{D}^*$ を $\rightarrow$ fix する.

Definition. 固定点をもたない involution $f: X \rightarrow X$ (i.e. $f^2 = \text{id}_X$, $f(p) \neq p \forall p \in X$) が m_0 の uniform winning correspondence であるとは下の条件を満たすことをいふ, 其の全体を $\mathcal{U}_{m_0}(\mathcal{D}^*)$ で表す.

$$\forall D \in \mathcal{D} \text{ s.t. } f(D(m_0)) = D(\widehat{m_0}) \implies \chi(D) = m_0.$$

Remark

$$\mathcal{U}_{\widehat{m_0}}(\mathcal{D}^*) = \mathcal{U}_{m_0}(\mathcal{D}^*)$$

$$\mathcal{U}_{m_0}(\mathcal{D}^*) \neq \emptyset \implies Z_{\mathcal{D}^*}^+(\mathcal{C}) \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{C}: \text{alternate}$$

Definition. $\text{Aut}_{\mathbb{H}}(\mathcal{D}^*) \supset G$ に對し $\mathcal{U}_{m_0}(\mathcal{D}^*) \ni f$ が G -symmetric であるとは

$$f \circ \gamma = \gamma \circ f \quad \forall \gamma \in G$$

なることをいふ. 特に $G = \text{Aut}_{\mathbb{H}}(\mathcal{D}^*)$ のとき単に symmetric であるという.

以下特に断らないう限り regular division space $\mathcal{D}^+$ に對する議論を進める (mixed についても同様のことが考えられる). また, $\mathcal{C}$ は alternate とする.

Definition. $f': X \rightarrow X$ は写像とする. λ は f' の bijection
 $\lambda: \{1, \dots, |X|\} \rightarrow X$ の f' -variation であるとは
 $\mathcal{O}(1) = \mathcal{M}_0$ 上 λ は alternate order $\mathcal{O}$ に對し

$$\lambda(2n) = f' \circ \lambda(2n-1) \quad \text{if} \quad f' \circ \lambda(2n-1) \neq \lambda(2n) \quad \forall n < 2n$$
なることを要する.

Definition. f' が性質 $(\mathcal{M}_{\mathcal{M}_0})$ を持つとは, すべて f' -
 variation λ が次の性質を満たすことを要する.

$$\chi^+(\lambda) = \mathcal{M}_0.$$

これに λ は次の式で与えられる.

$$\lambda(\mathcal{M}_0) = \lambda(\mathcal{O}^{-1}(\mathcal{M}_0)).$$

Lemma. $f' \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_0}$ は性質 $(\mathcal{M}_{\mathcal{M}_0})$ を持つ.

Proposition (8.1). f' が性質 $(\mathcal{M}_{\mathcal{M}_0})$ を持つとする. $L(x) =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f'^n(x)\}$, $\ell(x) = |L(x)|$ とおくと次のような $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}_0}$ が存
 在する.

$$\forall x \mid \ell(x) \geq 2 \implies \exists u, v \in L(x) \quad \text{s.t.} \quad f(u) = v$$

証明は略する. 上のような f', f の関係は $f' \Rightarrow f$ で表す
 ことにする.

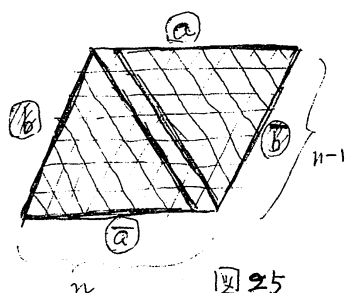
Definition. $f \in L_{\text{reg}}$ が exact であるとは $f'' \Rightarrow f$ なる f' が f の母であることと云う ($f \Rightarrow f$ は常に成り立つ).

Remark $f \in L_{\text{reg}}$ に対し $x \in X$ に対し f_x を次のように定める.

$$f_x(u) = \begin{cases} u & u = x \cdot f(x) \\ f(u) & \text{その他} \end{cases}$$

このとき各 f_x に対し f_x -variation λ で $\chi^+(b) = \widehat{\text{reg}}$ なるもの ($\delta(\text{reg}) = \lambda(\mathcal{C}^+(\text{reg}))$ なる b) が存在することと f が exact であることは同値である.

§ 9. $\mathcal{H}_{n-1, n}$

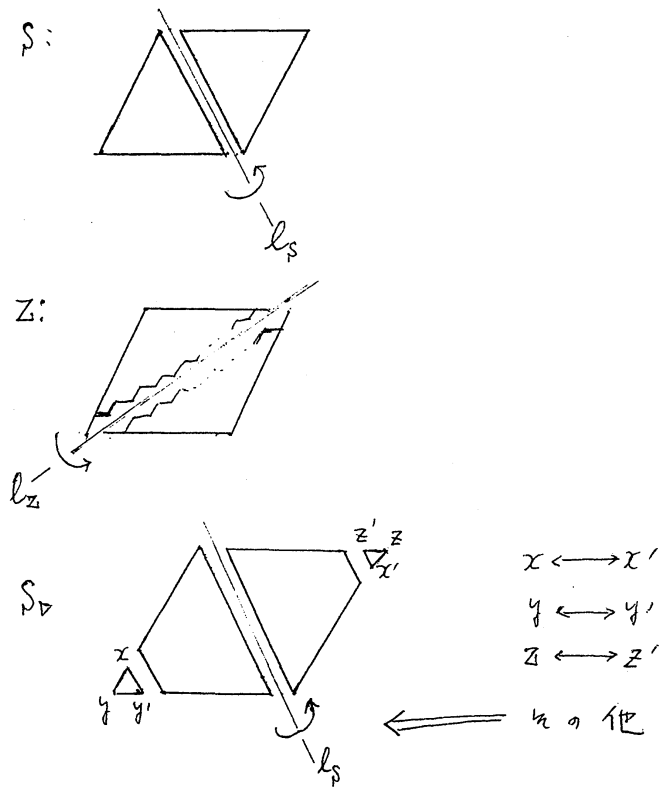


$n \geq 1$ に対し左図のようなる盤 $\in \mathcal{H}_{n-1, n}$ と書く ($n=1$ のとき $\chi = a$ とみえる).
自己同型群については次の表が得られる.

$$\text{Aut}_P(\mathcal{H}_{n-1, n}) = \{1\}$$

	$\text{Aut}_{X, \text{reg}}(\mathcal{H}_{n-1, n})$	$\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{n-1, n})$	$\text{Aut}(\mathcal{H}_{n-1, n}^{\pm})$	
		$\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_{n-1, n})$	$\text{Aut}_{\mathcal{H}}^{\pm}(\mathcal{H}_{n-1, n}^{\pm})$	
$n=1$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$\{1\}$	
$n=2$	$\langle \tau_{p_b} \rangle$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$\langle [2] \rangle$	
$n=3$	$\{1\}$	$\langle [2] \rangle$	$\langle [2] \rangle$	

Theorem 4. $\mathcal{L}_a(\mathcal{H}_{n-1}^+)$ は次の $\mathcal{S}, \mathcal{S}_D, \mathcal{Z}$ の三つの元を持つ
 , 但し $n=1, 2$ のときは $\mathcal{S} = \mathcal{Z} = \mathcal{S}_D$, $n=3$ のときは $\mathcal{Z} = \mathcal{S}_D$
 $\neq \mathcal{S}$, $n \geq 4$ のときは三つ互相異なる .



—— 証明方針 ——

$f' = \mathcal{S}$ とは $\mathcal{Z}$ に対して f' が考えよう . $X^+(b) = \bar{b}$ なる f' -
 variation があつたとしよう . このとき $\Omega(b)$ 内に b から $\bar{b}$ への
 path が全いる筈である . 今 , けういふ path のうちで最短なそ
 のを $b = u_0, u_1, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m = \bar{b}$ とし , u_i, u_{i+1} におい
 てはじめて $l_{f'}$ と交わる としよう (b から始めて) . f' の
 involution (固定点なし) であるから $f'(\{u_0, \dots, u_i\})$ は $\mathcal{Q}$ の path

であり、且つ $\{u_0, \dots, u_i\}$ と交らない。また u_i と $f(u_i)$ は $\pm$ 単体を共有している。従って $\{u_0, \dots, u_i, f(u_i), \dots, f(u_0)\}$ は b から a への path であり、 u_{i+1} はこの中にどこにも入らない。即ち $X - \{u_1, \dots, u_i, f(u_i), \dots, f(u_1)\}$ に於いて u_{i+1} と $\bar{b}$ は別の連結成分に属する。従って Jordan の曲線定理により、path $u_{i+1}, \dots, \bar{b}$ は $\{u_1, \dots, u_i, f(u_i), \dots, f(u_1)\}$ と交わらないと得られる。従って仮定に反する。

$f' = S_D$ のときは $\{x, x', y, y', z, z'\}$ がいかに分解されるかに注意して S に帰着させればよい。

Proposition (9.1) $n \leq 6$ では次の表が得られる。

n	1	2	3	4	5	6
$ L_a(H_{n-1,n}^+) $	1	1	2	3	3	3

証明は割愛する (帰帰を催すだけだから)。

Remark. S, Z, S_D は各 n について一般に symmetric 且つ exact である。

$|L_a(H_{n-1,n}^+)|$ は $n \geq 6$ でもあるかどうかということも考えられるがこれには次の Proposition 以上は分らない。

Proposition (9.2)

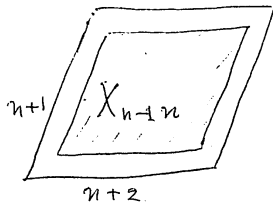


図 26

図 26 のように $X_{n-1,n} \hookrightarrow X_{n-1,n+2}$ なる

embedding を作る。今、 $|\mathcal{L}_a(\mathcal{H}_{n-1,n}^+)| = 3$

なる n に対しては次の式が成り立つ。

$$\{f \in \mathcal{L}_a(\mathcal{H}_{n-1,n+2}^+) \mid f(X_{n-1,n}) = X_{n-1,n}\} \\ = \{S, S_D, Z\}.$$

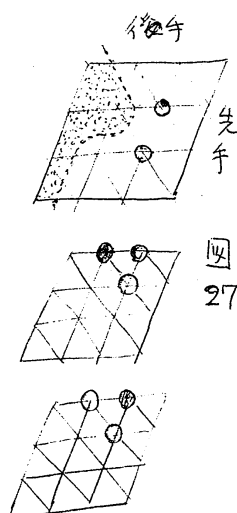
証明は、ここに挙げたので各自確かめたい。

§ 10. あとがき

以上のように Hex は connex, division game へと拡張されたが、競技の対象としておもしろいものは余り多くない。唯 Hex は“原理的に先手必勝”が判、てい、るという“いやみ”……大きい盤では必勝法を知することは事実上できないが……があるので、先れを気分的に解消する為に置き石、即ち initial condition が考えられた。尤も、どういじるにしても“どちらかが必勝”という原理をかえる訳ではない。興味深い置き石としては、“後手が対角線上でな…方の両隅にあらかじめ置いてから始める ($n=1$ では対角線)”というのがある、 $n=1, 2, 4$ では後手、 $3, 5, 6$ では先手の必勝が判、てい、る。以下 $n \geq 7$ でも先手に有利であろうと思えるが、 $n=6$ ですら割合最近まで後手必勝と錯覚していたものである。

次の工夫は order であるが、これについては“先手の
一手につき 1 つであとは互いに 2 つづつ”というのが有力で
ある、これについての Z^+ は次の表の通りである。

n	1	2	3	4
Z^+				



$n=4$ については図 27 を参照されたい。

この場合の Z^+ は意外といえば意外である、た
が、それについて論じるほどの感覚がまだ
ないという方が当を得ていよう。この order
について $n \geq 5$ に至っては Z^+ に入りこ

な有力な点を想像することさえ困難であるし、実際的に、ゲ
ーム展開は通常の Hex とは全く趣きを異にする。

お気づきの向きもあるうが、Hex から Connex までは拡張
そのものであるが、Division space は少し違うのである。
即ち、Hex では全部の石を打つ以前に鎖かできて勝負がつく
ことが多い。この点を誇張すれば、“100 手以内は regular
以降は misère” というようなルールを作ることもしかないこ
とはない（もちろん Division game ではない）、Connex のゲ
ーム化には、未だにそのような余裕が少し残っている。

最後に、本稿では“Conjecture”とする勇気がなかったが、次

のような命題が考えられる。即ち、 $\mathcal{D}^+$: regular, $\mathcal{C}$: N^+ -periodic
に対し

$$\mu_{\mathcal{D}^+}^+(\mathcal{C}) = \text{val}^+(\mathcal{C}) \implies \mu_{\mathcal{D}^+}^-(\check{\mathcal{C}}) = \text{val}^-(\check{\mathcal{C}})$$

が成立するのではないかというところである。この種の“宿命”
についての命題に対してデータを揃えているわけではなから
、alternate order で H_n^- を実際に play してみると、“anchor
の重み”が *misère* においていかに“*misère*”に作用するかを
感じるものである。証明は絶望的であるが、反例の他の指
摘があれば幸いとするとこである。

参考文献

- [1] 米田信夫 ナン シュ・ゲームのこと

数学セミナー 1965・8・2

§ 訂正と追加

訂正 ----- No. 13 の Definition の図式は ~~誤~~ のようにする .

$$\begin{array}{ccc} F_D: \Sigma & \longrightarrow & \Sigma' \\ \chi^* \downarrow & & \downarrow \chi'^* \\ \text{sgn } F: M & \longrightarrow & M \end{array}$$

ここに F_D は次のように与えられる .

$$F_D(b)_{(m)} = f(b(\text{om}^{\text{sgn } F}))$$

追加. $\mathcal{Q}^+ \in \text{div sp}$, $\mathcal{Q} \in \text{order}$ とする . 今 $\mathcal{Q}_i^{\wedge}, \mathcal{Q}^i$ に対して次の Propositions を得る . ことに $\mathcal{Q}_i^{\wedge}, \mathcal{Q}^i$ は

$$\mathcal{Q}_i^{\wedge}(n) = \begin{cases} \mathcal{Q}(n) & n \neq i \\ \widehat{\mathcal{Q}}(i) & n = i \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}^i(n) = \begin{cases} \mathcal{Q}(n) & n < i \\ \mathcal{Q}(|x|) & n = i \\ \mathcal{Q}(n-1) & n > i \end{cases}$$

により与えられる .

Proposition ($\pm$) $\mathcal{Q}^*$ と $\mathcal{Q}^{\pm}$ のとき

$$\mu_{\mathcal{Q}^{\pm}}^{\pm}(\mathcal{Q}_i^{\wedge}) = \mathcal{Q}(i) \implies \mu_{\mathcal{Q}^{\pm}}^{\pm}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}(i)$$

ここに複号は同順である .

Proposition (*)

$$\mu_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}) = \mathcal{O}(1 \times 1) \implies \mu_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}^i) = \mathcal{O}^i(1) = \mathcal{O}(1 \times 1).$$

Corollary. $\mu_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}^i) = m^-(\mathcal{O}^1) \implies \mu_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}) = m^+(\mathcal{O})$

即ち $\mu_{\mathcal{O}^*}^-(\mathcal{O}) = m^+(\mathcal{O}) \implies \mu_{\mathcal{O}^*}^-(\mathcal{O}^1) = m^-(\mathcal{O}^1)$

これらの証明は Theorem 4 のより簡単である。またこれらは Theorem 4 を導くに十分である。我々は更に次の Theorem を得る。以上の Propositions と同様に証明を割愛する。

Theorem 5. $\mathcal{O}^+ \in \text{Aut } \mathcal{O}^* \supset \text{Aut}_{\text{fin}} \mathcal{O}^*$ なる div sp, $N \in \text{自然数とする}$ 、今 $|X| \equiv 0 \pmod{2N}$ の $\mathcal{O} \in N^+$ -periodic order $\mathcal{O}$ (i.e. N^- -periodic) に對して

$$\mu_{\mathcal{O}^*}^+(\mathcal{O}) = m^+(\mathcal{O})$$

即ち

$$\mu_{\mathcal{O}^*}^-(\mathcal{O}) = m^-(\mathcal{O})$$

である。

最後に、最近入手した文献 [2] によつて、次のことが判明した。

Hex board の 60° の隅を C とおく, M の陣地
に沿って C のとなりの点を d_{me} とおく



1). $n > 1$ で σ : alternate なら $Z_{gl_n}^+ \neq C$

..... もし $Z_{gl_n}^+ \ni C$ なら先手は C に打つ. T_1 のとき後手は
 $d_{\sigma(C_2)}$ に打てば相手の必勝法を適用できる⁴⁵ である
ことがわかる.

2). $n = \text{even}$ で σ : alternate なら $Z_{gl_n}^+ \ni C$

..... これは [2] の成果である. $\therefore$ [2] の λ 手は難
かし、可能性はあるが、注解すれば、p192 l7 にあ
ける $Q(h)$ は $P(h)$ の誤りであり、 h_{12} は上の d_w であ
る. 蛇足ながら [2] で使われる "Position" ということは
は石の配置された状態---局面を表している.

最後に, $\therefore$ であげた記号はいく分, 変更の可能性もある

ことを断っておく.

参考文献

[2] Ronald Evans A winning opening in reverse hex

J. Recreational Mathematics 7 No.3

Summer 1974.