

# On the pick - Nevanlinna problem

東工大 理 吹田信之

1. 問題の設定.  $\Omega$  を定数でない有界正則函数を有するリーマン面とする.  $\Omega$  上に有限個の点  $z_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, N$  と, 各点  $z_v$  にデータ  $A_v$ ,  $(|A_v| < 1)$  を与え,  $f(z_v) = A_v$  をみたす有界函数で  $|f(z)| < 1$ ,  $z \in \Omega$  とするものを求めよのが古典的な Pick - Nevanlinna の問題であった. Nevanlinna [11] は interpolation points  $\{z_v\}_{v=1}^N$  とは異なる点  $z_0$  を取り, 上の条件をみたす函数族  $\mathcal{F}$  に対する値の集合:  $W = \{f(z_0) \mid f \in \mathcal{F}\}$  を Wertverrat と名付け, とくに  $\Omega$  が単位円板の場合は,  $W$  は必ずある円周弧となることを示した. 一般のリーマン面  $\Omega$  については  $W$  の形状は不明であるが, つぎのことが Gahbedian [6] により分っている:  $W$  は円弧状凸な有界実集合である. すなわち,  $w_1, w_2 \in W$  ならば,  $w_1, w_2$  および単位円外の一点  $w_3$  を通る円周上の円弧  $\widehat{w_1 w_2}$  は  $W$  に含まれる. このことから

容易に、 $W$  が  $\infty$  実を含むならば  $\infty$  実を含むことがわかる。 $W$  の形状はその境界実が決定されれば明らかになるので、このことはつぎの極値問題に帰着させることができる： $\mathcal{B} = \{f \mid f(z_v) = A_v, v=1, \dots, N, \|f\| \leq 1\}$ ,  $\|f\| = \sup\{|f(z)|, z \in \Omega, |z| \leq 1\}$ ,  $\max \operatorname{Re}(e^{i\theta} f(z_0))$ ,  $f \in \mathcal{B}$  を決定せよ。この問題は Pick-Newmanlinna の問題と呼ばれる。実際に最大値をおめ、 $W$  の形状を決定することは困難であるが、極値函数の性質、唯一性が  $\Omega$  が有限個の解析曲線に囲まれた平面領域の場合 Carathéodory によって調べられている。なお、 $W$  が同根になる例は最近 Heins [7] によって得られている。

一般の Pick-Newmanlinna 問題は Herglotz [8, 9] Gamelin [4, 5] によりつぎのように与えられている： $\mu_v \in \Omega$  上の support compact なボレル測度とし、函数  $L_v(f) = \int f d\mu_v$ ,  $v=1, 2, \dots, N$  に対し、データ  $\{A_v\}$ ,  $v=1, \dots, N$  を与える。 $\mathcal{B} = \{f \mid \|f\| \leq 1, L_v(f) = A_v, v=1, \dots, N\}$  とし、 $\{\mu_v\}_{v=1}^N$  とは独立な support compact なボレル測度  $\mu_0$  によって  $\max(\operatorname{Re} L_0(f))$ ,  $f \in \mathcal{B}$  を決定せよ。最大値および極値函数の存在は、正規族の議論で容易に示されるので、極値函数の唯一性およびその性質が問題となる。なお  $f$  のノルム  $\|f\|$  によって上界ノルム以外のノルムも採

用できる.

条件  $\|f\| \leq 1$  によりデータに制限が付きが, 本講演では  
そのような制限のつかない Carathéodory - Fejér [2] の  
定式化によって問題を扱おう. すなわち, 函数族  $\mathcal{F}$   
 $= \{f \mid L_v(f) = A_v, v = 1, \dots, N\}$  とし,

$$m(A_1, \dots, A_N) = \min_{f \in \mathcal{F}} \|f\|$$

を求める問題を考える. 実際, Pick - Nevanlinna 問題との関  
係は, まず函数の存在にっいては,  $m(A_1, \dots, A_N) \leq 1$  で  
あればよい. また, 汎函数  $L_0$  に関する極値問題にっいては  
, 新しいデータ  $L_0(f) = A_0$  を加え, 集合  $V = \{A_0 \mid$   
 $m(A_0, A_1, \dots, A_N) = 1\}$  上で  $\operatorname{Re} A_0$  の最大値を求  
めればよい.

2. 基本補題. 上の定式化によって極値問題も考える場合  
, 以下の補題が有用である. 証明は Duren [3] 参照

補題 1.  $X$  は  $\|\cdot\|$  をノルムとするバナハ空間とし,  $S$  を  
 $X$  の内部分空間,  $S^\perp = \{T \mid T(x) = 0, x \in S\}$  とする  
とき, 固定された  $x_0$  に対し,

$$\max_{\substack{y \in S^\perp, \|y\|=1}} |y(x_0)| = \inf_{y \in S} \|x_0 + y\|$$

この補題の応用として, 複素の汎函数に関する極値問題も

それ等の適当な一次結合から成る一つの汎函数に関する極値問題に帰着させることが出来る (Jenkins - Saita [10]).

定理1. 正則函数をつくるバナッハ空間  $X$  に有限個の汎函数  $\{L_v\}_{v=1}^N$  とデータ  $\{A_v\}_{v=1}^N$  が与えられているとする.  $f_0$  がそれ等のデータに関する Pick - Nevanlinna 問題の極値函数ならば,  $f_0$  は適当な一次結合  $\varphi_0 = \sum_{v=1}^N c_v L_v$  とデータ  $\sum_{v=1}^N c_v A_v$  に関する同じ問題の極値函数となる.

証明. 補題1の  $x_0 = 1 \equiv f_0$  とする.  $S = \{f \mid L_v(f) = 0, v = 1, \dots, N\}$  にとり, 補題1の左辺で最大値を与える汎函数を  $\varphi_0$ ,  $\|\varphi_0\| = 1$  とすれば,  $\varphi_0(f_0) = \|f_0\|$  となる.  $\varphi_0 \in S^\perp$  だから,  $L_v(f) = 0, v = 1, \dots, N$  のとき  $\varphi_0(f) = 0$ . したがって  $\varphi_0 = \sum_{v=1}^N c_v L_v$  と表わされることを示す. すなわち,  $f \in S$  に対して  $\|f\| \geq |\varphi_0(f)| = \sum_{v=1}^N c_v A_v$  ならば  $f_0$  の極値性を示す.

3. 唯一性.  $\Omega$  が平面領域で  $O_{AB}$  に属さないとする.  $X$  とし  $\Omega$  上の有界函数をつくるバナッハ空間  $H^\infty(\Omega)$  とする.  $\Omega$  とす.

定理2.  $\{L_v\}_{v=1}^N$  は,  $\Omega$  上のコンパクト集合  $K$  上での上限ノルム  $\|f\|_K$  に関して連続な線形汎函数の集合とし, 対応するデータを  $\{A_v\}_{v=1}^N$  とする.  $M_0 = m(A_1, \dots, A_N) > 0$  ならば, 極値函数は唯一つある.

証明. 極値函数  $f_0, f_0^*$  が存在したとする. このとき,  
 $g = (f_0 + f_0^*)/2$  も極値函数である.  $h = (f_0 - f_0^*)/2$  とおけ  
 ば,  $|f|^2 + |g|^2 = \frac{1}{2}(|f_0|^2 + |f_0^*|^2) \leq M_0^2$ . したがって  $|g| \leq$   
 $M_0 - |h|^2/2M_0$ .  $\{z_v\}_{v=1}^l$  を  $K$  上にある  $h^2$  の零点全体とす  
 る. このとき,

$$H(z) = \frac{\eta}{2} \frac{h^2}{M_0} \prod_{v=1}^l \frac{1}{z - z_v}, \quad \left| \eta \prod_{v=1}^l \frac{1}{z - z_v} \right| \leq 1, z \in \Omega$$

とよければ  $|g(z)| + |H(z)| \leq M_0$ ,  $z \in \Omega$ . 定理 1 によ

り,  $g$  は  $\psi_0 = \sum_{v=1}^N c_v L_v$  とデータ  $\sum_{v=1}^N c_v A_v$  に関する

Pick - Nevanlinna 問題の極値函数となつてゐる. 変分  $g_\varepsilon(z)$

$= g(z) + \varepsilon H(z)$ ,  $|z|=1$  を用いることにより  $\psi_0(H) = 0$

$H$  の代りに  $Hf/\|f\|$  を用いて,  $\psi_0(Hf) = 0$ ,  $f \in H^\infty(\Omega)$ .

Bishop の近似定理 [1] を用いることにより,  $K$  上で正則  
 な函数は,  $K$  上で  $H^\infty(\Omega)$  の函数により一様に近似される

. すなわち, 任意な  $f \in H^\infty(\Omega)$  に対し,  $f/H$  は  $K$  上で正則な  
 から,  $\varepsilon > 0$  に対し,  $\|f/H - f_\varepsilon\| < \varepsilon$  となる  $f_\varepsilon \in H^\infty(\Omega)$   
 が存在する.  $\psi_0(Hf_\varepsilon) = 0$  だから,  $\psi_0(f) = 0$  となり矛盾  
 を生ずる.

4. 極値函数の境界挙動. この節では  $\Omega$  を有限なリーマン  
 面 ( $\neq \mathbb{C}$ ) とし,  $\Omega$  上で調和,  $\bar{\Omega}$  で連続な実数値調和函数  
 $\chi(z)$  に対し, ノルムを  $\chi\text{-}\|f\| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)e^{-\chi(z)}|, z \in \Omega$

と定義する.  $L_\nu, \nu=1, \dots, N$  は  $\Omega$  上のコンパクト集合  $K$  上のノルム  $\|f\|_K$  に因り連続な線形汎函数とする.  $f$  の  $K$  上への制限は  $K$  上の連続函数  $C(K)$  の部分空間だから, ハーン・バナッハの定理とリースの表現定理より,  $L_\nu(f) = \int f d\mu_\nu$ ,  $f \in C(K)$  と表わされる.  $\Omega$  のグリーン函数を  $g(z, \zeta)$  とすれば,  $d\mu_\nu$  の変換

$$Q_\nu(z) dz = \frac{i}{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int g(z, \zeta) d\mu_\nu(\zeta) \right) dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} f(z) Q_\nu(z) dz = L_\nu(f), \quad f \in H^\infty(\Omega)$$

を用いる. ノルム  $\chi - \|f\|$  が有限な  $f$  のつくるバナッハ空間を  $X$  とかけば, これは  $H^\infty(\Omega)$  と集合としては同じである.

定理 3  $K$  は  $\partial\Omega$  を分離しないとする.  $\{L_\nu\}_{\nu=1}^N$  はデータ,  $\{A_\nu\}_{\nu=1}^N$  に対し,  $M_0 = \inf \chi - \|f\|$ ,  $f \in \mathcal{F}$  の値より, 唯一の極値函数  $f_0$  が存在する.  $\chi - \|f_0\| = M_0$  であり,  $\partial\Omega$  上の与えられた単連結な近傍  $U$  上で  $f_0(z) e^{-(\chi(z) + i\chi^*(z))}$  は境界を越えて解析接続される. ここで  $\chi^*$  は  $\chi$  の共役調和函数である.

証明. 正規族の討論から,  $f_0$  の存在および  $\chi - \|f_0\| = M_0$  は容易に分る.  $S = \{f \mid L_\nu(f) = 0, \nu=1, \dots, N, f \in X\}$  とおく. 補題 1 より  $\varphi_0(f_0) = \max_{f \in S, \|f\|=1} \varphi(f_0) = \chi - \|f_0\|$ .  $\bar{A}(\Omega)$

を  $\Omega$  で正則,  $\bar{\Omega}$  で連続な函数全体とすれば,  $\varphi_0$  の  $\bar{A}(\Omega)$  へ

の制限によって  $\|\varphi_0\|_{\bar{A}(\Omega)} \leq 1$ .  $f$  は  $\varphi_0(f)$ ,  $f \in \bar{A}(\Omega)$  に対応させる汎函数を, ハーミット・バサワハの定理により,  $C(\partial\Omega)$  上の汎函数に拡張し, 再びリースの表現定理によって  $\Omega$  上の測度  $d\mu$  で表現すれば,

$$\varphi_0(f) = \int_{\partial\Omega} f d\mu, \quad f \in C(\partial\Omega).$$

$$\|e^x d\mu\| = \|\varphi_0\|_{\bar{A}(\Omega)}.$$

さらに 定理 1 から,

$$\int_{\partial\Omega} f (d\mu - \sum_{v=1}^N c_v l_v(z) dz) = 0, \quad f \in \bar{A}(\Omega)$$

したがって, Royden [12] によるリース兄弟の定理の拡張をうかがう

$$d\mu = \left( \sum_{v=1}^N c_v l_v(z) + \varphi_0(z) \right) dz, \quad \varphi_0 dz \in H^1(\Omega)$$

そこで  $\|e^x d\mu\| = \int_{\partial\Omega} e^x \left| \sum_{v=1}^N c_v l_v(z) + \varphi_0(z) \right| |dz| \leq 1$  極値函数  $f_0$  によって,

$$M_0 \leq \int_{\partial\Omega} |f_0 e^{-x}| e^x \left| \sum_{v=1}^N c_v l_v + \varphi_0 \right| |dz|$$

$|f_0 e^{-x}|$  の境界値は a. e. に  $M_0 e^{-x}$  であるから,

$$\int_{\partial\Omega} e^x \left| \sum_{v=1}^N c_v l_v(z) + \varphi_0(z) \right| \geq 1.$$

すなわち  $\|e^x \mu\| = 1$ .  $\Omega - K$  は領域だから,  $(\sum_{v=1}^N c_v l_v + \varphi_0) dz \neq 0$ , a.e. であるから  $|e^{-x} f_0| = M_0$  a.e. on  $\partial\Omega$  である.

$$M_0 = \int_{\partial\Omega} e^{-x} f_0 e^x \left( \sum_{v=1}^N c_v l_v + \varphi_0 \right) dz$$

より,  $f_0 \left( \sum_{v=1}^N c_v l_v + \varphi_0 \right) dz \geq 0$  a.e. along  $\partial\Omega$ . 境界点  $z$  の近傍  $U$  で  $E(z) = e^{-x(z) - x^*(z)}$  とおけば,  $|f_0 E| = M_0$  a.e. on  $\partial\Omega$ ,  $f E E^{-1} \left( \sum_{v=1}^N c_v l_v + \varphi_0 \right) dz \geq 0$  a.e. along  $\partial\Omega$ .

Rudin の結果 [13] より,  $f E, E^{-1} \left( \sum_{v=1}^N c_v l_v + \varphi_0 \right) dz$  は同時に  $\partial\Omega$  上へ解析接続される. 最後に, 極値函数の唯一性については, 他の極値函数  $f_0^*$  についても,  $\partial\Omega \cap U$  上で  $|f_0^* E| = M_0$ ,  $f_0^* E E^{-1} \left( \sum_{v=1}^N c_v l_v + \varphi_0 \right) dz \geq 0$  であるから,  $f_0^* = f_0$ .

5. 古典的な Pick - Nevanlinna 問題.  $\Omega$  を有限なリーマン面にとったとき, この問題を考えよう. interpolation points  $\{p_v\}_{v=1}^N$  に対し,  $p_v$  を原点に対応させる局所助変数  $z_v$  をとり, 各 parameter disc  $\Delta_v$  (互いに素としてよい). 上にデータ

$$D_v(z) = \sum_{j=0}^{n_v} a_j^{(v)} z^j, \quad j=1, 2, \dots, n_v$$

を与える.  $f$  を  $\Omega$  上の有界正則函数  $f$  で,  $f + D_v$  が  $\Delta_v$  上に少なくとも  $n_v + 1$  位の零点をもつもの全体とする.

定理 4.  $M_0 = \inf \{ \|f\| > 0, (\|f\| \text{ は上限ノルム}) \}$  ならば

, 唯一つの極値函数  $f_0$  が存在して,  $\partial\Omega$  上  $|f_0| = M_0$  とする.  
 $\Omega$  が種数  $g$ ,  $k$  個の境界をもてば,  $f_0$  は  $\Omega$  を商  $\sum_{v=1}^N (n_v+1)$   
 $+ 2g + k - 2$  枚の円板  $|w| < M_0$  の上へ写像する.

証明. 函数  $f$  が  $P_v$  で  $D_v(z)$  で与えられる展開をもつという  
 ことは,  $\gamma = 2\pi n_v$  個の導函数の値を汎函数の値として  
 指定するに等しい. すなわち  $L_1(f) = f(P_v)$ ,  $L_2(f) = f'(P_v)$   
 $\dots$ ,  $L_{n_v+1}(f) = f^{(n_v)}(P_v)$ ,  $\dots$  に等しい.  $a_0^{(v)}, a_1^{(v)}, \dots$   
 $n_v!$ ,  $a_{n_v}^{(v)}, \dots$  とする. このことは, 各 parameter  
 discs  $\Delta_v$ ,  $v=1, \dots, N$  の境界上には  $d\mu_v = (2\pi i z)^{-1} dz$ ,  
 $d\mu_2 = (2\pi i z^2)^{-1}$ ,  $\dots$ ,  $d\mu_{n_v+1} = (2\pi i z^{n_v+1})^{-1} n_v! (on \partial\Delta_v)$   
 $\dots$ ,  $d\mu_v$ ,  $v=1, 2, \dots, N$  は  $H^\infty(\Omega)$  に対し,  $f$  と  
 した汎函数を表現しているから, 前定理から, 極値函数  $f_0$   
 と,  $\partial\Omega$  の正傍に正則な微分  $d\Phi_0$  に対し,  $\partial\Omega$  に沿って

$$f_0 d\Phi_0 \geq 0, \quad \int |d\Phi_0| = 1$$

とする. 各  $P_v$  上に  $n_v+1$  個の零点をもつ  $\Omega$  上で正則な函数  
 $F(z)$  とすれば,  $f \in \bar{A}(\Omega)$  に対し,

$$\int_{\partial\Omega} f F d\bar{\Phi}_0 = 0$$

このことは,  $F d\bar{\Phi}_0$  が  $\Omega$  上の正則微分であることを示す  
 いたがって,  $f_0 d\bar{\Phi}_0$  は  $\Omega$  上の有理形微分であり,  $\Omega$  の

double  $\hat{\Omega}$  上  $\wedge$  有理形接続される.  $\hat{\Omega}$  上  $\deg(f \circ d\Phi) = 2(2g+h-2)$ . また  $f \circ d\Phi$  の極の位数の総和は  $2 \sum_{v=1}^N (m_v+1)$ . したがって  $f \circ d\Phi$  の零点の位数の総和は  $\hat{\Omega}$  上で高々  $2g+h-2 + \sum_{v=1}^N (m_v+1)$ . したがって  $f$  の零点となり得るので,  $f$  の字像の最大枚数を表わす.

c. 一般化 問題の一般化については二つの方向が考えられる. 一つは, リーマン面  $\Omega$  に因する一般化. ノルムとして無限ノルムを取るときは, 定理 2 より, 平面領域  $\Omega$  中  $O_{AB}$  についての, 極値点数の一意性は保証される. X-ノルムについては, Hayman の方法で種数有限の  $\Omega$  中  $O_{AB}$  についての極値点数の一意性表示される. この問題には, 函数としてのコーシー核の構成が基本的である (Jenkins-Santa [10]). 境界挙動については, 測度論的な情報は得られるが, 字像も無限枚となり, 分るものも少ない. 例えは BL 型字像の図解も不明である.

今一つは, 有限なリーマン面の場合にデータを無限化にする問題がある. この場合は, 面  $\Omega$  の近似  $\{\Omega_n\}$  をつくり,  $\Omega_n$  にデータを制限することにより,  $\Omega_n$  での極値函数  $f_n$  の極限として極値函数  $f_0$  をとらえることはできる. しかし, 各  $\Omega_n$  上で得られる図解  $f_n \circ d\Phi_n \neq 0$  によらず  $d\Phi_0$  は必ずしも non trivial な微分  $\wedge$  収束しない. このため  $f_0$

の境界挙動は不明である。  $d\Phi_n \rightarrow 0$  となる例を示そう

$\Omega$  とし、単位円  $|z| < 1$  とし、 interpolation points  $z_1, z_2, \dots, z_n$  とし、  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$  とする。各  $t_k$  上にデータ  $t_k$  を与えれば、明らかに  $f_0 = z$  は極値函数である。

$\Omega_n = \{ |z| < 1 - \frac{1}{n} \}$ ,  $1 - \frac{1}{n} = r_n$  とおけば、  $\Omega_n$  に含まれる  $t_k$  の個数を  $m_n$  とし、  $\partial\Omega_n$  上において

$$z \cdot r_n \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{i} \sum_{k=2}^{m_n} d \log \frac{r_n^2 - t_k z}{r_n(z - t_k)} \right) / (m_n - 1) \geq 0,$$

$$d\Phi_n = \frac{r_n}{z} \frac{1}{i} \sum_{k=2}^{m_n} d \log \frac{r_n^2 - t_k z}{r_n(z - t_k)} / (m_n - 1)$$

とすれば、  $\int_{\partial\Omega_n} |d\Phi_n| = 1$ . 容易に確かめられるように、  $\Omega$  収束性一様性  $d\Phi_n \rightarrow 0$ .

## 文 献

- [1] Bishop, E., Subalgebra of functions on a Riemann surface. Pacific J. Math. 8(1958), 29-50.
- [2] Carathéodory, C., and L. Fejér, Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz. Rend. Circolo Math. Palermo 32(1911), 218-239.
- [3] Duren, P., Theory of  $H^p$  spaces. Academic Press (1970).
- [4] Gamelin, T. W., Extremal problems in arbitrary domains. Michigan Math. J. 20(1972), 3-11.
- [5] \_\_\_\_\_, Extremal problems in arbitrary domains II. Ibid. 21(1974), 297-307.
- [6] Garabedian P. R., Schwarz's lemma and the Szegő kernel function. Trans. Amer. Math. Soc. 67(1949), 1-35.
- [7] Heins, M., Nonpersistence of the Grenzkreis phenomenon for Pick-Nevanlinna interpolation on annuli. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 596(1975), 1-21.
- [8] Hejhal, D. A., Linear extremal problem for analytic functions. Acta Math. 128(1972), 91-122.
- [9] \_\_\_\_\_, Linear extremal problem for analytic functions with interior side conditions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 586(1974), 1-36.
- [10] Jenkins, J. A., and N. Suita, On the Pick-Nevanlinna Problem. Kodai Math. J. 2(1979), 82-102.
- [11] Nevanlinna, R., Ueber beschränkte analytische Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 32(1929), 1-75.

- [12] Royden, H. L., The boundary values of analytic and harmonic functions. Math. Z. 78(1962), 1-24.
- [13] Rudin, W., Analytic functions of class  $H_p$ . Tras. Amer. Math. Soc. 78(1955), 46-66.