

Surface Bundles over S^1 which are 2-fold Branched Coverings of S^3

大阪市大 理 作間 誠

F_g を genus g の closed orientable surface とすると、
 $F_g \times S^1$ ($g \geq 1$) は S^3 の 2-fold branched cover になる
 ことが知られている。(Fox [3], Hirsh-Neumann [5],
 Montesinos [8]) ところが、最近、落合-高橋 [10] は、
 すべての自然数 g に対して、 S^3 の 2-fold branched cover にな
 る S^1 上の F_g -bundle が存在する事を示した。(実際には、
 すべての自然数 g に対して、Heegaard genus が 2 である
 F_g -bundle が構成されている。) 更に、ここでは、Heegaard
 genus が 2 である torus bundle の分類が行われた。
 そこで、ここでは、どのような F_g -bundle が S^3 の 2-fold
 branched covering になるか? という問題について考える。

記号 以下、surface F_g には一つの longitude-meridian

system $\{l_i, m_i (1 \leq i \leq g)\}$ が与えられるとするとする。

F_g 上の homeomorphism ϕ に対して $M_\phi \in F_g \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\phi(x), 1)$

とする。又、 ϕ が誘導する $H_1(F_g)$ 上の isomorphism ϕ_* を

基底 $\{l_i, m_i\}$ に関して表現する行列を A_ϕ で表わす。(i.e.

$$\phi_* \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix} = A_\phi \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix} \text{ で表わされる行列}).$$

$g = 1$ の時、対応 $\phi \mapsto A_\phi$ は、torus の homeotopy group π_0

$GL(2, \mathbb{Z})$ への anti-isomorphism になる。 $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ には

対応して ϕ_A を torus 上の homeomorphism と $A\phi_A = A$ となるもの

とし、又、torus bundle M_{ϕ_A} を M_A で表わす。

§ 1. Homological Condition

M_ϕ を F_g -bundle とすると、 $H_1(M_\phi) \cong \mathbb{Z} \oplus \text{Coker}(\phi_* - 1)$

となる。 $H_1(F_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ であるので、 $\text{Coker}(\phi_* - 1)$ は

$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_g} \oplus \mathbb{Z}_{n_{g+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_{2g}}$ (n_i : non-negative integer,

$n_i | n_{i+1}$) と表わされる。この時、次が成り立つ。

定理 1 もし M_ϕ が S^3 の 2-fold branched cover になるならば、 n_g は 1 または 2 である。逆に $\{n_i\}_{1 \leq i \leq 2g}$ は

$n_i | n_{i+1} (1 \leq i \leq 2g-1)$, $n_g = 1$ or 2 である non-negative integer

の列とすると、 S^3 の 2-fold branched cover になる F_g -bundle

M で $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_{2g}}$ となるものが存在する。

この定理の証明のためには次の補題が必要である。

補題 1 M を S^3 の 2-fold branched cover とする。すると、
 任意の $x, y \in H_2(M; R)$ に対して $2 \operatorname{int}(x, y) = 0$ in $H_1(M; R)$.
 但し R は任意の環で、 int は intersection pairing: $H_2(M; R) \times H_2(M; R) \rightarrow H_1(M; R)$ を表わす。

(証明は [12] 参照)

(定理 1 の前半の証明) η を natural map
 $H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}) \rightarrow \operatorname{Coker}(\phi_* - 1; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g})) \hookrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$
 とする。すると、 $\operatorname{Coker}(\phi_* - 1; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g})) \supset (\mathbb{Z}_{n_g})^{g+1}$ である事より、
 $\operatorname{Ker}(\phi_* - 1; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}))$ の元 z で、 $\eta(z) \in H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$ の位数が
 n_g であるものが存在する事がわかる。 $\phi_*(z) = z \in H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g})$
 であるので、2-chain $z \times [0, 1]$ ($\subset F_g \times [0, 1] / \phi = M_\phi$) は
 自然に $H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$ の元 $\hat{z}$ を決める。今、fiber F_g から作る
 $H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$ の元を $[F_g]$ で表わすと、 $\operatorname{int}(\hat{z}, [F_g]) = \eta(z)$
 $\in H_1(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$ である事がわかる。ところで $\eta(z)$ の位数は
 n_g であるので、 $n_g \neq 1$ の 2 倍は、補題 1 により M_ϕ は
 S^3 の 2-fold branched cover に変わりない。 $\square$

(定理1の後半の証明) 整数の組 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \leq i \leq g}$ に対し $K(\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g)$ を図1で示される S^3 中の link とする。

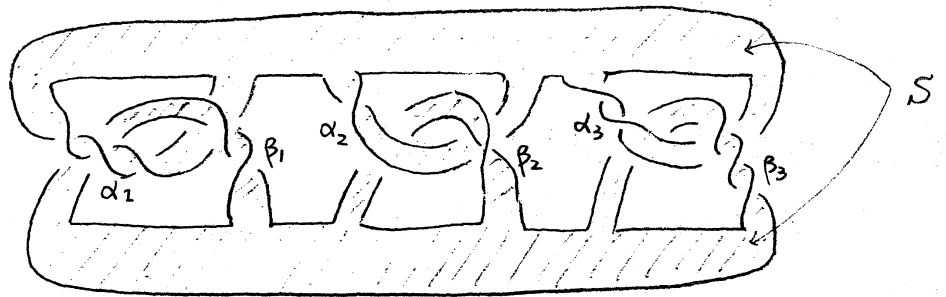


図1 ($K(3, 1, -2; 2, 1, 3)$)

(α_i, β_i は right-hand half twists の数を表わす.)

すると、 $K(\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g)$ の 2-fold branched cover M は F_g -bundle である。

- ① S を図1の斜線部で表わされる $K(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ を張る surface とすると、 M は S^3 を S で切り開いた空間の二つのコピーを張り合わせて得られる。とるから、 S^3 を S で切り開くと $F_g \times I$ になるので、 M は F_g -bundle になる。

更に、その monodromy に対応する matrix A は $\bigoplus_{i=1}^{2g} \begin{pmatrix} -1 & -\alpha_i \\ \beta_i & \alpha_i\beta_i - 1 \end{pmatrix}$

で与えられる事わかる。従って $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \text{Coker}(A - I)$

$\cong \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^g \{ \mathbb{Z}_{g_i} \oplus \mathbb{Z}_{(|\alpha_i\beta_i - 4|/g_i)} \}$ (但し $g_i = \gcd\{2, \alpha_i, \beta_i\}$)

となる。 α_i, β_i を適当に選べば定理1の後半の証明が出来る。□

註 この証明と同様な構成方法により、任意の closed orientable 3-manifold は surface bundle を branched cover に持つ事がわかる。言い換えれば、すべての closed orientable 3-manifold は、surface bundle を involution で割る事によりできる。

§ 2. Torus Bundles

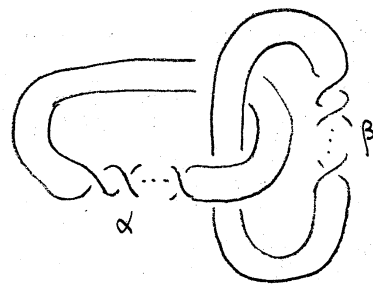
J. L. Tollefson [14] は、 $H_1(M_\Phi; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ なる surface bundle M_Φ 上の involution は fiber preserving である事を示した。この結果は、もう少し一般的な条件の下で成り立つ事がわかる。特に、 M_Φ 上の involution α に対して、 $M_\Phi/\alpha \cong S^3$ なら、 α は fiber preserving である事がわかる。これより、次の事がわかる。

定理 2 S^3 内の link で torus bundle を 2-fold branched cover に持つものは、 $K(\alpha; \beta)$ に限る。

特に、 S^3 の 2-fold branched cover になる torus bundle は $M_{\alpha, \beta}$ に限る。

但し $M_{\alpha, \beta}$ は $A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ \beta & \alpha\beta - 1 \end{pmatrix}$ を

monodromy に持つ torus bundle を表わす。



$K(\alpha; \beta)$

$K(\alpha; \beta)$ については次の事が成り立つ。

- $K(\alpha; \beta) \cong K(\alpha'; \beta') \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = \pm(\alpha', \beta')$ or $\pm(\beta', \alpha')$
 - $K(\alpha; \beta)$ の bridge index が 3 以下 $\Leftrightarrow \alpha$ or $\beta = \pm 1$
- 従って、Birman-Hilden [1] を使って次を得る。

系 (Theorem 3 of Ochiai-Takahashi [10])

Orientable torus bundle で Heegaard genus が 2 になるのは $M_{1, \beta}$ ($\beta \in \mathbb{Z}$) に限る。しかも $M_{1, \beta}$ の genus 2 の Heegaard splitting は一意である。

註 $M_{1, \beta}$ は [10] で定義されている $M(\beta-2, -1)$ に同相である。又、[10] では、non-orientable torus bundle についても調べている。

§3. Invariants of Torus Bundles

前セクションで、 S^3 の 2-fold branched cover になる torus bundle をすべて挙げたが、このセクションでは、 $\{M_{\alpha, \beta}\}$ の同相問題を調べる。又、与えられた $SL(2, \mathbb{Z})$ の元 A に対して、 MA が S^3 の 2-fold branched cover になるかどうかの判定方法を与える。このためには、次の補題が必要である。

補題 2. $A, A' \in GL(2, \mathbb{Z})$ とする。この時、 M_A が $M_{A'}$ に同相であるための必要十分条件は、 A が A' または A'^{-1} に $(GL(2, \mathbb{Z}))$ の中で conjugate である事である。

補題 3 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ とすると次が成り立つ

- (1) $\text{Tr } A = 2\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) ならば、唯一つの non-negative integer n が存在し、 A は $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ n & \varepsilon \end{pmatrix}$ に conjugate である。
- (2) $\text{Tr } A = -1$ (resp. $0, 1$) とすると、 A は $A_{1,1}$ (resp. $A_{1,2}, A_{1,3}$) に conjugate である。
- (3) $|\text{Tr } A| \geq 3$ の時。 $\theta(A) = \{(a-d) + \sqrt{D_A}\} / 2c$ (但し $D_A = (a-d)^2 + 4bc = (\text{Tr } A)^2 - 4$) は二次の無理数になり、 A の $GL(2, \mathbb{Z})$ での conjugate class は、 $\theta(A)$ の連分数展開の純循環部分 (但し up to cyclic permutation) で決まる。 ([4] 参照)

補題 4 $A_{\alpha, \beta}$ について次が成り立つ。

- (1) $A_{\alpha, \beta}, A_{-\alpha, -\beta}, A_{\beta, \alpha}, A_{-\beta, -\alpha}$ は互いに conjugate である。
(よって以下 $1 \leq \alpha \leq |\beta|$ とは $0 = \alpha \leq \beta$ としてよい。)
- (2) $A_{\alpha, \beta}$ は $A_{\alpha, \beta}^{-1}$ に conjugate である。
- (3) $\text{Tr } A_{\alpha, \beta} = -2 \Leftrightarrow \alpha = 0$ 。
- (4) $\text{Tr } A_{\alpha, \beta} = 2 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 4) \text{ or } (2, 2)$ 。
よって $A_{1,4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{2,2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。

$$(5) \operatorname{Tr} A_{\alpha, \beta} = -1 \quad (\text{resp. } 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 1) \quad (\text{resp. } (1, 2), (1, 3))$$

(6) $|\operatorname{Tr} A_{\alpha, \beta}| \geq 3$ の時. $\theta(A_{\alpha, \beta})$ の連分収展開の純循環部分は次で与えられる.

$$[\dot{\alpha}, |\dot{\beta}|] \quad \text{if } \beta < 0$$

$$[\dot{1}, (\dot{\beta}-4)] \quad \text{if } \alpha = 1, \beta \geq 5$$

$$[\dot{2}, (\dot{\beta}-2)] \quad \text{if } \alpha = 2, \beta \geq 3$$

$$[\dot{1}, (\alpha-2), 1, (\dot{\beta}-2)] \quad \text{if } \alpha \geq 3, \beta \geq 3.$$

(補題の証明は [12] 参照)

以上により、 λ を得る事が出来る。

定理 3 (Branch line の一意性)

$M_{1,6}$ は $M_{2,3}$ に同相である。しかし、この例外を除いて、 $M_{\alpha, \beta}$ の位相型は $K(\alpha; \beta)$ の link type で一意に決まる。

定理 4 (判定方法)

$A \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$ とする。 M_A が S^3 の 2-fold branched cover になるためには、 λ の (1)~(3) の 1 つれかが成り立つ事が、必要十分である。

$$(1) \quad -2 \leq \operatorname{Tr} A \leq 1.$$

(2) $\text{Tr } A = 2$ のとき $\text{Coker}(A-I) \cong \mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$,

(3) $|\text{Tr } A| \geq 3$ の時。 $\alpha\beta = \text{Tr}(A) + 2$ とする整数で、
 $\theta(A)$ の純循環部分 $\theta(A, \beta)$ のそれに (up to cyclic permutation で) 一致するものがある。

例 1 $H_1(M_A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n \quad (0 \leq n \leq 11, \text{ or } n=14, 16, 19)$
 $\quad \quad \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \quad (0 \leq n \leq 4)$

$\Rightarrow M_A$ は S^3 の 2-fold branched cover.

例 2 $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$ とすると $H_1(M_A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ となり

定理 1 で与えられた必要条件を満たす。しかし $\text{Tr } A = -10$,
 $\theta(A) = \sqrt{96}/6 = [1, 1, 1, 1, 2]$ となり、定理 4 の条件 (3)
 を満たさない。よって M_A は S^3 の 2-fold branched cover に
 ならない。

例 3 $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(M; \mathbb{Q}) \cong 2$ の時。 M が S^3 の 2-fold
 branched cover になるための必要十分条件は、 $H_1(M) \cong$
 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 又は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ となる事である。

§4. Abelian Coverings and Regular Coverings.

Torus bundle について、 S^3 の regular covering になるかどうかも判定できる。但しここでは、多様体 M が S^3 の regular cover になるとは、 M 上の finite group action G があつ、 $M/G \cong S^3$ となる事とする。(G の singular orbit は manifold になるとは限らない。)

定理 5 Torus bundle M_A に対して次は同値。

- (1) M_A は S^3 の regular cover になる。
- (2) M_A は S^3 の $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ cover になる。
- (3) (イ) $|\text{Tr} A| \leq 2$ 又は (ロ) $|\text{Tr} A| \geq 3$ の時、 $\theta(A)$ の純循環部分を $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ とすると、ある奇数 k が存在して $(\alpha_n, \dots, \alpha_1) = (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ となる。

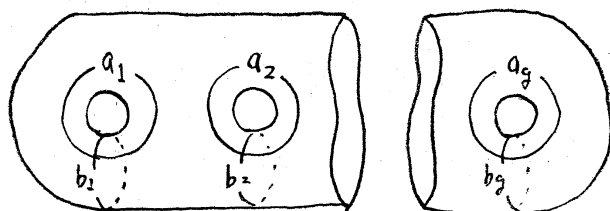
例 4 例 2 の torus bundle は S^3 の $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -cover になる。

例 5 $A_k = \begin{pmatrix} 3k+4 & 3k+1 \\ 2k+3 & 2k+1 \end{pmatrix} \quad (k \geq 3)$ とすると

$\theta(A_k) = [i, 2, k, i]$ 。よって $M_{A_k} \quad (k \geq 3)$ は S^3 の regular cover になる。

Addendum 1

$\{a_i, b_i \mid (1 \leq i \leq g)\}$ を下図で示される F_g -上の simple closed curves とする。



$\pm(a_i)$ (resp. $\pm(b_i)$) で a_i (resp. b_i) に沿った Dehn twist を表わす。今、 $g \geq 3$ とし、 $\{n_1, \dots, n_g\}$ を互いに相異なる自然数の組で $n_i \geq 3$ ($1 \leq i \leq g$) なるものとする。

$\Phi = \prod_{i=1}^{2g} \pm(a_i) \cdot \pm(b_i)^{-n_i+1}$ を F_g -上の homeomorphism とする。

Raymond - Tollefson [11] は、対応する F_g -bundle M_Φ は non-trivial periodic map を持たないことを主張した。しかし、これは誤りである。実際、 M_Φ は S^1 で定義した link $K(n_1+3, \dots, n_g+3; 1, \dots, 1) \subset S^3$ の 2-fold branched cover になり、従って non-trivial involution を持つ事がわかる。

しかし、誤りの原因は、簡単な計算ミスにあり、

Raymond - Tollefson の idea (元々、Conner - Raymond に依る idea) は有効である。例えば、 $\{k_1, \dots, k_g\}$ を互いに相異なり、 $k_i \geq 3$ ($1 \leq i \leq g$) である自然数の組とし、

$\bar{\psi}' = \prod_{i=1}^3 t(a_i) \cdot t(b_i)^{-k_i} \cdot t(a_i)^2 \cdot t(b_i)^{-1}$ とすると、 $M_{\bar{\psi}}$ は non-trivial periodic map を持たない可能性がある。実際、この $M_{\bar{\psi}'}$ については、[11] の議論の前半は成立する。 $(M_{\bar{\psi}}$ については成り立たない。) もし、次が証明できれば、 $M_{\bar{\psi}'}$ は non-trivial map を持たない事がわかる。

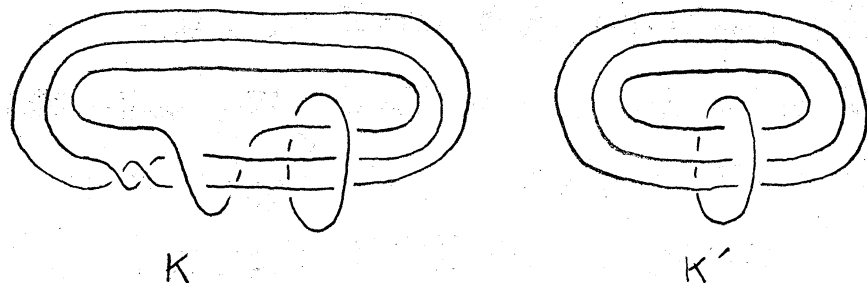
★ 任意の F_g 上の involution α に対して、 $\bar{\psi}'$ は $\alpha \bar{\psi}' \alpha^{-1}$ に homotopic でない。(α は 2-fold branched cover $F_g \rightarrow S^2$ に対応する involution とする。)

Addendum 2

ここにこの問題に解答を与える。(Problem 25 of "Knot Theory" Lect. Notes in Math. 685, Springer 1978, p311)

問題 S^3 内の 2 つの link ψ , 補空間は同相であるか、2-fold branched cover の 1次元 Betti 数か異なるものがあるか。

下図で示される二つの link K, K' を考える。



すると、 K と K' の補空間は同相である。 K は §1 で定義した link $K(2; 2)$ と同じであり、従って K の 2-fold branched cover は Betti-number が 2 である torus bundle になる。一方、 K' は $(2, 2)$ -torus link  の 3 つの sum であるので、 K' の 2-fold branched cover は $\# \mathbb{RP}^3$ となり、従って Betti-number は 0 である。

更に次が成り立つ事がわかる。

- (1) 2-components link の 2-fold branched cover の Betti-number は link complement で決まる。
- (2) components の数が 3 以上の時は、上は成り立たない。
- (3) $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ (μ -components link) に対して、 $d = \text{g.c.d.} \{ \text{lk}(K_i, K_j) \mid 1 \leq i < j \leq \mu \}$ は link complement で決まる。更に、 $d \equiv 0 \pmod{2}$ ならば、2-fold branched cover の 1次元 Betti-number は link-complement で決まる。
- (4) μ -components link L の 2-fold branched cover $\Sigma_2(L)$ に対して $\dim_{\mathbb{Z}_2} H(\Sigma_2(L), \mathbb{Z}_2) = \mu - 1$ となる。従って link の 2-fold branched cover の 1次元 $\mathbb{Z}_2$ -Betti number は components の数で決まる。

参 考 文 献

- [1] J.S. Birman - H.M. Hilden: Heegaard splittings of branched coverings of S^3 , Trans. A.M.S. 213 (1975) 313-352.
- [2] Gr. Bredon: Introduction to compact transformation groups, 1972, Academic Press.
- [3] R. H. Fox: A note on branched cyclic coverings of spheres, Rev. mat. Hisp.-Amer., 32 (1972), 158-166.
- [4] G. H. Hardy - F. M. Wright: An introduction to the theory of numbers, 1964, Oxford: Clarendon.
- [5] U. Hirsh - W. D. Neumann: On cyclic branched coverings of spheres, Math. Ann., 215 (1975), 289-291
- [6] Y. Kikuchi: On Heegaard splittings of torus bundles, Master thesis, Tokyo Institute of Technology, 1980.
- [7] C. G. Latimer - C. C. MacDuffee: A correspondence between classes of ideals and classes of matrices, Ann. of Math., 34 (1933), 313-316
- [8] J. M. Montesinos: 3-varietés qui ne sont pas des revêtements cycliques ramifiés sur S^3 , Bull. A.M.S., 80 (1974) 845-846.
- [9] D. A. Neumann: 3-manifolds fibering over S^1 , Proc. A.M.S., 58 (1976), 353-356.

- [10] M. Ochiai - M. Takahashi: Heegaard diagrams of torus bundles over S^1 , preprint.
- [11] F. Raymond - J. L. Tollofson: Closed 3-manifolds with no periodic maps, Trans. A. M. S. 221 (1976) 403-418.
- [12] M. Sakuma: Surface bundles over S^1 which are 2-fold branched cyclic coverings of S^3 , Math. Semi. Notes Kove Univ., 9 (1981) 159-180.
- [13] O. Tausky: On a theorem of Laitner and MacDuffee, Can. J. Math., 1 (1949), 300-302.
- [14] J. L. Tollofson: Periodic homeomorphisms of 3-manifolds fibered over S^1 , Trans. A. M. S., 223 (1976), 223-234.