

複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の直線族から得られる正規軌道曲面の
Einstein-Kähler 計量の存在について.

九代・理 加藤十吉 (Mitsuyoshi Kato)

非特異

X を $\wedge$ compact 複素曲面, $D = \bigcup_i D_i$ を X の複素曲線で, 各 D_i は非特異であり, D の特異点は正規交叉点重点からなり, $D_i \cap D_j$ ($i \neq j$) は高々 1 点からなるとする.

このとき, 各 D_i に自然数 b_i (≥ 2) を指定し,

$$(X, (D, b) \equiv \bigcup (D_i, b_i))$$

のことを正規軌道曲面という. D の特異点の全体を ΣD とする. 非特異複素曲面 M と M の自己複素同型群 G で M に真性不連続に作用するものが存在し, G による M の商空間が X と複素同型で, $p: M \rightarrow X$ をその商写像 (正規分岐被覆) とするとき, M の各点 x で, G の isotropy 群 $G_x = \{g \in G / g(x) = x\}$ の位数が $p(x) \in X - D$ のとき, 1 (G_x が自明),

$$p(x) \in D_i - \Sigma D \text{ のとき, } b_i \quad (G_x \cong \mathbb{Z}_{b_i}),$$

$$p(x) \in D_i \cap D_j \text{ (} i \neq j \text{) のとき, } b_i b_j \quad (G_x \cong \mathbb{Z}_{b_i} \times \mathbb{Z}_{b_j})$$

となるとき, (G, M) を $(X, (D, b))$ の $\wedge$ 意化という.

M が compact (したがって, G が有限) のとき,

(G, M) を $(X, (D, b))$ の有限一意化という。

M が単連結であるとき, (G, M) は $(X, (D, b))$ の普遍一意化と呼ばれ, 一意化を被覆 (非分岐) する最大の一意化という普遍性をもつ。($[Ka_1]$)

問題

1. $(X, (D, b))$ はいかなる条件のもとに一意化, 有限一意化をもつか?
2. $(X, (D, b))$ の普遍一意化の幾何学を行え!

compact 非特異複素曲面 M にはその標準因子 $K(M)$ に関する $K(M)$ -次元としての小平次元 $\kappa(M)$ (例えば, $[I]$), 宮岡と Yau の仕事で注目される特性数 $\varepsilon(M) = 3c_2(M) - \{c_1(M)\}^2 = e(M) - 3\text{sign}(M)$ が考えられる。($e(M) = \chi(M)$)

$\kappa(M)$ は双有理型不変量で, $\varepsilon(M)$ はホモトピー不変量である。 M が $\underbrace{(-1) \text{ curve}}_{(-2) \text{ curve}}$ を含まないと仮定すると

$\kappa(M) = 2$, つまり, M が一般型であれば, M には Einstein-Kähler 計量で, Ricci 曲率が負のものが存在し, $\varepsilon(M) \geq 0$ が成立する。しかも, $\varepsilon(M) = 0$ となることが M の普遍被覆が $\mathbb{C}^2$ の単位球体となるための必要十分条件である。

正規軌直曲面 $(X, (D, b))$ を (X, b) と表し,

$$c_2(X, b) = e(X, b) = e(X) + \sum_i \left(\frac{1}{b_i} - 1 \right) (e(D_i) - d_i) \\ + \sum_d \left(\frac{1}{b_i b_j} - 1 \right)$$

(但し, $d_i = \#(D_i \cap \Sigma D)$, $\sum_d$ は ΣD の各 $D_i \cap D_j$ に対する和を表す.),

$$K(X, b) = K(X) + \sum_i \left(1 - \frac{1}{b_i} \right) D_i$$

$$\varepsilon(X, b) = 3c_2(X, b) - K(X, b)^2$$

$$e^b(D_i) = e(D_i) + \sum_{d_i} \left(\frac{1}{b_j} - 1 \right), \quad \text{但し, } \sum_{d_i} \text{ は } D_i \cap \Sigma D \text{ の各 } D_i \cap D_j \text{ に対する和,}$$

$$\varepsilon_x^b(D_i) = \frac{2D_i^2}{b_i} - e^b(D_i),$$

$$\varepsilon_x(D_i) = 2D_i^2 - e(D_i)$$

と定義する。

(Hirzebruch - Höfer) :

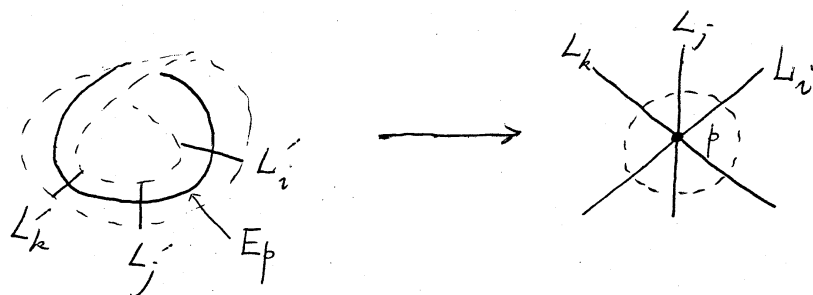
$$\varepsilon(X, b) = \varepsilon(X) + \frac{1}{2} \sum_i \left(1 - \frac{1}{b_i} \right) (\varepsilon_x(D_i) + \varepsilon_x^b(D_i))$$

が成立する。

(X, b) が有限-変換 (G, M) をもつとき,

X の $K(X, b)$ 次元として定義される小平次元 $\kappa(X, b)$ と M の小平次元は一致し, しかも, $\varepsilon(M)$ は $\varepsilon(X, b)$ の自然数倍となるように定義してある。

$\mathbb{CP}^2$ の直線族 $L = \bigcup_i L_i$ を考える。 L の特異点は $m (\geq 2)$ 重点からなる。 $m \geq 3$ なる特異点を特異多重点という。 $\mathbb{CP}^2$ をすべての特異多重点で *blowing-up* したものを X , L_i の proper transform を L'_i , 特異多重点 p に対する exceptional curve を E_p とする。 p での局所図は次の様である。



p での blowing-up

$D = \left(\bigcup_i L'_i \right) \cup \left(\bigcup_p E_p \right)$, 但し, $\bigcup_p$ は特異多重点 p に関する和集合をとることを表す, とおく。

各 L'_i 上に任意の自然数 $b_i (\geq 2)$ を指定する。

各 E_p 上に, p を含み, p 以外に特異多重点を含む直線 L_{i_k} ($k=1, \dots, r_p$) に対応する $b_{i_1}, \dots, b_{i_{r_p}}$ の最小公倍数 $b_p = [b_{i_1}, \dots, b_{i_{r_p}}]$ を指定する。

このとき, $(X, (D, b))$ は正規軌道曲面をなしている。

次の結果が成立する。

定理.

(I) 各 L_i 上に特異多重点が存在すれば, (X, b) は有限-急化をもつ. ($[K_2]$)

(II) 各 L_i 上に2個以上の特異多重点が存在し, ある L_k に対し, $e^b(L_k) \leq 0$ であれば,

$$\pi(X, b) = 2$$

が成立する。しかも, $e^b(E_\rho) > 0$ なる特異多重点 ρ に対応する E_ρ の (X, b) の有限-急化への lift は -2 or -1 curve で, これらをすべて1点につぶした variety k は, (-2 curve をつぶした) と 3 のみで特異点をもつ Einstein-Kähler metric が存在する。しかも,

$$\varepsilon(X, b) \geq \sum_{\rho} \frac{1}{b_{\rho}}$$

, 但し, $\sum_{\rho}$ は $e^b(E_{\rho}) > 0$ なる特異多重点 ρ に関する和, が成立する。

(III) L_i 上の特異多重点の個数を σ_i とすると,

$$\varepsilon_x^b(L_i) = \frac{2(1-\sigma_i)}{b_i} - e^b(L_i), \quad \varepsilon_x^b(E_p) = -\frac{2}{b_p} - e^b(E_p),$$

$$\varepsilon(X, b) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \left(1 - \frac{1}{b_i}\right) \varepsilon_x^b(L_i) - \sum_p \left(1 + \frac{1}{b_p}\right) \varepsilon_x^b(E_p) \right\}$$

が成立する。さらに, (II) の条件下で, (X, b) の普遍-急化の空間が $\mathbb{C}^2$ の単位球体であるための必要十分条件は,

$$\varepsilon_x^b(L_i) = \varepsilon_x^b(E_p) = 0 \quad (\forall i, \forall p)$$

となることである。とくに, $e^b(E_{\rho}) > 0$ なる ρ は存在しない。

(N) $e^b(E_t) = 0$ をみたすいくつかの特異多重点 $t = t_1, \dots, t_m$ について, open 曲面 $X' = X - \bigcup_{i=1}^m E_{t_i}$ を考える。このとき, $b_{t_i} = \infty$ とし, $\frac{1}{b_{t_i}} = 0$ と解釈し, 上の記法を拡張する。このとき, 条件(II) 及び

$$\varepsilon_X^b(L'_i) = \varepsilon_X^b(E_p) = 0 \quad (\forall i, \forall p)$$

が成立すれば, (X', b) の 普遍一変化空間は $\mathbb{C}^2$ の開単位球体である。($b_{t_i} = \infty$ とは, X' の E_{t_i} に対応する end で ∞ 巡回被覆となる $(X', b|_{X'})$ の一変化と理解する)。(III) は Hirzebruch-Höfer による。)

参考文献

[I] 飯高 茂, 代数幾何学 III, 岩波書店基礎数学講座

[Ka1] M. Kato, *On uniformizations of orbifolds (preprints)*.

[Ka2] M. Kato, *On the existence of finite principal uniformizations of $\mathbb{CP}^2$ along weighted line configurations*, *Memoires of Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A* vol 38 (1984), 127-131.

[Ko] R. Kobayashi, *Einstein-Kähler metrics on open algebraic surfaces of general type*, (to appear).