

多孔質媒体中の 2 流体問題の数値計算

福岡教育大学 中木 達幸(Tatsuyuki Nakaki)

1. はじめに

多孔質媒体(porous medium)とは、地中、スポンジ、吸取紙のように、非常に小さな穴が数多くあいている媒体のことである。その穴の中を流れる流体の解析は、流域が非常に複雑な形状をしているため、通常使用されている手法では困難である。そのため、すべての物理量を空間的に平均化し、それについてのモデル化により解析を行なっている。

本稿では、[5]に引き続き、地中にある石油を、外部から水を注入することにより、回収する問題(Oil reservoir problem)を扱う。その際に、水の挙動が、空間的に不安定である現象が知られている（下図参照）。

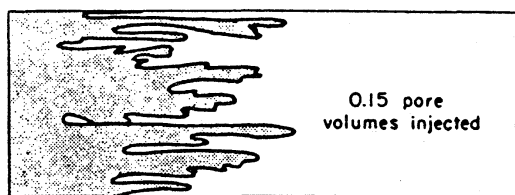


図 1 fingering instability[8]

FIGURE 38 Displacement front for a mobility ratio of 20, showing the development of fingers (after Terry et al. 1958).

上図の左側から水を一様に注入し、右側で石油を回収している。上側と下側は反射壁である。灰色の部分は水が浸透した部分を示し、白色の部分はそうでない部分を表す。それらの間に、自由境界が現われるが、その形状は、一様に水を注入しているにもかかわらず、直線的にならないで、非常に複雑な形になる。それが、あたかも『指』のようであるため、この現象を'fingering instability'と呼んでいる。

本稿では、この問題のモデル方程式に対するいくつかの数値計算の結果を記す。計算は 2 次元領域で行なったが、fingering instability は、1 次元的な解（縦方向には一様な解）が不安定化を起こしたものと考えられるので、1 次元計算も行なった。

2. モデル方程式

すべての物理量は空間的に平均化をするため、互いに混じり合わない石油と水は、媒体中のある点 x における、平均化を行なう近傍内では、共存し得る。時刻 t における、その近傍内の水の割合(saturation)を $S(x,t)$ と書くことにする。媒体が一様で、その中に石油と水以外の流体がなく、外力が働かないという条件の下で、適当に変数変換をすると、次の関係式が成立することが知られている[1].

$$(1) \quad S_t + \nabla \cdot [\vec{v} f] + \nabla \cdot \left[f \frac{k_o}{\mu} \nabla p_c \right] = 0$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$(3) \quad \vec{v} = -\left[\lambda \nabla p + \frac{k_o}{\mu} \nabla p_c \right]$$

ここで、 $\vec{v} = \vec{v}(x,t)$ は石油と水の速度の和、 $p = p(x,t)$ は水の圧力であり、これらと $S(x,t)$ が未知量である。 μ は石油と水の粘性係数の比で、10～20 程度の正定数である。 $f = f(S)$ と $\lambda = \lambda(S)$ は浸透度(permeability)と呼ばれる既知量 $k_w = k_w(S)$, $k_o = k_o(S)$ を使って、 $\lambda = k_w + k_o/\mu$, $f = k_w/\lambda$ と表される。[4]等の文献に従い、 $k_w = S^2$, $k_o = (1-S)^2$ とする。また、 $p_c = p_c(S)$ は石油と水の間の界面張力(capillary pressure)を表す量で、ここでは、簡単のため、非負定数 ε を使って、 $p_c = \varepsilon(1-S)$ とおいた。なお、浸透度と界面張力の特性は[3]等を参照されたし。

(1)(2)は本質的に保存則を表し、(3)はDarcy則と呼ばれる実験法則を記述している。なお、(1)(3)において石油と水の圧力の釣り合いを示す法則も使っている。

$\varepsilon = 0$ のとき、(1)-(3) は Buckley-Leverett 方程式と呼ばれ、多くの研究者により解析されている（例えば、[2] [4] [9]等）。それらの結果により、 $\mu > 3$ のとき、空間2次元での解の自由境界 ($S = 0$ と $S > 0$ の境界) は fingering instability を起こすことが示唆されている。本稿では、 $\varepsilon > 0$ を含めたときの自由境界の挙動を、次の2つの条件の下で考察する。

問題 1 2次元有界領域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ において, (1)-(3)を満足する解を境界条件

$$(4) \quad S = 1, \quad p = p^* \quad \text{on } x = 0, \quad p = 0 \quad \text{on } x = 1$$

$$(5) \quad \frac{\partial S}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } y = 0, y = 1$$

の下で求めよ. ただし, p^* は定数とする.

これは, [8] における実験 (図1) のモデル化で, (4)は $x = 0$ において水を圧力 p^* で一様に注入し, $x = 1$ で流体(石油)を回収することを表す. (5)は反射壁の条件である.

この問題では, fingering instability が生じたとき, 『指』の先端が $x = 1$ に達すると, 不安定性がそこで止ることが考えられる. そのため, x 方向が半無限区間になるように, 次の問題も考察する.

問題 2 2次元領域 $\Omega=(0,\infty)\times(0,1)$ において, (1)-(3)を満足する解を境界条件(5) および

$$(6) \quad S = 1, \quad \nabla p = (-p^*, 0) \quad \text{on } x = 0$$

の下で求めよ. ただし, p^* は定数とする.

これは, $x = 0$ において水を一定の圧力勾配 p^* で注入することを表す. 境界条件の設定の仕方は他にも考えられると思われるが, ここでは, (6)を採用した.

3. 1次元問題の解析

問題1と問題2の1次元問題 (y 方向が一様な解を求める問題) について考察する. このとき, (2)から v は x に依存せず t のみの関数になることが分かる. これより, (1)-(3) は次の2つの式に書き換えられる.

$$(7) \quad S_t + v f(S)_x - (\epsilon d(S) S_x)_x = 0$$

$$(8) \quad v = -[\lambda(S) p_x - \epsilon \frac{(1-S)^2}{\mu} S_x]$$

未知関数は, $S = S(x, t)$, $v = v(t)$, $p = p(x, t)$ であり, (7) に現われる関数 $d(S)$ は,

$$(9) \quad d(S) = \frac{S^2(1-S)^2}{\mu S^2 + (1-S)^2}$$

で定義されるものである. なお, 関数 $f(S)$, $\lambda(S)$ は,

$$(10) \quad f(S) = \frac{S^2}{\lambda(S)}, \quad \lambda(S) = S^2 + \frac{(1-S)^2}{\mu}$$

により定められている.

まず, $\epsilon = 0$ のときを考察する. このとき, (7) は移流方程式になり, 移流の速度は $v f'(S)$ である. f' は,

$$f'(0) = f'(1) = 0, \quad f'(S) > 0 \quad (0 < S < 1)$$

という性質を満たすので, 移流の速度は, $S = 0$ と $S = 1$ 付近で遅く, $S = 1/2$ 付近で速くなる. そのため, S の形は shock wave と rarefaction wave からなり, 自由境界の位置は shock wave のそれで表現できる (下図参照).

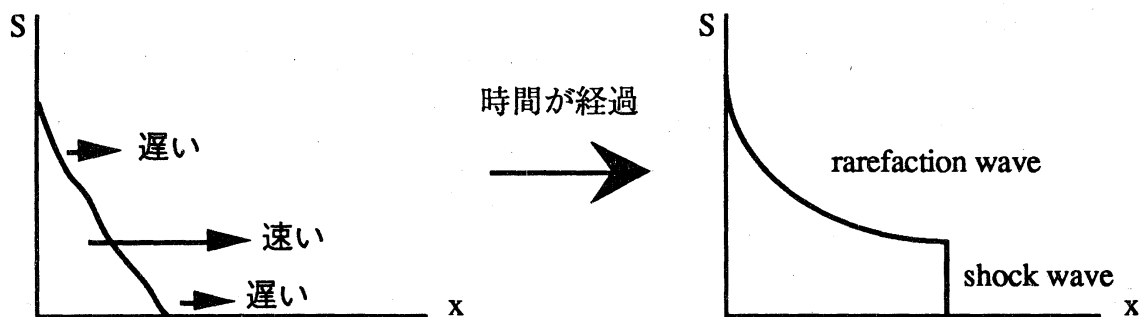


図2 $\epsilon = 0$ のときの S の時間変化

未知量 v の決定は境界条件と(8)により行う. なお, この決定は, $\epsilon > 0$ のときも同様なので, $\epsilon \geq 0$ として行う.

問題2の場合、ただちに、

$$(11) \quad v = \lambda(1) p^*$$

であることが分かる。すなわち、 v は時刻 t にも依存しない定数である。

問題1では、(8)の両辺を λ で割り、 x で積分することにより、

$$(12) \quad v = (p^* - c\varepsilon) \left[\int_0^1 \frac{dx}{\lambda(S)} \right]^{-1}, \quad c = \frac{1}{\mu} \int_{S(1,t)}^1 \frac{(1-\sigma)^2}{\lambda(\sigma)} d\sigma$$

を得る。従って、 v の値は S により決まり、時刻とともに変化し得る。

$\varepsilon=0$ のときは、 v の時間変化はすでに解析されていて、 μ が小さい(概ね3以下)とき、 v は t に関する単調減少関数で、 μ が大きい(概ね3以上)ときは単調増加する。 $\mu=10\sim 20$ であるから、 v 、および、自由境界の速度は、時間とともに速くなることが分かる。

次に、 $\varepsilon > 0$ のときを考察する。(7)は拡散移流方程式になり、拡散係数 $\varepsilon d(S)$ は $S=0$ と $S=1$ で退化するので、 $\text{supp } S(\cdot, t)$ の有限伝搬性が期待できる。すなわち、自由境界が動く速度は有限であると思われる。 S の形状や自由境界の時間変化を見るために、数値実験を行った。それは、explicitタイプの差分法を用い、移流項に対してはEngquist-Osher型の上流差分を、拡散項は中心差分を使い、(12)の積分項には台形公式を適用した。 $\mu=20$, $p^*=1$ として、問題1と問題2のそれぞれについて、 ε の値を、0, 1, 100とした計算結果を、図3と図4に記す。なお、刻み幅 Δx の値は $1/2000$ ($\varepsilon=0$), $1/500$ ($\varepsilon=1, 100$)とし、初期値は恒等的に0である関数(ただし、 $x=0$ では1)とした。

注意 (11) または (12) を (7) に代入して ε で割った式より、時刻 t のスケールを無視すると、『 ε を変化させて p^* を固定すること』と『 ε を固定して p^* を変化されること』は同じことである。従って、界面張力の大きさを表す ε を(正の範囲で)動かすことは、境界で与える水の圧力(勾配)を変えることと同じであり、現象と遊離したことではない。

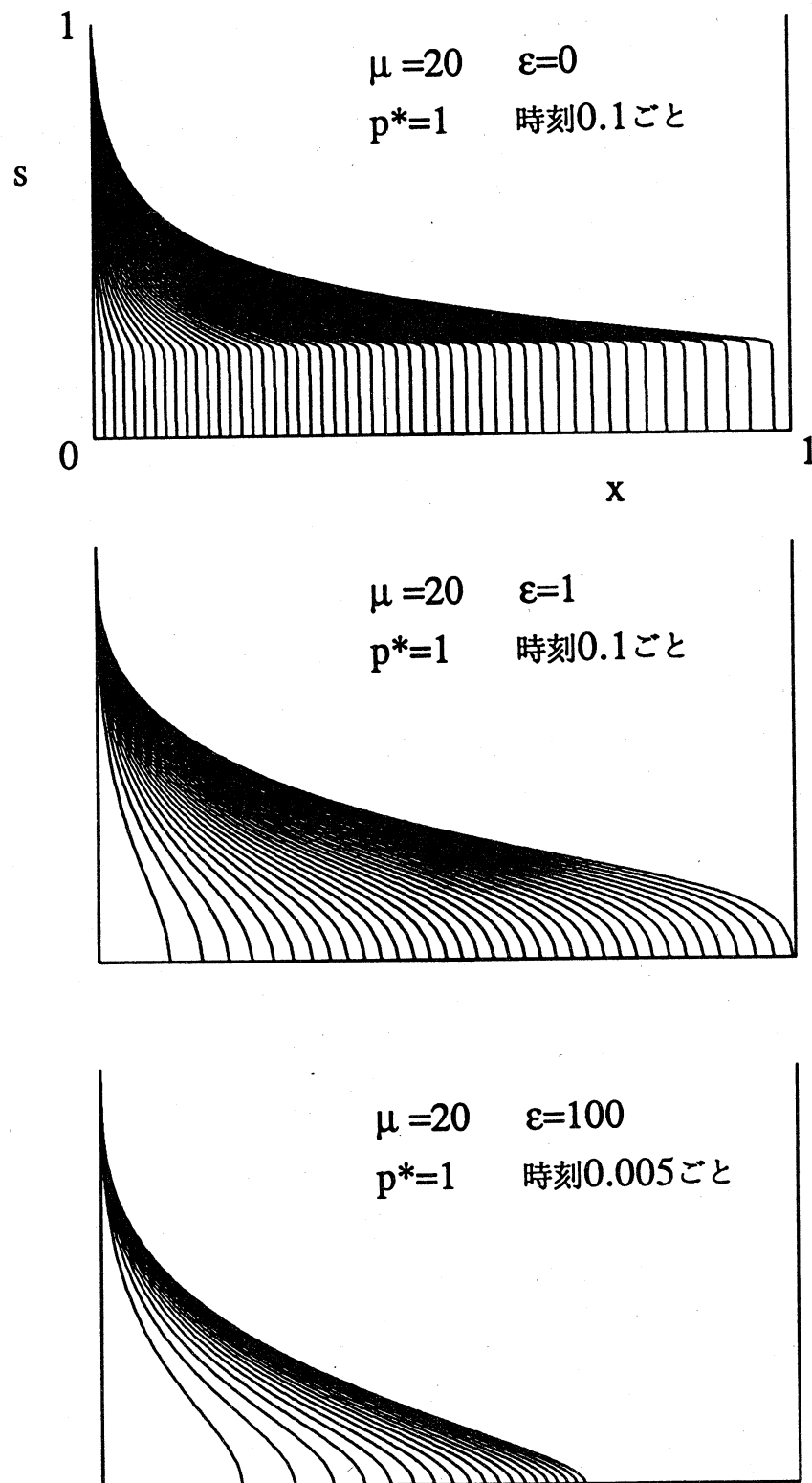


図3 1次元解の挙動 (問題1)

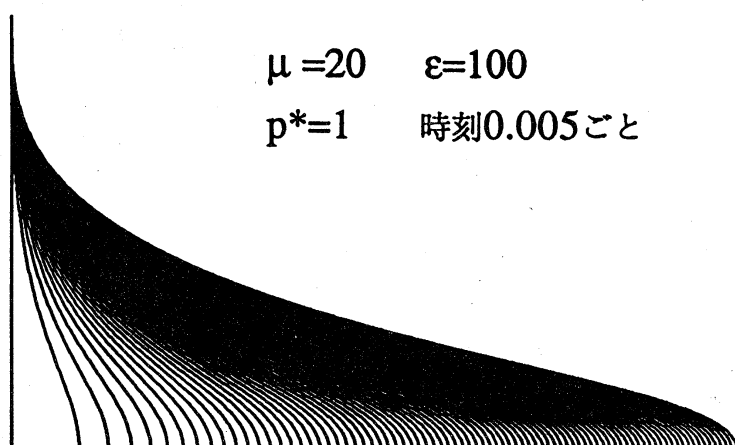
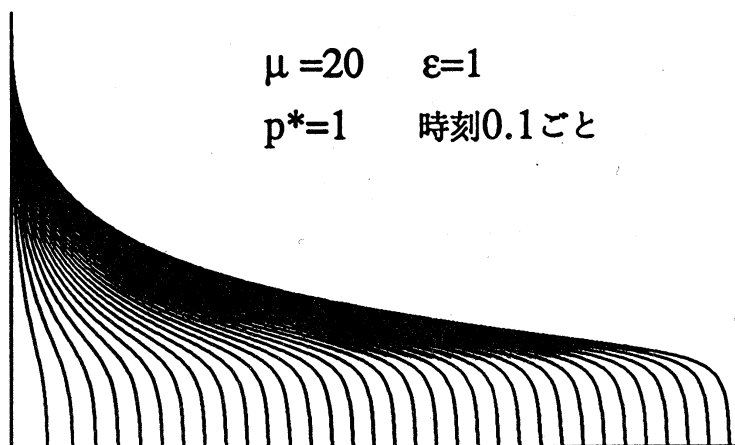
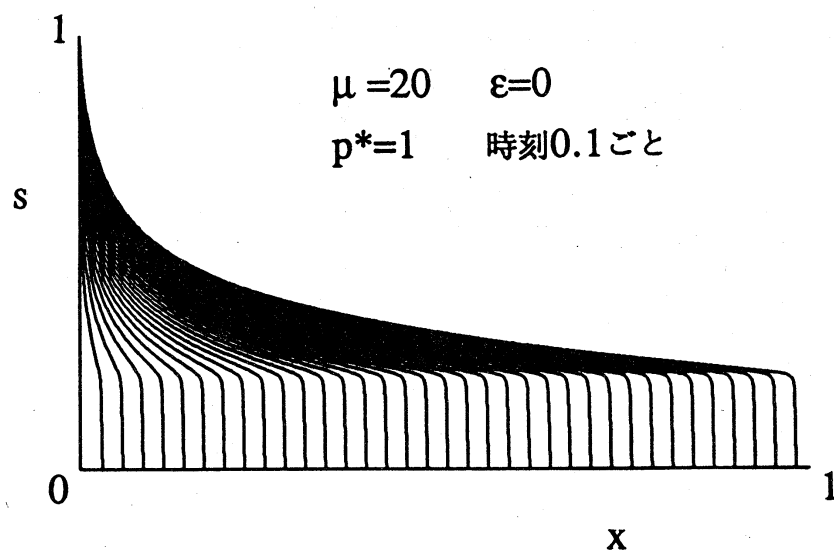


図4 1次元解の挙動 (問題2)

これらの計算結果を見ると次のことが分かる。

問題1に関して、 $\varepsilon = 0$ のときは、既に述べたように、自由境界の速度は時間とともに増加しているが、 $\varepsilon = 1$ ではほぼ等速で、 $\varepsilon = 100$ では減少に転じている。最後の場合、自由境界が $x = 1$ まで達せずに途中で止まるようにも見える。途中で止まれば、定常解が存在することになる。これに関して、次の結果がある。

定理 [6] $\varepsilon > 0$ のとき、方程式 (12) と

$$v f(S)' - \varepsilon (d(S)S')' = 0$$

を満足し、境界条件

$$S(0) = 1, \quad S(1) = 0$$

を満たす解 $S(x)$, v が存在するための必要十分条件は $p^* \leq 0$ である。

自由境界が $0 < x < 1$ にあるような定常解は、 $p^* > 0$, すなわち、水を注入している限り、存在しないことになる。従って、自由境界は、 $x = 1$ まで達するものと思われる。なお、 $p^* \leq 0$ のときの定常解は、現在までの数値実験で見える限り、安定であると思われる（下図参照）。

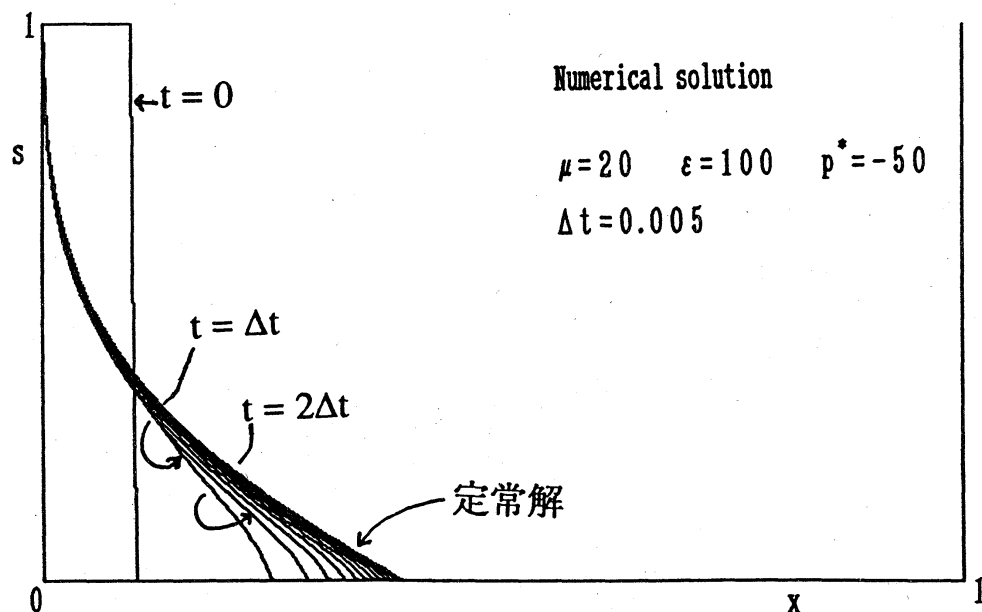


図5 $p^* = -50$ のときの定常解と初期値問題の解の変化

問題2について、 $\varepsilon=0$ のときは既に述べたように、自由境界は等速で運動しているが、 ε を大きくするにつれて、その速度は時間とともに減少していると思われる。この場合の定常解の存在については、現在、検討をしている。

4. 2次元問題の解析

この問題に対しては、現在のところ、数学的な結果はほとんど得られていない。しかし、[2]は、 $\varepsilon=0$ のときの自由境界の線形の意味での安定性が、 $\mu < 3$ のとき安定で、 $\mu > 3$ のとき不安定であることを、形式的な計算により示した。

本稿では、 $\mu = 20$, $p^* = 1$ とし、問題1と問題2のそれぞれにおいて、 $\varepsilon = 0$ と $\varepsilon = 100$ のときの数値実験の結果を記すことにする(図6, 7, 9, 10)。1次元問題において確認された定常解が2次元問題ではどのようなになるかを調べるため、問題1において、 $\mu = 20$, $p^* = -50$, $\varepsilon = 100$ のときの数値実験も行った(図8)。計算は差分法で行い、刻み幅は、 $\Delta x = \Delta y = 1/100$ ($\varepsilon = 0$ のとき), $\Delta x = \Delta y = 1/50$ ($\varepsilon = 100$ のとき)とした。スキームは、(2)(3)から得られる p に関するポアソン型の方程式を差分化したものをCG系の反復法で解き(問題1), (3)を使って v を求めたのち、(1)を1次元計算と同様のexplicitタイプの差分法で解いた。刻み幅はさらに小さくしたいところであるが、 $\varepsilon = 100$ のときは(1)の解法にかなりの時間をとられるため、現在のところ、この段階に留まっている。

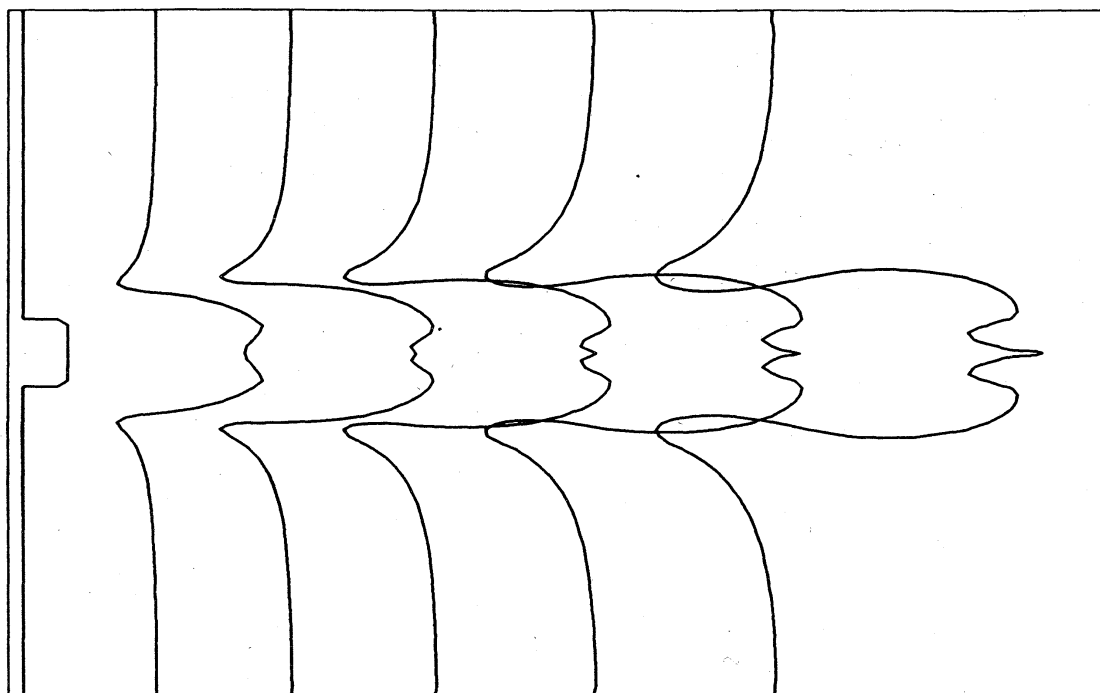


図 6 (a) 2次元問題の自由境界の挙動 (問題 1, $\varepsilon = 0$)

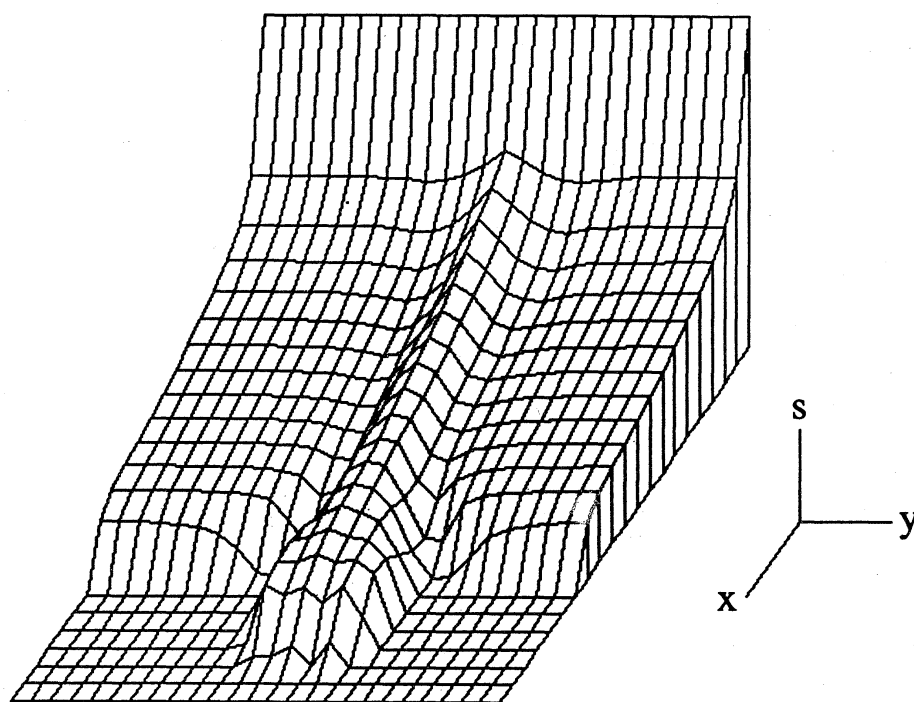


図 6 (b) 2次元問題の解 S の形 (問題 1, $\varepsilon = 0$)

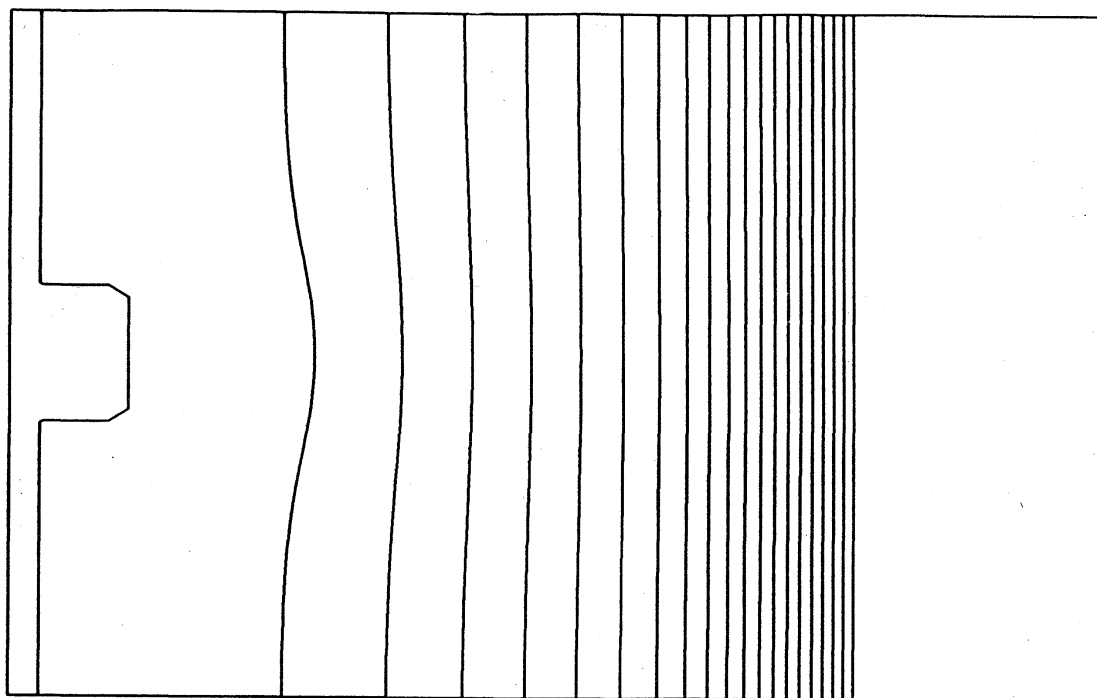


図 7 (a) 2次元問題の自由境界の挙動 (問題 1, $\varepsilon = 100$)

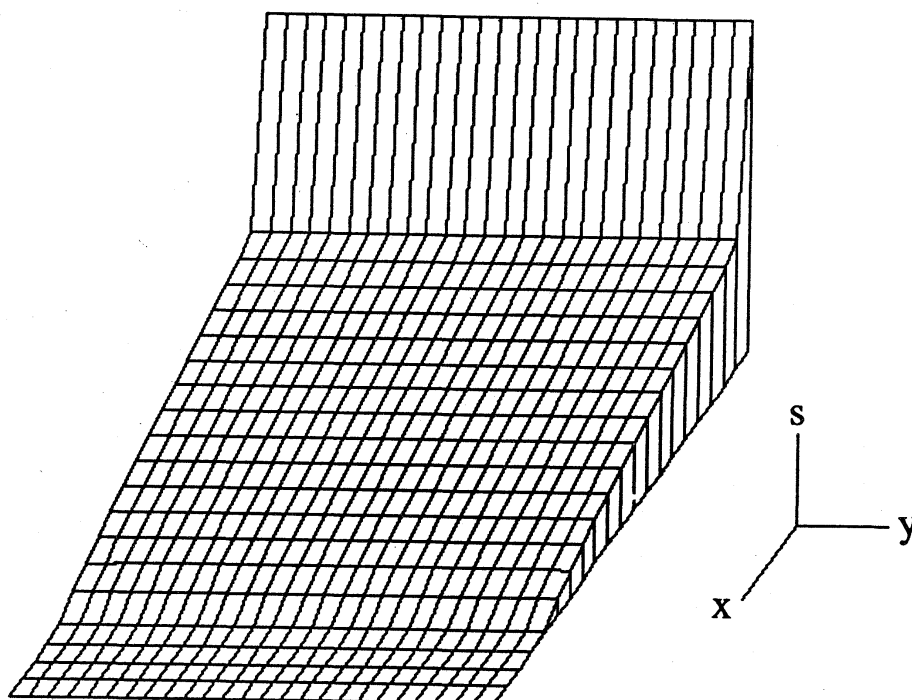


図 7 (b) 2次元問題の解 S の形 (問題 1, $\varepsilon = 100$)

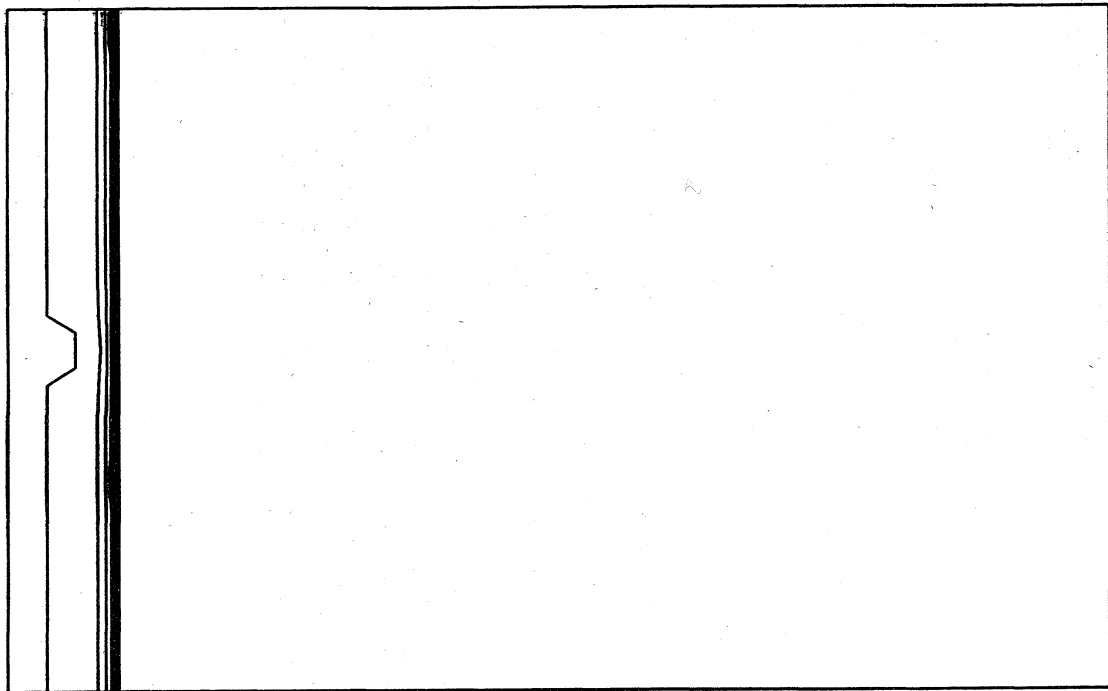


図 8 (a) 2次元問題の自由境界の挙動 (問題 1, $\varepsilon = 100$, $p^* = -50$)

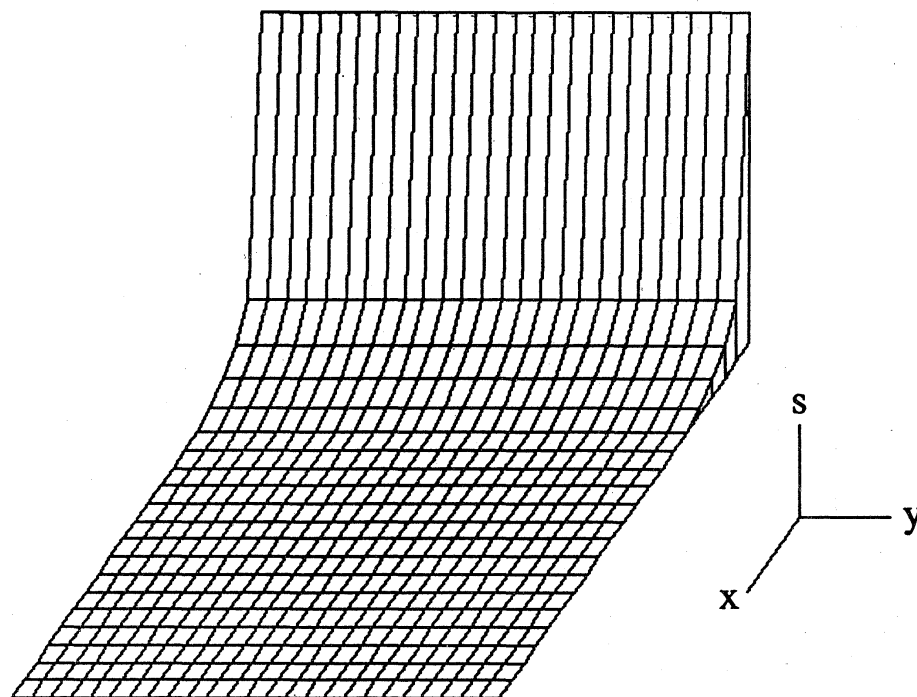


図 8 (b) 2次元問題の解 S の形 (問題 1, $\varepsilon = 100$, $p^* = -50$)

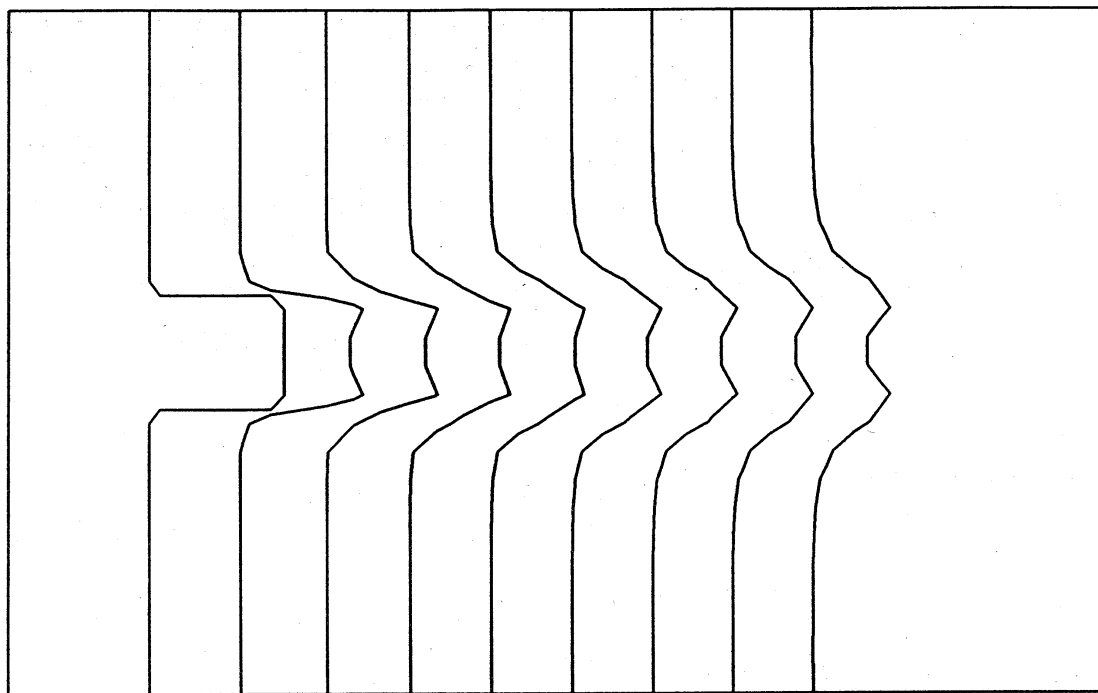


図 9 2次元問題の自由境界の挙動 (問題 2, $\varepsilon = 0$)

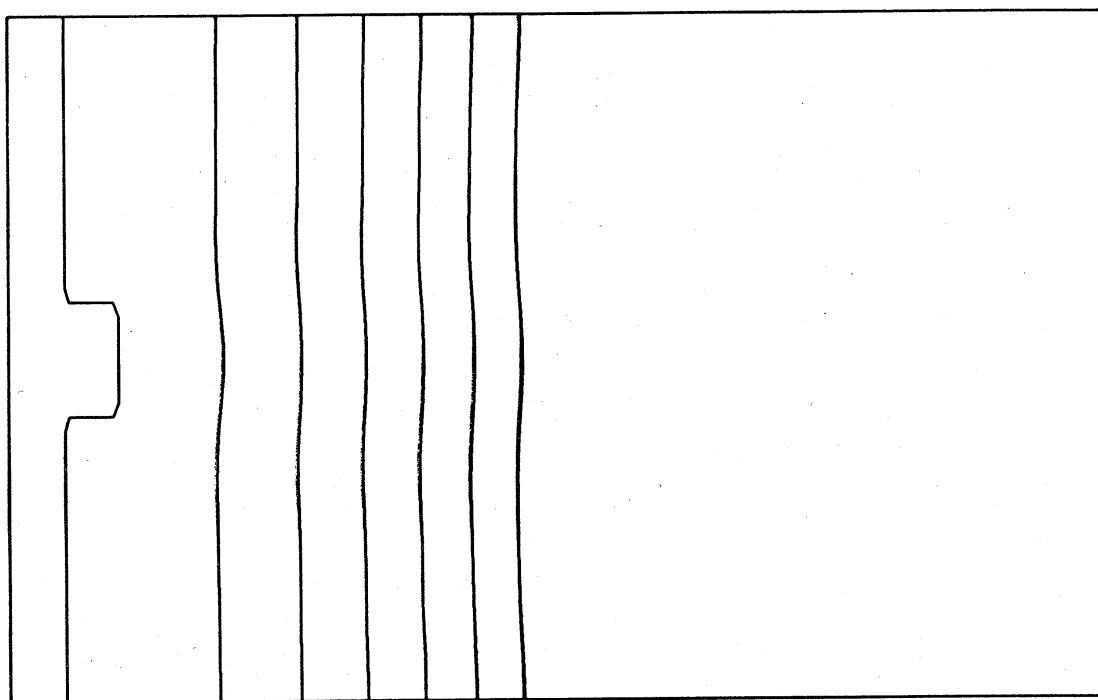


図 10 2次元問題の自由境界の挙動 (問題 2, $\varepsilon = 100$)

注意 問題2において、 p を、 $y = 0, \Delta y, 2\Delta y, \dots$ の順で逐次求めた。これは、よく知られているように、必ずしも適切でない問題を解くことになる。我々の計算において、時刻があまり進んでいないときは問題がなかったが、ある時刻から先は数値的な不安定現象に悩まされた。そのため、それが生じる前で計算は中断した。従って、スキームの変更の必要、さらには、問題2の設定自身を見直す必要があると思われる。

これらの数値計算結果から次のことが分かる。

問題1において、 $\varepsilon = 0$ のときは初期の自由境界に付けた摂動が拡大して、fingering instabilityが生じている。ところが、 $\varepsilon = 100$ では摂動が吸収されて安定化の方向に向かっている。これは、1次元計算における解の挙動と次のような関係がある可能性を示唆するものかも知れない。

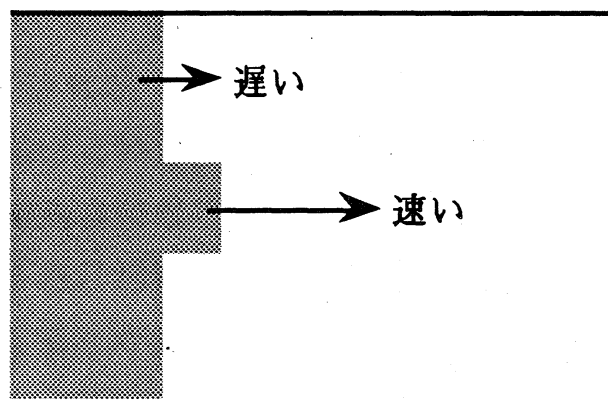


図1 1 $\varepsilon = 0$ の場合（自由境界の加速度が正）

$\varepsilon = 0$ のときは、1次元計算において、自由境界の速度は時刻とともに増加していた（加速度が正）。このことは、上図のように、先に飛びだしている自由境界の速度が他のところより速いことを意味する可能性がある。一方、 $\varepsilon = 100$ では、1次元計算における自由境界の加速度は負であったため、図1 1における速度の大小関係が逆になり、自由境界の安定性を示唆すると考えられる。

もちろん、以上のことは、縦方向の変化を無視した議論で、数学的には何も意味がないことである。

また、1次元計算で定常解が出現したのと同じパラメータの下での、2次元計算の結果(図8)を見ると、やはり、定常状態に落ち着き、その解は1次元的なものになっていると思われる。

ε が大きいときは、2次元問題の解は1次元的なものに変化し、その後、1次元問題と同じ挙動を示すと思われる。

注意 ε を大きくする、すなわち、 p^* を小さくするとき、自由境界が安定化に向かう現象は、[7]によれば、実験的に起こることである。

次に、問題2について、 $\varepsilon = 0$ では、自由境界は安定化の方向に向かっているように思われる。すでに述べたように、完全に1次元的な解に向かうのか、または、いったん安定化に向かったあと再び不安定化を起こすのかを判断するところまでは、計算はできなかった。 $\varepsilon = 100$ では、問題1と同様に、安定化の方向に向かうようである。

5. 最後に

本稿に記したことは、数値実験によるもので、数学的に示したことは少ない。今後の課題として、以上のことの数学的なアプローチがある。また、問題2の設定の妥当性も検討する必要があると思われる。

本研究において、友枝謙二(大阪工業大学)、永井敏隆(九州工業大学)両先生から、多くの示唆と激励を受けました。また、数値計算の主要部は、広島大学理学部数学教室に設置されているミニスーパーコンピュータ fx1 を使用しました。

参考文献

- [1] J.Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier Publishing Company Inc., 1972.
- [2] A.J.Chorin, *The Instability of Fronts in a Porous Medium*, Comm. Math. Phys., 91, 1983.
- [3] L.P.Dake, *Fundamentals of reservoir engineering*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1978.
- [4] J.Glimm, D.Marchesin and O.McBryan, *Unstable fingers in two phase flow*, Comm. Pure Appl. Math., 24, 1981.
- [5] 中木達幸, 多孔質媒体中を流れる2流体問題について, 数理解析研究所講究録724, 1990.
- [6] ———, 多孔質媒体中の2流体問題の解の挙動について, 日本数学会1990年度秋季総合分科会応用数学分科会講演アブストラクト, 1990.
- [7] 太田隆夫, 界面の不安定性とパターン形成, 物理学最前線10, 共立出版, 1985.
- [8] A.E.Scheidegger, *The physics of flow through porous media*, Third edition, University of Toronto Press, 1974.
- [9] M.F.Wheeler, *Numerical simulation in oil recovery*, Springer-Verlag, 1988.