

対称トーリック Fano 多様体上の Einstein-Kähler 計量について

東北大学 理学部 中川 泰宏

1 Fano 多様体上の Einstein-Kähler 計量

この節では、 X は n 次元 Fano 多様体を表すものとする。すなわち X は n 次元のコンパクト複素多様体で正の第一 Chern 類 $c_1(X)$ を持つものとする。 X 上の Kähler 計量 g に対応する Kähler 形式を

$$\omega_g := \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

で表す。特に我々は ω_g の de Rham コホモロジー類 $[\omega_g]$ が

$$[\omega_g] = 2\pi c_1(X)$$

を満たすもののみを考える事にする。さらに g の Ricci 形式 Ric_g を

$$\text{Ric}_g := \sqrt{-1} \bar{\partial} \partial \log \det(g_{i\bar{j}})$$

で定義する。この時以下の事が成り立つ。

Remark 1.1 Ric_g の de Rham コホモロジー類 $[\text{Ric}_g]$ は $[\text{Ric}_g] = 2\pi c_1(X)$ を満たす。

Definition 1.2 Kähler 計量 g が Einstein-Kähler 計量であるとは、Einstein の方程式

$$\text{Ric}_g = \omega_g$$

を満たすときをいう。

一般には、 X 上の実数値の滑らかな関数 f_g が存在して

$$\text{Ric}_g - \omega_g = \sqrt{-1} \bar{\partial} \partial f_g$$

となる。ここで二木不変量を

$$F_X : H^0(X, \mathcal{O}(TX)) \ni V \mapsto \int_X (V f_g) \omega_g^n \in \mathbb{C}$$

で定義する。この時 F_X の定義は $[\omega_g]$ のみにより g の取りかたによらない事が示される ([2])。

一般の Fano 多様体上に Einstein-Kähler 計量が存在するかという問題を考えると、この問題に対しては反例が知られている。実は次のように二つの障害がよく知られている。

Fact 1.3 (i) X が Einstein-Kähler 計量を持てば、 X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ の単位元を含む連結成分 $\text{Aut}^\circ(X)$ は簡約代数群になる ([7])。

(ii) X が Einstein-Kähler 計量を持てば、 F_X は恒等的に零である ([2])。

そこで二木は次のような予想を立てた。

Conjecture 1.4 ([2]) 二木不変量 F_X が恒等的に零である様な Fano 多様体 X は Einstein-Kähler 計量を持つ。

ここで次の事に注意する。

Remark 1.5 (i) $\text{Aut}^\circ(X)$ が簡約代数群であるが、 F_X が零でない様な Fano 多様体 X の例は知られている ([2])。

(ii) 逆に F_X が消えているが $\text{Aut}^\circ(X)$ が簡約でない様な Fano 多様体 X の例は知られていない。

ここで少し脱線するが、Einstein-Kähler 計量の一般化である端的 Kähler 計量について説明する。そのためにまず記号の準備をする。

$$2\pi c_1(X)^+ := \{\eta \in 2\pi c_1(X); \eta \text{ は Kähler 形式である。}\}$$

とし、その元 $\eta = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^n h_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j \in 2\pi c_1(X)^+$ に対して

$$R(\eta)_{i\bar{j}} := -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log \det(h_{\alpha\bar{\beta}}),$$

$$\sigma(\eta) := \sum_{i,j=1}^n h^{\bar{j}i} R(\eta)_{i\bar{j}}$$

とする。ここで $(h^{\bar{j}i})$ は $(h_{i\bar{j}})$ の逆行列である。

Definition 1.6 ([1]) Kähler 計量 g は対応する Kähler 形式 ω_g が汎関数

$$2\pi c_1(X)^+ \ni \eta \mapsto \int_X \sigma(\eta)^2 \eta^n \in \mathbb{R}$$

の臨界点であるとき端的 Kähler 計量という。

この端的 Kähler 計量については、次が成り立つ事が示されている。

Fact 1.7 (i) g が端的 Kähler 計量となるための必要十分条件は

$$\text{grad}_g(\sigma(\omega_g)) := \sum_{i,j=1}^n g^{\bar{j}i} \frac{\partial \sigma(\omega_g)}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z^i}$$

が正則ベクトル場となる事である ([1])。特に Einstein-Kähler 計量は端的 Kähler 計量である。

(ii) F_X が恒等的に零の時、端的 Kähler 計量は Einstein-Kähler 計量となる ([2])。

最近、Hwang と満洲は端的 Kähler 計量を研究するために次の概念を導入した。

Definition 1.8 ([4]) G を線形代数群とし、 $G = H \ltimes U$ をその Chevalley 分解とする。すなわち U は冪単根基で、 H はある簡約代数部分群である。このとき G が第一種であるとは、 $U = \{\text{id}\}$ となるかまたは H が半単純でない時をいう。

この第一種という概念に対して Hwang と満洲は次を示した。

Fact 1.9 ([4]) (i) X が端的 Kähler 計量を持てば、 $\text{Aut}^\circ(X)$ は第一種である。
(ii) X がトーリック多様体であれば (トーリック多様体の定義は次節を参照の事)、 $\text{Aut}^\circ(X)$ は第一種である。

この事実は次の予想の正当性を支持するものである。

Conjecture 1.10 トーリック Fano 多様体上には、端的 Kähler 計量が存在する。

もしこの予想が正しいとすると Fact 1.7(ii) により Conjecture 1.4 をトーリック Fano 多様体に限った次の予想が示される。

Conjecture 1.11 二木不変量 F_X が恒等的に零であるようなトーリック Fano 多様体 X は Einstein-Kähler 計量を持つ。

2 トーリック Fano 多様体

この節では、トーリック Fano 多様体について簡単な復習をする。(詳しくは小田 ([10]) を見よ。) 前節に引き続き本節でも X は n 次元 Fano 多様体を表すものとする。

Definition 2.1 n 次元 Fano 多様体 X は効果的かつ概等質的な代数的トーラス $T_n := (\mathbb{C}^*)^n$ の代数的な作用を持つ時、トーリック Fano 多様体と呼ばれる。

Definition 2.2 P を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の中の n 次元凸多面体とする。 P は以下の条件を満たす時、 n 次元 Fano 多面体と呼ばれる。

- (i) $\mathbb{R}^n$ の原点 0 が P の内部 $\text{Int}(P)$ に含まれる。
- (ii) P の頂点集合は $\mathbb{Z}^n$ に含まれる。
- (iii) P の任意の面は単体である。
- (iv) P の任意の $n-1$ 次元の面の頂点集合は $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底を成す。

次の事実はトーリック Fano 多様体の研究において最も基本的かつ重要な事実の一つである。これを用いて、トーリック多様体の様々な幾何学的性質を具体的に調べる事ができる。

Fact 2.3 (i) n 次元トーリック Fano 多様体の同型類と n 次元 Fano 多面体の同型類とは一対一に対応する。この対応において、 n 次元 Fano 多面体 P に対応する n 次元トーリック Fano 多様体を X_P で表すことにする。

(ii) P の k 次元の面 δ と X_P の $n - k - 1$ 次元の T_n 軌道 $O(\delta)$ が一対一に対応する。

(iii) $GL(n, \mathbb{Z})$ の元 φ で $\varphi(P) = P$ を満たすものは X_P の T_n 同変な正則自己同型 φ_* と一対一に対応する。

特に二木不変量に対しては、次の満洲による結果がある。

Fact 2.4 ([6]) P を Fano 多面体とする。トーリック Fano 多様体 X_P の二木不変量 F_{X_P} が恒等的に零であるための必要十分条件は、 P の極多面体 P^* の重心が原点にある事である。

3 対称トーリック Fano 多様体

Fact 2.4 により対称トーリック Fano 多様体と呼ばれる特別なトーリック Fano 多様体を考える事にする。このトーリック Fano 多様体は後で述べるが (Corollary 3.3)、二木不変量は恒等的に零である。

Definition 3.1 ([13]) X_P をトーリック Fano 多様体とする。 X_P 上の対合 $\iota: X_P \rightarrow X_P$ (すなわち $\iota^2 = \text{id}_{X_P}$ を満たす X_P の正則自己同型) で

$$\iota(tx) = t^{-1}\iota(x)$$

がすべての $t \in T_n$ と $x \in X_P$ に対して成り立つようなものが存在する時、 X_P を対称トーリック Fano 多様体と呼ぶ。またこれと同値な条件として

$$-P = P$$

が成り立つとしてもよい。この条件の成り立つ P を対称 Fano 多面体という。

次は P の対称性より明らかである。

Lemma 3.2 対称トーリック Fano 多面体 P の極多面体 P^* の重心は原点にある。

Corollary 2.4 と合わせると、系として次が得られる。

Corollary 3.3 対称トーリック Fano 多様体の二木不変量は恒等的に零である。

よって我々は Conjecture 1.11 の特別な場合として、次のような予想を考える事にする。

Conjecture 3.4 対称トーリック Fano 多様体には Einstein-Kähler が存在する。

Voskresenskii と Klyachko による対称トーリック Fano 多様体の分類の結果を述べるために少し記号を準備する。

$e_1, e_2, \dots, e_n : \mathbb{R}^n$ の標準的基底,

$$e_0 := -\sum_{i=1}^n e_i = (-1, -1, \dots, -1),$$

$P_n := \{\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ の凸閉包

この記号の下で Voskresenskii と Klyachko は以下を示した。

Fact 3.5 ([13]) (i) n が偶数 $n = 2m$ の時 P_{2m} は $2m$ 次元対称 Fano 多面体である。

この時対応するトーリック Fano 多様体を $X_{2m} := X_{P_{2m}}$ と表すことにする。

(ii) 任意の対称トーリック Fano 多様体は

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), X_2, X_4, \dots, X_{2m}, \dots,$$

達の直積に書ける。

よって Conjecture 3.4 を考える代わりに次を考えれば十分である。

Conjecture 3.6 任意の自然数 m に対して、 X_{2m} には Einstein-Kähler 計量が存在する。

この予想については、 $m = 1$ の時は Siu([11]) や Tian と Yau([12]) や Nadel([8]) により示されている。また $m = 2$ の時も最近示された ([9])。

ここで後で必要となる X_{2m} の幾何学的性質を述べるために幾つか記号を用意する。 I と J を $\{0, 1, \dots, 2m\}$ の部分集合で

$$(*) \quad I \cap J = \emptyset, \quad 1 \leq |I \cup J| \leq 2m, \quad 0 \leq |I|, |J| \leq m$$

を満たすものとする。 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ と $J = \{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ の様に表されているとする。このような I と J に対して

$$\sigma_{IJ} := \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, -e_{j_1}, -e_{j_2}, \dots, -e_{j_q}\} \text{ の凸閉包}$$

とする。この時

$$\{\sigma_{IJ}; |I| = |J| = m\} = \{P_{2m} \text{ の } 2m - 1 \text{ 次元の面}\}$$

となる。また $(|I|, |J|) = (p, q)$ または $(|I|, |J|) = (q, p)$ の時 (ただし $p \geq q$ とする。) σ_{IJ} を (p, q) 型の面という

(p, q) 型の面 σ_{IJ} は $p + q - 1$ 次元なので Fact 2.3 により対応する X_{2m} 中の T_{2m} 軌道 $O(\sigma_{IJ})$ は $2m - p - q$ 次元になる。 $O(\sigma_{IJ})$ の X_{2m} 中での閉包を V_{IJ} で表すことにする。またこの V_{IJ} も (p, q) 型といい $\text{type}(V_{IJ}) = (p, q)$ と表す。さらに

$$Y_{p,q} := \bigcup_{\text{type}(V_{IJ}) = (p,q)} V_{IJ}$$

とおく。

次に X_{2m} の正則自己同型について考える。 $2m+1$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{2m+1}$ は $\{e_0, e_1, \dots, e_{2m}\}$ の置換と見て $GL(2m, \mathbb{Z})$ の有限部分群となる。 G_1 を $\mathfrak{S}_{2m+1}$ と $\{\pm \text{id}_{2m}\}$ により生成される $GL(2m, \mathbb{Z})$ の有限部分群とする。この時 $G_1 \cong \mathfrak{S}_{2m+1} \times \mathbb{Z}_2$ となる。

Remark 3.7 G_1 は集合 $\{\sigma_{IJ}; I, J \subseteq \{0, 1, \dots, 2m\} \text{ は } (*) \text{ を満たす}\}$ に作用する。

Lemma 3.8 G_1 の作用で σ_{IJ} は同じ型の $\sigma_{I'J'}$ に移る。逆に二つの同じ型の面 σ_{IJ} と $\sigma_{I'J'}$ に対して、 σ_{IJ} を $\sigma_{I'J'}$ に移す G_1 の元が存在する。

Remark 3.9 G_1 は $GL(2m, \mathbb{Z})$ の部分群であり P_{2m} を保つので Fact 2.3 により G_1 は X_{2m} に T_{2m} 同変正則自己同型として自然に作用する。これにより G_1 を $\text{Aut}(X_{2m})$ の部分群と見る。

$G_0 := (U(1))^{2m} \subset T_{2m}$ をコンパクト・トーラスとし、 G を G_0 と G_1 で生成される $\text{Aut}(X_{2m})$ のコンパクト部分群とする。さらに $G^{\mathbb{C}}$ を G の複素化とする。この時次がわかる。

Lemma 3.10 X_{2m} の $G^{\mathbb{C}}$ 不変被約閉複素解析的部分空間は幾つかの $Y_{p,q}$ 達の和集合となる。

4 主要結果

さてここで本来の問題に戻ることにする。すなわち X_{2m} に Einstein-Kähler 計量が存在するかという問題を考える。トーリック Fano 多様体のように非常に対照性の高い Fano 多様体上の計量の存在問題を考える時に有効な手段として次の Nadel の結果がある。

Fact 4.1 ([8]) Fano 多様体 X とその自己同型群 $\text{Aut}(X)$ のコンパクト部分群 G を考える。もし X 上に Einstein-Kähler 計量が存在しないとすると、 X の $G^{\mathbb{C}}$ 不変な閉複素解析的部分空間 Z で

(i) Z の構造層係数のコホモロジー群は

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(Z, \mathcal{O}_Z) \cong \begin{cases} 1, & (q = 0) \\ 0, & (q > 0) \end{cases}$$

となる。

(ii) Z の補集合 $X \setminus Z$ の対数的幾何種数は零である。

が成り立つようなものが存在する。この Z を **multiplier ideal subscheme** と呼ぶ。

この Nadel の結果を用いて X_{2m} 上に Einstein-Kähler が存在する事を示したい。もし X_{2m} が Einstein-Kähler 計量を持たないとすると X_{2m} の multiplier ideal subscheme Z が存在するはずだが、この様な Z は存在し得ない事を示せばよい。しかし現段階ではまだ出来ない。そこで本稿ではこの Z が満たすべき条件 (Theorem 4.3) を求める事にする。

一般の Fano 多様体 X に対して、 X 上に Einstein-kähler 計量が存在しないとすると Fact4.1 により X の multiplier ideal subscheme Z が存在する。 Z_{red} により Z の被約型を表す。この時

$$\begin{aligned} Z_{\text{red}} &= \bigcup_{i=1}^k Y_i : && \text{既約分解,} \\ Z_1 &:= \bigcup_{i=1}^l Y_i, && Z_2 := \bigcup_{j=l+1}^k Y_j \\ r_1 &:= \dim_{\mathbb{C}} Z_1 \end{aligned}$$

とする。以上の記号の下で次が成り立つ。

Lemma 4.2 $H^1(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}) = \{0\}$

これを用いて次が得られる。

Theorem 4.3 X_{2m} 上に Einstein-Kähler 計量が存在しないとし、 Z を X_{2m} の multiplier ideal subscheme とする。この時以下が成り立つ。

- (i) Z_{red} は幾つかの $Y_{p,q}$ 達の和集合となる。
- (ii) Z_{red} の幾つかの既約成分の和集合として $q \geq 1$ の $Y_{m,q}$ は現れない。

Proof. (i) は Lemma3.10 より明らかである。(ii) について例えば $q = 1$ の時を考える。 $Y_{m,1}$ が現れたとする。この時 $Y_{m,1}$ の幾つかの既約成分の和集合として

$$Z_1 := \bigcup_{i=0}^m V_{\{i\}\{m+1, m+2, \dots, 2m\}}$$

が現れる。この Z_1 に Lemma4.2 を適用してやると、 $\dim_{\mathbb{C}} Z_1 = m - 1$ なので

$$H^{m-1}(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}) = \{0\}$$

となる。一方 Z_1 は m 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の斉次座標で定義される $m+1$ 枚の超平面の和集合と同型なので

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^{m-1}(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1})) = 1$$

となり矛盾である。一般の場合もほぼ同様に示せる。 $\square$

この Theorem4.3 により特に次が解る。

Corollary 4.4 Theorem4.3 と同じ条件の下で

$$2 \leq \dim_{\mathbb{C}} Z \leq 2m - 2$$

が成り立つ。

Proof. もし $\dim_{\mathbb{C}} Z = 0$ とすると $Z_{\text{red}} = Y_{m,m}$ となるが、これは Teorem 4.3 により起こり得ない。 $\dim_{\mathbb{C}} Z = 1$ とすると $Z_{\text{red}} = Y_{m,m-1}$ となるが、これもまた Teorem 4.3 に反する。一方 $\dim_{\mathbb{C}} Z = 2m - 1$ とすると $X_{2m} \setminus Z = T_{2m}$ となる。 T_{2m} の対数的幾何種数は零ではないので Fact 4.1 に反する。 $\square$

Example 4.5 (i) Corollary 4.4 を $m = 1$ の時、すなわち X_2 に適用すると直ちに X_2 に Einstein-Kähler 計量が存在する事が示される。これが Nadel ([8]) による $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を三点ブローイン・グアッブして得られる曲面が Einstein-Kähler 計量を持つ事の証明である。

(ii) $m = 2$ の時、すなわち X_4 に対しては、残された可能性は $\dim_{\mathbb{C}} Z = 2$ のみである。この場合に対しては、石田の判定法 ([5]) などを用いて起こり得ない事が示される。このようにして X_4 にも Einstein-Kähler 計量が存在する事が示される ([9])。

参考文献

- [1] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics*, in “Seminar on differential geometry,” Annals of Math. Studies **102**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1982, pp. 259–290.
- [2] A. Futaki, *An obstruction to the existence of Kähler Einstein metrics*, Invent. Math. **73** (1983), pp. 437–443.
- [3] A. Futaki and T. Mabuchi, *Uniqueness and periodicity of extremal Kähler vector fields*, preprint.
- [4] A. Hwang and T. Mabuchi, *A conjecture on the group of biholomorphisms of a non-singular Fano variety*, preprint.
- [5] M.-N. Ishida, *Torus embedding and dualizing complexes*, Tohoku Math. J. **32** (1980), pp. 111–146.
- [6] T. Mabuchi, *Einstein-Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties*, Osaka J. Math. **24** (1987), pp. 705–737.
- [7] Y. Matsushima, *Sur la structure du groupe d’homomorphismes analytique d’une certaine variété kählérienne*, Nagoya Math. J. **46** (1957), pp. 145–150.
- [8] A. M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **132** (1990), pp. 549–596.
- [9] Y. Nakagawa, *Einstein-Kähler toric Fano fourfolds*, Tohoku Math. J. **45** (1993), pp. 297–310.
- [10] T. Oda, “Convex bodies and algebraic geometry : An introduction to the theory of toric varieties,” Ergebnisse der Math. (3) **15**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988.

- [11] Y.-T. Siu, *The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anti-canonical line bundle and a suitable finite symmetry group*, Ann. of Math. **127** (1988) pp. 585–627.
- [12] G. Tian and S.-T. Yau, *Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $C_1 > 0$* , Commun. Math. Phys. **112** (1987), pp. 175–203.
- [13] V. E. Voskresenskii and A. A. Klyachko, *Toroidal Fano varieties and root systems*, Math. USSR-Izv. **24** (1985), 221–244; Izv. Akad. Nauk SSSR **48** (1984), 237–263.