

対称な Brownian resolvent に関する注意

阪大理 渡辺 敬

従来, Markov 過程の resolvent $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ は, 有界可測関数の族 $\mathcal{B}$ あるいは有界連続関数の族 $\mathcal{C}$ の上の作用素として捉えられ, L^p 乗積分可能な関数の族 $L^2(L^p)$ 上の作用素と考えて議論されることは少なかった. しかし具体的に与えられた微分 (あるいは微積分) 作用素を生成作用素にもつような resolvent の構成やその性質を論じる際に, G_α に対する L^2 -theory の有効性が, 最近福島氏などの研究によって明らかにされつつある ([3], [4], [1]). これは一口に言うと, 楕円型偏微分方程式における関数解析的方法を, 「必要な modification」の下で確率論に結びつけるものである. ここでは, L^p -theory が有効であるような 1 つの例を示す.

1. 定理

E は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の領域である。
 Δ はラプラスアン, $A = \frac{1}{2}\Delta$ とする。

$\{G_\alpha(x, dy), \alpha > 0\}$ がつぎの条件を満足するとき resolvent であるという。

(i) E の各点 x に対し, $G_\alpha(x, \cdot)$ は E 上のボレル測度で, $\alpha G_\alpha(x, E) \leq 1$ をみたす。

(ii) E の各ボレル集合 B に対し, $G_\alpha(\cdot, B)$ は E 上のボレル可測関数である。

(iii) レゾルベント方程式をみたす:

$$G_\alpha(x, B) - G_\beta(x, B) + (\alpha - \beta) \int_E G_\alpha(x, dy) G_\beta(y, B) = 0.$$

E 上の関数で無限回連続微分可能な関数 (C^∞ -関数) の全体を C^∞ , その中でコンパクトな台の関数全体を C_0^∞ で表す。

任意の $f \in C_0^\infty$ に対し, $u = G_\alpha f = \int_E G_\alpha(\cdot, dy) f(y)$ が, 方程式

$$(1) \quad (\alpha - A)u = f$$

の解であるとき, $\{G_\alpha(x, dy), \alpha > 0\}$ を Brownian resolvent と呼ぶ.

E 上の測度 μ が $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ に関して excessive であるとしよう; $\mu(B) \geq \alpha \mu G_\alpha(B) = \alpha \int_E \mu(dx) G_\alpha(x, B)$. μ に関して p 乗積分可能な関数の全体を $L^p(\mu)$ で表す. この時, $f \rightarrow G_\alpha f$ は $L^p(\mu)$ からそれ自身への作用素で, $\|\alpha G_\alpha\|_{L^p, \mu} \leq 1$ をみたす. 実際, Hölder の不等式によって

$$\begin{aligned} |\alpha G_\alpha f| &\leq (\alpha G_\alpha |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\alpha G_\alpha 1)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (\alpha G_\alpha |f|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \|\alpha G_\alpha f\|_{L^p, \mu}^p &= \int_E |\alpha G_\alpha f|^p d\mu \\ &\leq \int_E \alpha G_\alpha |f|^p(x) d\mu(x) = \int_E |f|^p(y) \alpha G_\alpha(dy) \\ &\leq \int_E |f|^p(y) \mu(dy) = \|f\|_{L^p, \mu}^p. \end{aligned}$$

μ に関する内積 $\int_E f g d\mu$ を $(f, g)_\mu$ で表す. 任意の可測な正の関数 f, g に対し

$$(2) \quad (G_\alpha f, g)_\mu = (f, G_\alpha g)_\mu$$

をみたすとき, $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ を μ -symmetric な resolvent であるという. このとき, μ は $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ に関して excessive である. 実際, $f \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} \int_E f(y) \alpha \mu G_\alpha(dy) &= \int_E \alpha G_\alpha f(x) \mu(dx) \\ &= (\alpha G_\alpha f, 1)_\mu \\ &= (f, \alpha G_\alpha 1)_\mu \\ &\leq (f, 1)_\mu = \int_E f(y) \mu(dy). \end{aligned}$$

定理 1. $\{G_\alpha(x, dy), \alpha > 0\}$ を Brownian resolvent, $\mathcal{B}$ を E 上の有界可測関数の全体, $\mathcal{C}^1$ を連続な偏導関数をもつ E 上の関数全体とする. この時, 任意の $f \in \mathcal{B}$ に対し $G_\alpha f \in \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{B}$ である.

(μ は空でない λ 開集合に対し正の値を取る測度とする.)

定理 2. $\{G_\alpha(x, dy), \alpha > 0\}$ を μ -symmetric な Brownian resolvent とする. この時, つぎのような関数の系 $\{g_\alpha(x, y), \alpha > 0\}$ が唯 1 つ存在する.

- (i) $G_\alpha(x, dy) = g_\alpha(x, y) \mu(dy)$
- (ii) $g_\alpha(x, y)$ は x, y に関して対称で, 2変数 (x, y) の関数として可測, かつ一方を固定したとき残りの変数に関して下に半連続である.

(iii) y を固定したとき, $g_\alpha(x, y)$ は x の関数として, $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ に関して α -excessive である:

$$\beta G_{\alpha+\beta} g_\alpha(x, y) \uparrow g_\alpha(x, y), \quad \beta \rightarrow \infty.$$

定理 1 は方程式 (1) に対する L^p -theory の結果から容易に導かれる. 定理 2 は定理 1 と [2, p496, Theorem 1] から証明される. これらの性質は, E 上のルベック測度に関して対称な Brownian resolvent のより深い解析のために必要な基本的性質である.

2. 証明

つききの記号を用いる.

$$L^p = \left\{ f; f \text{ は } E \text{ 上の関数で } \int_E |f|^p dx < \infty \right\},$$

$$L^p_{loc} = \left\{ f; \text{任意の } a \in \mathcal{C}_0^\infty \text{ に対し, } af \in L^p \right\},$$

$$k = (k_1, \dots, k_n), \quad |k| = k_1 + \dots + k_n \text{ で}$$

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} f, \quad \left(\begin{array}{l} \text{微分は起関数} \\ \text{の意味に取る} \end{array} \right)$$

$$\mathcal{E}_{L^p}^m = \left\{ f; D^k f \in L^p, |k| \leq m \right\},$$

$$\|f\|_{p,m} = \sum_{|k| \leq m} \|D^k f\|_{L^p},$$

$$\mathcal{E}_{L^p(loc)}^m = \left\{ f; \text{任意の } a \in \mathcal{C}_0^\infty \text{ に対し, } af \in \mathcal{E}_{L^p}^m \right\}.$$

方程式 (1) を超関数の意味で考えたものを

$$(3) \quad (\alpha - A)u = f \quad \text{in } (\mathcal{D}')$$

と表やす. 方程式 (3) については, つぎの結果が知られている.

補題 1. u が (3) の解で, かつ $u \in L^p_{loc}$ であるとする. その時, $f \rightarrow u$ は $\mathcal{E}^m_{L^p(loc)}$ から $\mathcal{E}^{m+2}_{L^p(loc)}$ への連続な対応を与える. 厳密に言うと, $\mathcal{E}^m_{L^p(loc)}$ の関数列 f_j に対し L^p_{loc} に属する解 u_j が与えられているとする. その時, $u_j \in \mathcal{E}^{m+2}_{L^p(loc)}$ であり, さらに任意の $a \in \mathcal{C}_0^\infty$ に対し $a f_j$ が $\mathcal{E}^m_{L^p}$ の中で 0 に収束すれば, $a u_j$ は $\mathcal{E}^{m+2}_{L^p}$ の中で 0 に収束する.

つぎの結果は L^p に対する Sobolev の補題である.

補題 2. $\mathcal{E}^m_{L^p}$ の定義で, 特に $E = \mathbb{R}^n$ としたものを $\mathcal{E}^m_{L^p}(\mathbb{R}^n)$ で表やす. $\mathbb{R}^n$ 上の関数で, すべての $|k| \leq m$ に対し $D^k f$ が有界連続であるものの全体を $\mathcal{C}^m_b(\mathbb{R}^n)$, そこでのノルムを $|f|_m = \sum_{|k| \leq m} \sup |D^k f|$ とする. その時,

$$(4) \quad \mathcal{E}^{[\frac{n}{p}] + 1 + l}_{L^p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^l_b(\mathbb{R}^n).$$

厳密に言うと, (4) の左辺に属する任意の f に対し,

それと殆んど"いたる所で一致する関数 $\tilde{f}$ が存在して

$$|\tilde{f}|_l \leq C \times \|f\|_{p, [\frac{n}{p}] + 1 + l}$$

である。

定理 1 の証明

$f \in \mathcal{B}$ ならば $u = G_\alpha f \in \mathcal{B}$ であるから, $L^p_{loc} = \mathcal{E}^0_{L^p_{loc}}$ に属する. さらに $G_\alpha f$ は (3) の解である. 実際 $u = G_\alpha f$ が (3) の解であるような $f \in \mathcal{B}$ の全体は単調族をなし, 特に $f \in C^\infty_0$ ならば仮定によって $u = G_\alpha f$ は (3) をみたすからである. したがって 補題 1 により, $G_\alpha f \in \mathcal{E}^2_{L^p_{loc}}$ である.

$p > n$ なる p を取ると, $[\frac{n}{p}] = 0$ だから 補題 2 により $\mathcal{E}^2_{L^p}(R^n) \subset C^1_b(R^n)$. したがって, 任意の $a \in C^\infty_0$ に対し, $a \cdot G_\alpha f$ と $a.e.$ で一致する連続関数が存在する. $a \in C^\infty_0$ は任意だから, $G_\alpha f$ と $a.e.$ で一致する連続関数が存在する. これを $\widetilde{G_\alpha f}$ で表す.

$0 \leq f_j \in \mathcal{B}$ が各々で 0 に減少するとしよう. 任意の $a \in C^\infty_0$ に対し $a f_j$ は $L^p = \mathcal{E}^0_{L^p}$ の中で 0 に収束するから, 補題 1 により $a G_\alpha f_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{E}^2_{L^p}$ である. したがって 補題 2 により $a \widetilde{G_\alpha f_j} \rightarrow 0$ in $C^1_b(R^n)$ である. 特に E の各点 x に対し

$$\widetilde{G_\alpha f_j}(x) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

x を固定したとき, $\widetilde{G_\alpha f_\bullet}(x)$ は $\mathcal{B}$ 上の正の汎関数だから,

$$\widetilde{G_\alpha f}(x) = \int_E f(y) \widetilde{G_\alpha}(x, dy), \quad f \in \mathcal{B}$$

をみたす測度 $\widetilde{G_\alpha}(x, dy)$ が唯一つ存在する. 特に $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ のときは $G_\alpha f$ 自身が連続だから, E のすべての点 x で $G_\alpha f(x) = \widetilde{G_\alpha f}(x)$. 故に $G_\alpha(x, dy) = \widetilde{G_\alpha}(x, dy)$ である. これで, 任意の $a \in \mathcal{C}_0^\infty$ に対し, $a G_\alpha f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$ であること, すなわち $G_\alpha f \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}^1$ が示された.

定理 2 の証明

[2] の用語と結果を用いる. 条件 (2) は $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ がそれ自身の 1 つの co-resolvent であることを示している. $1 \geq f_\wedge^{\geq 0}$ が μ -a.e. で 0 であるとする. そのとき

$$\widetilde{G_\alpha f} (G_\alpha f, 1)_\mu = (f, G_\alpha 1)_\mu = 0$$

であるから, $G_\alpha f$ は μ -a.e. で 0 である. 定理 1 により $G_\alpha f$ は連続だから, μ に関する仮定から $G_\alpha f$ は恒等的に 0 である. したがって, 各 $x \in E$ に対し, 測度 $G_\alpha(x, dy)$ は μ に関して絶対連続である.

故に [2; p 496, Theorem 1] によって, 定理 2 の

(i), (iii) および (iv) $G_\alpha(y, dx) = g_\alpha(x, y) \mu(dx)$,
 (v) x を固定したとき, $g_\alpha(x, y)$ は y の関数としても α -excessive である, という性質をもつ (x, y) -可測な核 $g_\alpha(x, y)$ が唯一つ存在する. (i), (iv) により, y を固定したとき, $f(x) = g_\alpha(x, y)$ と $g(x) = g_\alpha(y, x)$ は μ -a.e. で u と v と, (iii), (v) により共に α -excessive である. したがって

$$\begin{aligned} \beta G_{\alpha+\beta} f(x) &= \beta \int_E f(y) g_{\alpha+\beta}(x, y) \mu(dy) \\ &= \beta \int_E g(y) g_{\alpha+\beta}(x, y) \mu(dy) = \beta G_{\alpha+\beta} g(x). \end{aligned}$$

$\beta \rightarrow \infty$ の時, 左辺は $f(x)$ に右辺は $g(x)$ に増加するから, $f(x) = g(x)$ がすべての $x \in E$ で成り立つ. 故に $g_\alpha(x, y)$ の対称性が証明された.

$\exists f$ ならば $G_\alpha f$ は連続であるから, 任意の可測な非負関数 f に対し, $G_\alpha f$ は下に半連続である. したがって f が α -excessive なら, それは下半連続な関数列 $\alpha G_{\alpha+\beta} f$ の単調増加な極限であるから矢張り下に半連続である. これで定理 2 が証明された.

注意

定理 1 の証明からつぎのことも分る. f_i が 0 に有

界収束するならば, $G_{\alpha\beta}f_j$, $D^1 G_{\alpha\beta}f_j$ はすべてのコンパクト集合の上で一様に 0 に近づく.

文 献

- [1] 国田 寛; Banach 束における submarkov 半群について, 本報告集
- [2] H. Kunita and T. Watanabe, Markov processes and Martin boundaries, Part I, Illinois J. Math. 9 (1965), 485—526
- [3] M. Fukushima, On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [4] T. Shiga and T. Watanabe, On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion, Osaka J. Math. 5 (1968), 1—31.