

cubic theta function について

名大理 吉本 明宣

cubic theta function と呼ばれる上半空間の保型関数の構成について S. J. Patterson [2] の構成法より少し易しい方法がみつかったので、それについて簡略に述べてみたい。

H を上半空間とする。すなわち $w = (z, v) \in H$ ならば $z \in \mathbb{C}$, $v > 0$ である。 w は $\begin{pmatrix} z & -v \\ v & \bar{z} \end{pmatrix}$ と同一視できる。そのとき $SL(2, \mathbb{C})$ は H に次の様に作用する。 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して

$$\sigma(w) = (\tilde{a}w + \tilde{b}) \cdot (\tilde{c}w + \tilde{d})^{-1},$$

ここで $\tilde{z} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$, $(z \in \mathbb{C})$ である。

また $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\lambda = \sqrt{3}i$, $e(z) = \exp(2\pi i(z + \bar{z}))$, $(z \in \mathbb{C})$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega]$ とおく。さらに $N \in \mathcal{O}$ に対して

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathcal{O}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

とみると、 $\Gamma(N)$ は体積有限な基本領域をもつ不連続群になる。

いま $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(3)$ に対して

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{c}{a}\right)_3 & (c \neq 0), \\ 1 & (c = 0) \end{cases}$$

と定義する。ここで $\left(\frac{c}{a}\right)_3$ は $\mathbb{Q}(\omega)$ の 3 乗剰余記号である。そのとき χ は $\Gamma(3)$ の指標になることが知られている。

そこで上の χ を使って $\operatorname{Re} s > 2$ に対して Eisenstein 級数 $E(w, s)$ を

$$E(w, s) = \sum_{\sigma \in \Gamma(3)_\infty \backslash \Gamma(3)} \chi(\sigma) \nu(\sigma(w))^s$$

と定義する。ここで $\Gamma(3)_\infty = \{\sigma \in \Gamma(3) \mid \sigma\infty = \infty\}$,

$\nu(w) = \nu$ である。 $E(w, s)$ は全平面に有理型関数として解析接続され、ある関数等式を満足することが知られている。さらに $E(w, s)$ は $s = \frac{4}{3}$ で 1 位の極を持つ。 $E(w, s)$ の $s = \frac{4}{3}$ での留数を cubic theta function と呼ぶ。この cubic theta function の フーリエ係数を具体的に求めることは興味のある問題で、これは S.J. Patterson によって本質的に cubic Gauss sums であることが証明された [3]。ここで $\mu \in \frac{1}{\lambda^3} \mathbb{Q}$, $c \equiv 1(3)$

に対して, cubic Gauss sum $g(\mu, c)$ は

$$g(\mu, c) = \sum_{\delta \bmod c} \left(\frac{\delta}{c}\right)_3 e\left(\frac{\mu\delta}{c}\right)$$

で定義されている。係数が cubic Gauss sums である保型関数が構成されることにより cubic Gauss sum の性質がよくわかるようになった。さらに次の様な一般化的問題が出てくる。

n ベキ剰余記号の指標から作られる一般化されたテータ関数のフーリエ展開の係数を具体的に求めること。

一般の n 次の Gauss sums を係数にもつ保型関数が作れないか。

§ 1. Patterson の方法

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma(3)$ から生成される群を Γ_0 とする。 $\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \chi\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ と定義すると χ は Γ_0 の指標に拡張される。

Γ_0 の $SL(2, \mathbb{Q})$ に対する指数は 27 であるが、 $\Gamma_0 \backslash SL(2, \mathbb{Q})$ の coset の代表系を σ_j とする。 F を Γ_0 のもとで指標 χ をもつ保型関数とする。 $F_j(m) = F(\sigma_j(m))$ とおくと、 $g \in SL(2, \mathbb{Q})$ ならば

$\sigma_j g = g_j(g) \sigma_{k_j(g)}, g_j(g) \in \Gamma_0, 1 \leq k_j(g) \leq 27$ ととれる。すると

$$(*) \quad F_j(g(w)) = \chi(g_j(g)) F_{k_j(g)}(w)$$

が成り立つ。

逆に $SL(2, \mathcal{O})$ の生成元である $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ について 27 個の $F_j(w)$ で $(*)$ を満たすものが存在するならば、 $F_1(w)$ は指標 χ をもつ Γ_0 のもとでの保型関数になる。従ってまず χ_j を具体的に求めてさらに $F_j(w)$ を $(*)$ を満たす様に $\Gamma(3)$ の Eisenstein 級数のフーリエ展開の係数によって構成する。

§ 2. Weil の定理の類似による構成

cubic theta function を Weil の定理の類似を使って構成する。計算を少し楽にしたいため $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma(9)$ から成る群についておこなった。この群を Γ_1 とする。 $K_{\frac{1}{3}}(v)$ を変形ベッセル関数, $a_m \in \mathbb{C}$ ($m \in \lambda^{-3}\mathcal{O}$), $a_m = a_{-m}$ とする。
(仮定 1) r を $r \equiv 1 \pmod{9}$ なる素数とする。 α を $\text{mod } r$ の原始的な指標, $l \in \mathbb{Z}$ とする。

$$\chi(s, \alpha, l) = \sum_{m \in \lambda^{-3}\mathcal{O}} a_m \alpha(m) |m|^{s-25} \left(\frac{\overline{m}}{|m|}\right)^l$$

がある所で絶対収束する。さらに

$$\Phi(s, \alpha, l) = |r|^{2s} (2\pi)^{-2s} \Gamma(s + \frac{|l|}{2} - \frac{1}{3}) \Gamma(s + \frac{|l|}{2} - \frac{2}{3})$$

$$\times \psi(s, \alpha, \ell)$$

とあったとき, $\bar{\psi}(s, \alpha, \ell)$ が整関数として全平面に解析接続され、任意の帯領域において $|Im(s)|$ が十分大きいとき有界である。 $\bar{\psi}(s, \alpha, \ell)$ は次の関数等式を満たす。

$$\bar{\psi}(s, \alpha, \ell) = \alpha(-1)(-1)^\ell \left(\frac{F}{|F|}\right)^{2\ell} C_\alpha \bar{\psi}(2-s, \bar{\alpha} \cdot \left(\frac{F}{|F|}\right)_3, -\ell),$$

ここで $C_\alpha = G(\alpha \cdot \left(\frac{F}{|F|}\right)_3) / G(\bar{\alpha})$, $G(\alpha) = \sum_{a \bmod r} \alpha(a) e\left(\frac{a}{r}\right)$ である。

定理1. $F(w) = a_0 v^{\frac{1}{2}} + \sum_{m \in \lambda^{-3}\mathcal{O} - \{0\}} a_m v K_{\frac{1}{2}}(4\pi(m/v)) e(mz)$ に対して α^3 が自明でないとき, $\alpha(-1)(-1)^\ell = 1$ の様な α について (仮定1) が成り立つとき, $F((\sigma \cdot \bar{\alpha})(w)) = F(w)$ であるならば, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{O})$ に対して

$$F(\sigma(w)) = \chi(\sigma) F(w).$$

定理2. $m \in \lambda^{-3}\mathcal{O}$ に対して

$$\begin{aligned} \tau_0(m) &= g(\lambda^2, c) \left|\frac{d}{c}\right|_3^{\frac{n}{2}+2}, \quad (m = \pm \lambda^{3n-4} c d^3, n \geq 1), \\ &= e^{-\frac{2\pi i}{9}} g(\omega \lambda^2, c) \left|\frac{d}{c}\right|_3^{\frac{n}{2}+2}, \quad (m = \pm \omega \lambda^{3n-4} c d^3, n \geq 1), \\ &= e^{\frac{2\pi i}{9}} g(\omega^2 \lambda^2, c) \left|\frac{d}{c}\right|_3^{\frac{n}{2}+2}, \quad (m = \pm \omega^2 \lambda^{3n-4} c d^3, n \geq 1), \\ &= g(1, c) \left|\frac{d}{c}\right|_3^{\frac{n+5}{2}}, \quad (m = \pm \lambda^{3n-3} c d^3, n \geq 0), \\ &= 0, \quad (\text{その他}), \end{aligned}$$

ここで $c, d \in 1(\mathcal{O})$, c は square free である。

そのとき

$$\theta(w) = \sigma_0 v^{\frac{2}{3}} + \sum_{m \in \mathbb{N}^3} \tau_0(m) v K_{\frac{1}{3}}(4\pi |m| v) e(mz)$$

が指標 χ をもつ Γ のもとでの保型関数となる様なの
が存在する。

証明. $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ については明らかである。 $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$ については $\Gamma(3)$ の Eisenstein 級数のフーリエ展開の係数からディリクレ級数をつくる。

$\Gamma(9)$ については $\Gamma(3t)$ の Eisenstein 級数から定理 1 の仮定を満たすディリクレ級数を作る。そのとき Davenport - Hasse の公式を使う。 $p = t\bar{t}$ とし $t =$ とするとき $\tau(\alpha) = \sum_{a \bmod p} \alpha(a) \exp(\frac{2\pi i a}{p})$ とおく。Davenport - Hasse の公式は $\chi(\neq 1)$ を $\bmod p$ の位数 3 の指標とすると

$$\tau(\alpha \cdot \chi) \cdot \tau(\alpha \cdot \bar{\chi}) \tau(\alpha) = \overline{\alpha^3(3)} \tau(\alpha^3) \cdot p$$

である。また次の Gauss の乗法公式

$$\frac{\Gamma(3t-3)}{\Gamma(t-1)} = \frac{3^{3(t-1)}}{2\pi\sqrt{3}} \Gamma(t-\frac{1}{3}) \Gamma(t-\frac{2}{3})$$

も使われている。

注意. 4乗の場合には同様な事を行うと、全くの類似では 4乗の Gauss 和をもつ保型関数はつけれない。

文 献

- [1] H. Davenport and H. Hasse, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen, *J. reine angew. Math.*, 172 (1934), 151-182.
- [2] T. Kubota, Some results concerning reciprocity law and real analytic automorphic functions, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 20 (1971), 382-395.
- [3] S. J. Patterson, A cubic analogue of the theta series, *J. reine angew. Math.*, 296 (1977), 125-161.
- [4] T. Suzuki, Some results on biquadratic theta series, *J. reine angew. Math.*, 340 (1984), 70-117.
- [5] A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch Funktionalgleichungen, *Math. Ann.*, 168 (1967), 149-156.