

既約正則概均質ベクトル空間の 相対不変式の次数公式の証明

名大 理 木村 達雄

§1. 序

本論では, できるだけ *self-contained* にするため, 定義からきちんと述べる. (G, V) が既約正則な概均質ベクトル空間であれば V 上の既約斉次相対不変多項式 $f(x)$ が定数倍を除いて唯一つ存在する. この次数を決定する公式を証明する.

この研究に関して, 概均質ベクトル空間の理論を作らせた佐藤幹夫先生に大変多くの事を教えていただきましたので, ここに記して心から感謝の意を表します.

次数公式は
$$\deg f = \frac{\operatorname{tr}_V A + \operatorname{tr}_{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{x_0}}} A}{\operatorname{tr}_V A} \cdot \dim V \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}.$$

と表わせる. ここで x_0 は $\operatorname{codim} 1$ の *singular orbit* の点であり, $\mathfrak{g}_{x_0}$ はその点における *isotropy subalgebra* である. この Cor. として $\dim G = \dim V$ のときは $\deg f = \dim V$ であることがわかる. そのときは, f の具体的な形もわかる.

§2. 本論

$k = \mathbb{C}$ (複素数体) とする. (k が標数 0 の代数閉体 ならよいが, 簡単のためこう仮定する.)

$V = k$ 上の有限次元ベクトル空間,

$G \subset GL(V)$ を (連結) 線型代数群 とする.

対 (G, V) が 概均質ベクトル空間 とは ある algebraic set $S (\subseteq V)$ (pre-homogeneous vector space) があって $(V-S)$ が G の single orbit になっていることである.

更に (G, V) が 既約 (irreducible) とは, V が G -module として既約なことであるとする. 次の結果が知られている.

Th. (Cartan). $V =$ 代数閉体上の有限次元ベクトル空間,

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を 線型リ-環 とし, V が $\mathfrak{g}$ -既約 であるとする. 然るば

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1) \oplus \mathfrak{g}_{s.s.}$ or $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{s.s.}$ (但し $\mathfrak{g}_{s.s.} =$ semi-simple Lie algebra)

(証明は例えば 松島: リ-環論)

特に (G, V) 既約概均質ベクトル空間 $\rightarrow G: \text{reductive alg. group.}$ がいえる.

$x \in V-S$ における isotropy subgroup を G_x と記す. $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

(G, V) 既約概均質ベクトル空間 が 正則 (regular) であるとは

$G_x (x \in V-S)$ が reductive な代数群 になっていることである.

注) 一般には (G, V) が regular とは V 上の相対不変式 f で $V-S \xrightarrow{\text{grad log } f} V^*$

が generically surjective になるものが存在することであるが, (G, V) が 既約 なら

$G_x (x \in V-S)$ が reductive であることと同値である. (付記参照)

さて (G, V) が *ired. regular prehom.* (既約正則根均質ベクトル空間を以下
こう記す) ならば $V-S = G/G_x$ ($x \in V-S$) において, G, G_x が
ともに *reductive* であるから, 松島の定理によって, これは *affine*
algebraic set になる. $V-S$ が *affine* である必要十分条件は

S が *hypersurface* になる事であるから

$S = S^1 \cup \dots \cup S^k$, $S^i = \{x \in V \mid f_i(x) = 0\}$, $f_i: V$ 上の既約多項式
($1 \leq i \leq k$)
と書ける.

G : 連結, より $\overline{G \cdot S_i}$ は既約な *alg. set* で $S_i \subset \overline{G \cdot S_i} \subset S$, かつ S_i
は S の既約成分, となるから $\overline{G \cdot S_i} = S_i$, 即ち各 $f_i(x)$ ($1 \leq i \leq k$)
は (G, V) の相対不変式である. $k=1$ であることを示す為, $k \geq 2$
として矛盾を導く.

まず各 f_i が 斉次多項式 である事に注意しよう. (同じ character
に対応する相対不変式が, 定数倍を除いて一致することから導かれる.)

$Q(x) = \frac{f_2^{\deg f_1}}{f_1^{\deg f_2}}$ とおく. これは (G, V) の相対不変式で, しかも
定数ではない.

G は $GL(1) \cdot G_{s.s.}$ と表わせるが, character は $G_{s.s.}$ 上では *trivial* で
あるし, また明らかに $GL(1)$ の作用でも不変である.

よって $Q(x)$ は 絶対不変式 になる. 根均質ベクトル空間の絶対不
変式は定数に限るから, これは矛盾である. $\therefore k=1$.

注) (G, V) が既約でないと G の形が $GL(1) \cdot G_{s.s.}$ と表せないから, これは
一般には成立しない.

以上をまとめて

★ (G, V) ined. regular prehom. とすると, その singular set S は既約な hypersurface で $S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ とすると, f は (G, V) の既約な相対不変多項式である. 逆に (G, V) の任意の相対不変式 f' は cf^m ($c \neq 0, m \in \mathbb{Z}$) の形である.

後半は, f' が相対不変な既約多項式なる $\{x \in V \mid f(x) = 0\} = S'$ は G -不変な alg. set ゆえ $S' \subset S$. $\dim S' = \dim S$ で S 既約ゆえ $S' = S$. すなわち $f' = cf$ ($\exists c \neq 0, \text{const.}$). あとは相対不変式の素因子が (G の連結性より) また相対不変式になっていることより明らか.

以下 (G, V) ined. regular prehom. とし, $S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ とする.

$$f(gx) = \chi(g)f(x) \quad (g \in G) \text{ としよう.}$$

G の 1-環を $\mathfrak{g}$ とし, χ の微分を $\delta\chi$ と記す.

$\forall A \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\chi} & \text{GL}(V) \\ \uparrow \exp & \supset & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\delta\chi} & \text{gl}(V) \end{array}$$

$f(\exp t A \cdot x) = \exp t \delta\chi(A) \cdot f(x)$ であるから, t で微分して $t=0$ とする

と $\langle Ax, \text{grad} \rangle f(x) = \delta\chi(A) f(x)$ となる. $\frac{\text{grad} f(x)}{f(x)}$ を $\text{grad} \log f(x)$ と書くこ

とができるから, $\langle Ax, \text{grad} \log f(x) \rangle = \delta\chi(A) \quad (\forall A \in \mathfrak{g}, \forall x \in V - S)$

ところで (G, V) が prehom. であることから $\mathfrak{g} \cdot x = V \quad (\forall x \in V - S)$. 従って $\text{grad} \log f(x) \in V^*$ と考えられる. 即ち

$$V - S \xrightarrow{\text{grad} \log f} V^*$$

である. この写像は

generically surjective である。その証明は '付記' にまかす。

今 V と V^* を dual base によって同一視する。

$\langle Ax, \text{grad log } f(x) \rangle = S\lambda(A)$, $S\lambda(gAg^{-1}) = S\lambda(A)$ より $\text{grad log } f(gx) = g^* \text{grad log } f(x)$ に注意しよう。但し $\langle x, y \rangle = \langle gx, g^*y \rangle$ for $x \in V, y \in V^*$ によって g^* の作用を def する。

$\varphi_x(y) = \left\{ \frac{d}{dt} \text{grad log } f(x + ty) \right\}_{t=0}$ によって $V \xrightarrow{\varphi_x} V$ を定義すれば $\text{grad log } f$ が gen. surj. なことにより, この一次変換は non-singular である。

$$\varphi_{gx}(gy) = t g^{-1} \cdot \varphi_x(y) \quad \text{ゆえ} \quad J(x) = \det \varphi_x \quad \text{とおく}$$

$$J(gx) = (\det_V g)^{-2} J(x), \quad J(x) \neq 0 \quad \text{となる。} \quad \text{即ち} \quad J(x) \text{ は}$$

(G, V) の相対不変式である。 $\therefore J(x) = c f^m \quad (\exists m \in \mathbb{Z})$ とかける。

$$\text{すなわち} \quad (\det_V g)^{-2} = \chi(g)^m \quad \text{ここで} \quad g = tI_V \quad \text{とすれば}$$

$$-2 \dim V = m \deg f \quad \text{を得る。} \quad \text{即ち} \quad (\det_V g)^{-2} = \chi(g)^{-\frac{2 \dim V}{\deg f}}$$

ここで $g = \exp tA \quad (A \in \mathfrak{g})$ とし 両辺を微分して $t=0$ とおけば

$$-2 \text{tr}_V A = -\frac{2 \dim V}{\deg f} S\lambda(A) \quad \text{すなわち} \quad \boxed{\deg f = \frac{S\lambda(A)}{\text{tr}_V A} \dim V}$$

(for $\forall A \in \mathfrak{g}$) を得る。

これで次数公式の原型が得られた。しかし ここで $S\lambda(A)$ がまだ計算可能ではない。

$x_0 \in S$ を S の generic point とする。そのとき $(df)_{x_0} \neq 0$ である。
(codim 1 の orbit の交わりはよい。)

normal vector space V_{x_0} を $V_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} V_{\mathfrak{g} \cdot x_0}$ と def する。

$g \in G$ に對し $g \cdot \mathfrak{g}_{x_0} = (g \cdot \mathfrak{g}^{-1}) \mathfrak{g}_{x_0} = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ

$g \in G_{x_0}$ ($x_0 \in S$, $\bar{g}^{\text{gen. pt.}}$) ならば $g \cdot \mathfrak{g}_{x_0} = \mathfrak{g}_{x_0}$, 即ち G_{x_0} は V_{x_0} に作用する. 従つて G_{x_0} のリ-環 $\mathfrak{g}_{x_0}$ も作用する.

次の事を示す.

$$\star \quad \text{tr}_{V_{x_0}} A = \delta\chi(A) \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$$

$\therefore$ $(df)_{x_0} \neq 0$ ゆえ V の座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を変換して x_0 の近傍で $(x'_1, \dots, x'_n)$, $x'_i = f(x)$, $x_0 = (0, \dots, 0)$ なる局所座標系をとる事ができる. そのとき $\langle Ax, \text{grad} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i(x') \frac{\partial}{\partial x'_i}$ とかける.

$\langle Ax, \text{grad} \rangle f(x) = \delta\chi(A) f(x)$ ゆえ

$$\delta\chi(A) = \frac{(\sum a_i(x') \frac{\partial}{\partial x'_i}) x'_1}{x'_1} = \frac{a_1(x')}{x'_1} \quad \text{i.e. } a_1(x') = \delta\chi(A) \cdot x'_1$$

とこが

$$\text{tr}_{V_{x_0}} A = \left. \frac{\partial a_1(x')}{\partial x'_1} \right|_{x'=0} = \delta\chi(A) \quad \text{Q.E.D.} //$$

従つて $\deg f = \frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\text{tr}_V A} \dim V \quad (A \in \mathfrak{g}_{x_0}, \text{tr}_V A \neq 0)$

$V_{x_0} = V/\mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ $\text{tr}_{V_{x_0}} A = \text{tr}_V A - \text{tr}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A = \text{tr}_V A - \text{trad}_{\mathfrak{g}} A + \text{trad}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A$

そこで $\mathfrak{g}$ は reductive であるから

$$\text{trad}_{\mathfrak{g}} A = 0 \quad (\forall A \in \mathfrak{g}) \quad \therefore \text{tr}_{V_{x_0}} A = \text{tr}_V A + \text{trad}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A$$

(for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$)

これによつて 次数公式が得ら

れた.

まとめると

定理. (G, V) を既約正則概均質ベクトル空間とする。そのとき、 V 上に既約な相対不変斉次多項式 $f(x)$ が定数倍を除いて唯一つ存在する。その次数は

$$\deg f(x) = \frac{\operatorname{tr}_V A + \operatorname{tr}_{\mathfrak{ad}_{\mathcal{O}_{x_0}}} A}{\operatorname{tr}_V A} \cdot \dim V \quad (A \in \mathfrak{O}_{x_0}, \operatorname{tr}_V A \neq 0)$$

で与えられる。ここで x_0 は S の non-singular point (i.e. codim 1 の orbit の点), $\mathfrak{O}_{x_0}$ は G の x_0 における isotropy subgroup のリ-環である。 (次数公式)

次に特に $\dim G = \dim V$ の場合を考えよう。そのような既約正則概均質ベクトル空間の例としては

$GL(1)$, $GL(2)$, $SL(3) \times GL(2)$, $SL(5) \times GL(4)$ 等がある。 (それぞれ $\dim G = \dim V = 1, 4, 12, 40$)

注). $\underbrace{GL(n)}_m$ は $GL(n)$ が $u_1, \dots, u_n$ を base とする空間に自然に作用しているとき $u_1, \dots, u_n$ のつくる m 次斉次多項式の空間に induce される $GL(n)$ の表現。 $\underbrace{GL(n)}_m$ は $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_m} (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n)$ の作る空間に induce される表現。

その場合 $V = S \ni x$ における isotropy subgr. の $\dim = \dim G - \dim V = 0$ によって S の gen. pt. における isotropy subgroup の次元 = 1.

$\therefore \dim \mathfrak{O}_{x_0} = 1$ 特 に $\mathfrak{O}_{x_0}$ は可換なリ-環であることがわかる。従って そこにおける adjoint 表現は 0-表現である。 次数公式より

系. (G, V) を既約正則概均質ベクトル空間で $\dim G = \dim V$ とする. そのとき, 相対不変式 (既約斉次多項式) $f(x)$ の次数は $\deg f(x) = \dim V$ である.

このことある例えば

$SL(5) \times GL(4)$ の相対不変式は 40 次式であることがわかる.
(40 変数)

この場合 相対不変式は次のようにして与えられる.

$\dim G = \dim V = n$ とするとき, $A_1, \dots, A_n$ (n 次正方行列) を G の base とする. $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \text{ad}(g)(A_1, \dots, A_n) &= (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} C_{11}(g), \dots, C_{1n}(g) \\ \vdots \\ C_{n1}(g), \dots, C_{nn}(g) \end{pmatrix} \\ &\quad \parallel \\ (gA_1g^{-1}, \dots, gA_ng^{-1}) \end{aligned}$$

とする. (adjoint 表現を行列で表示したもの)

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ とするとき 相対不変多項式 $f(x)$ は

$f(x) = \det(A_1x, \dots, A_nx)$ で与えられる. 実際

$$\begin{aligned} f(gx) &= \det(A_1gx, \dots, A_ngx) = \det g \cdot \det(g^{-1}A_1gx, \dots, g^{-1}A_ngx) \\ &= \det g \cdot \det(C_{ij}(g^{-1})) \det(A_1x, \dots, A_nx) = \chi(g) f(x) \end{aligned}$$

但し $\chi(g) = \det g \cdot \det(C_{ij}(g^{-1}))$ $\deg f(x) = n$ は明らか.

注) この事は佐藤幹夫先生によってかなり前から知られていたが, この次数公式の Cor. によってこれが 既約 多項式であることがわかったのである.

次数公式をいくつかの場合に使ってみよう.

ex 1. $GL(6)$
目

表現空間は $U_i \wedge U_j \wedge U_k$ ($1 \leq i < j < k \leq 6$) を

base とする 20 次元空間で G -orbits は 次の 5 つである.

I) 0 (0 次元)

II) $U_1 \wedge U_2 \wedge U_3$ (10 次元)

III) $U_1 \wedge U_2 \wedge U_3 + U_1 \wedge U_4 \wedge U_5$ (15 次元)

IV) $U_1 \wedge U_2 \wedge U_3 + U_1 \wedge U_4 \wedge U_5 + U_2 \wedge U_4 \wedge U_6$ (19 次元)

V) $U_1 \wedge U_2 \wedge U_3 + U_4 \wedge U_5 \wedge U_6$ (20 次元) Zariski-open orbit.

} singular
orbits

IV) の点 (計算の都合上 3, 4 を入れかえた点 $U_1 \wedge U_2 \wedge U_4 + U_1 \wedge U_3 \wedge U_5 + U_2 \wedge U_3 \wedge U_6$ でやる) における isotropy subalgebra of x_0 は

$$\mathfrak{g}_{x_0} = \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{34}+a_{16} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \hline 0 & & & -(a_1+a_2) & -a_{32} & a_{31} \\ & & & -a_{23} & -(a_1+a_3) & -a_{21} \\ & & & a_{13} & -a_{12} & -(a_2+a_3) \end{array} \right\rangle$$

$$\therefore \operatorname{tr}_V A = -10(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A = 8(a_1 + a_2 + a_3)$$

$\parallel$
A

$$\therefore \deg f = \frac{\operatorname{tr}_V A + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A}{\operatorname{tr}_V A} \cdot \dim V = \frac{-10 + 8}{-10} \times 20 = 4$$

この場合には 相対不変式の具体的な形が 佐藤幹夫先生
によって与えられていて

$$V \ni x = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk} U_i \wedge U_j \wedge U_k \quad \text{に対して}$$

$$f(x) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk}^2 x_{456}^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{123} x_{124} x_{356} x_{456} + 4 \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{123} x_{445} x_{246} x_{356} //$$

例2. $\text{Spin}(14) \times \text{GL}(1)$ の $\text{codim } 1$ の orbit (i.e. 63 次元)
半スピン表現 (64 次元)

の点 x_0 における isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ は

$$\mathfrak{g}_{x_0} \cong \left\langle \begin{pmatrix} a_7 \\ -\frac{a_7}{2} \end{pmatrix} \oplus \begin{matrix} \begin{matrix} a_3 & a_{35} & a_{36} & -c_{15} & c_{27} & -c_{17} \\ -a_{24} & a_5 & -a_{21} & c_{13} & c_{47} & \\ a_{14} & -a_{12} & a_6 & c_{23} & & c_{47} & -c_{27} \\ -2c_{47} & c_{27} & -2c_{47} & a_7 & -2c_{23} & 2c_{13} & 2c_{15} \\ c_{13} & c_{15} & & c_{17} & -a_1 & -a_{21} & -a_{36} \\ c_{23} & & c_{15} & c_{27} & -a_{12} & -a_2 & a_{35} \\ & c_{23} & -c_{13} & c_{47} & -a_{14} & -a_{24} & -a_4 \\ & c_{35} & c_{36} & c_{37} & -a_{13} & -a_{23} & a_{16} & -a_{25} & -a_3 & a_{24} & -a_{14} & 2c_{47} & -c_{13} & -c_{23} \\ -c_{35} & & c_{56} & c_{57} & -a_{15} & -a_{25} & -a_{45} & -a_{35} & -a_5 & a_{12} & -c_{27} & -c_{15} & & -c_{23} \\ -c_{36} & -c_{56} & & c_{67} & -a_{16} & -a_{26} & -a_{46} & -a_{36} & a_{21} & -a_6 & 2c_{17} & & -c_{15} & c_{13} \\ -c_{37} & -c_{57} & -c_{67} & & -c_{35} & -c_{36} & -c_{56} & c_{15} & -c_{13} & -c_{23} & -a_7 & -c_{17} & -c_{27} & -c_{47} \\ a_{13} & a_{15} & a_{16} & c_{35} & & c_{37} & c_{57} & -c_{27} & -c_{47} & & 2c_{23} & a_1 & a_{12} & a_{14} \\ a_{23} & a_{25} & a_{26} & c_{36} & -c_{37} & & c_{67} & c_{17} & & -c_{47} & -2c_{13} & a_{21} & a_2 & a_{24} \\ a_{25} & a_{16} & a_{15} & a_{46} & c_{56} & -c_{57} & -c_{67} & & & c_{17} & c_{27} & -2c_{15} & a_{36} & -a_{35} & a_4 \end{matrix} \end{matrix} \right\rangle$$

$$\text{with } \begin{cases} a_7 = -(a_1 + a_2 + a_3) = (a_4 + a_5 + a_6) \\ a_1 + a_3 = a_4 + a_6, \quad a_2 + a_3 = a_4 + a_5 \end{cases}$$

$$A \in \mathfrak{g}_{x_0} \text{ に対し } \text{tr}_V A = 32a_7, \quad \text{tr}_{\text{ad}_{\mathfrak{g}_{x_0}}} A = -28a_7$$

$$\therefore \deg f(x) = \frac{\text{tr} A + \text{tr}_{\text{ad}_{\mathfrak{g}_{x_0}}} A}{\text{tr}_V A} \dim A = \frac{32 - 28}{32} \times 64 = 8$$

(詳しくは 木村: 修士論文 参照)

注) $\text{Spin}(14) \times \text{GL}(1)$ や $\text{SL}(5) \times \text{GL}(4)$ の 相対不変式の
半スピン表現 日 田 口

次数を きめる為 色々考えているうちに 次数公式を得た。

(1973.1.12 木村). そのときは 佐藤先生の定理を仮定して証明したが、この度 佐藤先生に それを教えていたいて、ここに まとめた。 //

§3 付記

(G, V) *ired. regular prehom.*, $S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ のとき
 $V - S \xrightarrow{\text{grad } f} V^*$ が *generically surjective* なこと.

V^* を V の dual とする. $\langle x, y \rangle = \langle gx, g^*y \rangle$ for $\forall x \in V, y \in V^*$
 により G を $V^* \curvearrowright$ 作用させると, G が *reductive* であることから
 (G, V^*) は *ired. regular prehom.* になり $S^* = \{y \in V^* \mid \bar{f}(y) = 0\}$ となる.
 $\bar{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(x)}$.

$\therefore$ G *reductive* かつ G の *max. compact subgroup* K があって G は
 その *alg. closure* である. 適当に *base* をとれば $K \subset U(n, \mathbb{C})$ ととれる.
 $g \in K$ に対して $\bar{f}(g^*y) = \bar{f}(tg^{-1}y) = \bar{f}(\bar{g}y) = \overline{f(gy)} = \overline{\chi(g) \cdot f(y)}$
 $= \chi^{-1}(g) \bar{f}(y)$ ($\because K$ *compact* かつ $|\chi(g)| = 1$ for $g \in K$) によりこれから
 $\forall g \in G$ について成立つ. 従って $\bar{f}$ は (G, V^*) の *相対不変式* である. /

$\bar{f}(\text{grad}_x) f(x)^{s+1}$ は V 上の *相対不変式* である.

$$\begin{aligned} \text{実際 } (\bar{f}(\text{grad}_x) f(x)^{s+1})(gx) &= \bar{f}(g^* \text{grad}_x) \cdot f(gx)^{s+1} \\ &= (\chi^{-1}(g) \cdot \bar{f}(\text{grad}_x)) (\chi(g)^{s+1} f(x)^{s+1}) = \chi(g)^s \bar{f}(\text{grad}_x) f(x)^{s+1}. \end{aligned}$$

よって 定数倍を除いて f^s と一致するから その定数は s に依存する
 から それを $h(s)$ とかけば $\bar{f}(\text{grad}_x) f(x)^{s+1} = h(s) f(x)^s$ と
 なる. この $h(s)$ を (G, V) の h -関数という.

これは 明らかに s の多項式であるが, $\deg h(s) = \deg f$
 となる. (G が *reductive* でないとい一般にはいえない.) 実際

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n \\ = d}} C_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n} x_1^{\bar{i}_1} \dots x_n^{\bar{i}_n}$, $d = \deg f$ とする. $K \subset U(n)$ を満たす条件を保ちながら, base を変換すると

$f(1, 0, \dots, 0) \neq 0$ とできるが, f は定数倍の自由度があったから

$f(1, 0, \dots, 0) = 1$ とする. i.e. $C_{d, 0, \dots, 0} = 1$.

$$f(x)^{s+1} = \sum_{\substack{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n \\ = d(s+1)}} C_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n}^{(s+1)} x_1^{\bar{i}_1} \dots x_n^{\bar{i}_n} \quad \text{とすると}$$

$$\mathbb{F}(\text{grad}_x)^{s+1} f(x)^{s+1} = l(s) l(s-1) \dots l(1) l(0)$$

$$\parallel \sum_{\substack{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n \\ = d(s+1)}} |C_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n}^{(s+1)}|^2 \bar{i}_1! \dots \bar{i}_n! \geq |C_{d(s+1), 0, \dots, 0}^{(s+1)}|^2 (d(s+1))! = (C_{d, 0, \dots, 0}^{2(s+1)}) (d(s+1))!$$

$$= (d(s+1))! \quad \text{さて } \deg l(s) = d' < d \quad \text{とすれば}$$

$$|l(s)| \leq \exists C (s+1)^{d'} \quad \text{ゆえ} \quad C^{s+1} (s+1)!^{d'} \geq (d(s+1))!$$

$$s \text{ が十分大きければ } (s+1)! > C^{s+1} \quad \text{ゆえ}$$

$$((s+1)!)^d \geq ((s+1)!)^{d'+1} \geq (d(s+1))! \quad \text{矛盾. } \therefore \deg l(s) \geq \deg f.$$

他方 定義より $\deg l(s) \leq \deg f$ は明らかゆえ $\deg l(s) = \deg f$ //

さて $d = \deg f$ といて $l(s) = l_0 s^d + l_1 s^{d-1} + \dots + l_d$ と表わしたとき
今示したことから $l_0 \neq 0$ である.

$$\mathbb{F}(\text{grad}_x) f(x)^{s+1} = l(s) f(x)^s \quad \text{の } s^d \text{ の係数を比べると}$$

$$\mathbb{F}(\text{grad } f(x)) \cdot f(x)^{s+1-d} = l_0 f(x)^s$$

$$\therefore \mathbb{F}(\text{grad } \log f(x)) \cdot f(x) = l_0 \neq 0 \quad (x \in V - S) \quad \text{となる.}$$

$x \in V-S$ かつ $f(x) \neq 0$. として $\ell_0 \neq 0$ かつ

$$\mathbb{F}(\text{grad log } f(x)) \neq 0 \quad \text{i.e.} \quad \text{grad log } f(x) \in V^* - S^*$$

一方 $\text{grad log } f(gx) = g^* \cdot \text{grad log } f(x)$ である事により

$$\text{grad log } f(V-S) = V^* - S^*$$

すなわち $\overline{\text{grad log } f(V-S)} = V^*$ となり

$V-S \xrightarrow{\text{grad log } f} V^*$ が generically surjective である事が示された. //

★ 付記で $\deg f = \deg \ell(S)$ を示したが, 次数公式はある意味では $\ell(S)$ の次数公式と考える方が本質的である. $\text{codim } 1$ の orbit かつ $\ell(S)$ の次数が定まったが, 更に詳しい $\ell(S)$ の構造は一般の singular orbits によって決定される.

★ 一般に (G, V) prehom. において G が reductive ならば

$x_0 \in V-S$ の isotropy subgroup $G_{x_0}^*$ reductive $\Rightarrow (G, V)$ regular

が証明される. (付記で示した方法と本質的に同じ)

(G, V) が uned. の場合は 逆方向もいえる. (分類の結果からわかる.)
しかしながら 既約でない場合でも いえるであろうと予想される.

文献

- [1] 佐藤幹夫 述 概均質ベクトル空間の理論 数学の歩み
新谷卓郎 記 15-1
佐藤幹夫 特集号

- [2] 木村達雄：既約な概均質ベクトル空間の研究
(修士論文)

概均質ベクトル空間のゼータ関数に関するものは省略します。

急いで書きあげた為、少々読み難くなったことをお詫び
します。