

Nelson - Szegő の定理の一般化

と、lifting 定理.

北大応電研 山本隆範 (Takanori Yamamoto)

§ 1 準備.

単位円周 $\mathbb{T} = \{z; |z|=1\}$ 上の正規化された Lebesgue 測度を m で表わす. i.e. $dm(z) = \frac{d\theta}{2\pi}$, $z = e^{i\theta}$.

$\mathbb{T}$ 上の恒等関数 χ を, $\chi(z) \stackrel{\text{def}}{=} z$ とする. 整数全体を $\mathbb{Z}$ で表わす. $\forall k \in \mathbb{Z}$ について, $\chi_k(z) = \chi(z)^k = z^k$ 等と表わす.

三角多項式の全体 $\mathcal{P}$ は, $\mathcal{P} = \text{span}\{\chi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ となり, その

部分空間 $\mathcal{P}_+$ を, $\mathcal{P}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\chi_k; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ とする.

$\mathcal{P}$ から $\mathcal{P}_+$ への射影作用素 P_+ を, $P_+ f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k) \chi_k$ ($f \in \mathcal{P}$)

とする. ここで, $\hat{f}$ は f の Fourier 変換を表わす.

$$\text{i.e. } \hat{f}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} \chi_{-k}(z) f(z) dm(z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

I を恒等作用素とし, $P_- \stackrel{\text{def}}{=} I - P_+$ とする. 自然数 n に対し

て, $\mathcal{P}_-^n \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\chi_k; k \leq -n, k \in \mathbb{Z}\}$ とする. $\mathcal{P}_-^1$ を単に

$\mathcal{P}_-$ と書く. $\mathcal{P}(n)$ を, $\mathcal{P}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-^n$ とする. $\mathcal{P}(1) = \mathcal{P}$

となる.

Nelson - Szegő - Sarason の定理と関連した次の問題を考察する。

問題 $\alpha(z), \beta(z)$ を、単位円周 $\mathbb{T}$ 上の有界な複素数値 Borel 関数とし、 $\mu(z)$ を、 $\mathbb{T}$ 上の有限正值正則 Borel 測度とする。 n を自然数とする。このとき

$$\int_{\mathbb{T}} |(\alpha P_+ + \beta P_-)f|^2 d\nu \leq \int_{\mathbb{T}} |f|^2 d\mu$$

が、全ての $f \in \mathcal{P}(n)$ について成り立つような、 $\mathbb{T}$ 上の有限正值正則 Borel 測度 $\nu(z)$ を、適当なパラメーターを使って描くこと。

§ 2 正定値測度行列と、弱正定値測度行列.

我々は、2行2列のエルミート測度行列を取り扱う。すなわち、 $\underline{\mu} = (\mu_{jk})_{j,k=1,2}$ が与えられたとき、 $\mu_{ik} = \overline{\mu_{kj}}$ を仮定する。ここで、 μ_{jk} は、複素数値正則 Borel 測度とする。 $\underline{\mu}$ が、正定値であるとは、

$$\sum_{j,k=1}^2 \int_{\mathbb{T}} f_j \overline{f_k} d\mu_{jk} \geq 0 \quad \forall (f_1, f_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

が成り立つこととし、 $\underline{\mu} \geq 0$ と書く。 $\underline{\mu}$ が、弱正定値であるとは、

$$\sum_{j,k=1}^2 \int_{\mathbb{T}} f_j \overline{f_k} d\mu_{jk} \geq 0 \quad \forall (f_1, f_2) \in \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_-$$

が成り立つこととし、 $\underline{\mu} \succ 0$ と書く。

$\underline{\mu} = (\mu_{jk})$ と、 $\underline{\nu} = (\nu_{jk})$ が、 $\mu_{jj} = \nu_{jj}$ ($j=1,2$)
 と、 $(\mu_{12} - \nu_{12})^{\wedge}(n) = 0$ ($n=-1, -2, \dots$) を満たすと
 き、 $\underline{\mu} \sim \underline{\nu}$ と書く。 Arcoena - Cotlar - Sadosky
 は、次の定理を示した。

定理 A. 次の (i) と (ii) は、同値である。

$$(i) \quad \underline{\mu} > 0 \quad (ii) \quad \exists \underline{\nu} \geq 0 \text{ s.t. } \underline{\mu} \sim \underline{\nu}$$

彼らは、定理 A を使って、上記の問題の作用素 $\alpha P_+ + \beta P_-$
 が、特に Hilbert 変換 $H = -iP_+ + iP_-$ で、 $n=1$ の場合
 を解決した。彼らは、Hardy 空間の理論を使わずに、Nelson
 - Szegő の方法とは別の興味深い方法で定理 A を示した。次
 の §3 では、Nelson - Szegő の方法に類似した方法で定理 A
 の別証明を試みる。その次の §4 では、定理 A を使って問題
 を解決する。

§3 定理 A の別証明

我々は、Hardy 空間の理論を使う。 $p=1, 2, \infty$ につい
 て、Hardy 空間 H^p を、

$$H^p \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}, m) = L^p \ ; \ \hat{f}(k) = 0 \right. \\ \left. k = -1, -2, \dots \right\}$$

と定義する。また、円板環 A を、

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in C(\mathbb{T}) = \mathbb{C} ; \hat{f}(k) = 0, k = -1, -2, \dots \}$$

と定義する。

定理において、(ii) が成り立つとする。 $\mu \geq 0$ より、特に $\mu > 0$ であり、更に、 $\mu \sim \nu$ より、 $\mu > 0$ が導かれる。ゆえに、(i) が成り立つ。従って、(i) から (ii) が導かれることを示せばよい。(i) が成り立つとする。我々は、 $\mu > 0$ が次と同値なことに注意する。

$$\begin{aligned} \mu_{11} \geq 0, \quad \mu_{22} \geq 0, \quad \mu_{21} = \overline{\mu_{12}} \\ \left| \int_{\mathbb{T}} f_1 \bar{f}_2 d\mu_{12} \right| \leq \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_1|^2 d\mu_{11} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_2|^2 d\mu_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \forall (f_1, f_2) \in \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_- \end{aligned}$$

これらの測度の Lebesgue 分解を、次のように書くことにする。

$$d\mu_{jj} = w_j dm + d\mu_{jj}^{(s)} \quad (j=1,2), \quad d\mu_{12} = g dm + d\mu_{12}^{(s)}.$$

K_1 を、 $\mathcal{P}_+$ の $L^2(\mu_{11} + |\mu_{12}|)$ 閉包とし、 K_2 を、 $\mathcal{P}_-$ の

$L^2(\mu_{22} + |\mu_{12}|)$ 閉包とする。このとき、上記の不等式は、

$\forall (f_1, f_2) \in K_1 \times K_2$ に対して成り立つ。よく知られているように、 $\mu_{11}^{(s)}, \mu_{22}^{(s)}, \mu_{12}^{(s)}$ が、そこに集中している

ような Borel 集合 $E_0 \subseteq \mathbb{T}$ で、 $m(E_0) = 0$ なものが存在する。更に、 $E \subseteq E_0$ なる全ての Borel 集合 E について、

その特性関数は、 $K_1 \cap K_2$ に属する。従って、

$$|\mu_{12}^{(s)}(E)| \leq (\mu_{11}^{(s)}(E) \mu_{22}^{(s)}(E))^{\frac{1}{2}}$$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つ。

一方、 $\mathbb{T} \sim E_0$ の特性関数は、 $K_1 \cap \chi K_2$ に属するので、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f_1 \bar{f}_2 \varphi \, dm \right| \leq \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_1|^2 w_1 \, dm \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_2|^2 w_2 \, dm \right\}^{\frac{1}{2}}$$

が、 $\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_-$ について成り立つ。

$\varphi \in L^1$ より、 $\log |\varphi - k_0| \in L^1$ を満たす $k_0 \in H^1$ が存在する。 N を自然数とする。 $j = 1, 2$ について、

$|h_j^{(N)}|^2 = w_j + \frac{1}{N} |\varphi - k_0|$ a.e. となるような outer 関数 $h_j^{(N)} \in H^2$ が存在する。従って、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f_1 \bar{f}_2 (\varphi - k_0) \, dm \right| \leq \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_1|^2 |h_1^{(N)}|^2 \, dm \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f_2|^2 |h_2^{(N)}|^2 \, dm \right\}^{\frac{1}{2}}$$

が、 $\forall f_1 \in (\mathcal{P}_+ \text{ の } L^2(|h_1^{(N)}|^2) \text{ 閉包})$ と、 $\forall f_2 \in (\mathcal{P}_- \text{ の } L^2(|h_2^{(N)}|^2) \text{ 閉包})$ について成り立つ。

inner - outer 分解定理より、 $\forall G \in \chi H^1$, $\|G\|_1 \leq 1$ に対して、 $G = G_1 G_2$ a.e., $\|G_j\|_2 \leq 1$ ($j = 1, 2$) を満たすような関数 $G_1 \in H^2$, $G_2 \in \chi H^2$ が存在する。

Beurling の定理より、 $G_1 (h_1^{(N)})^{-1} \in (\mathcal{P}_+ \text{ の } L^2(|h_1^{(N)}|^2) \text{ 閉包})$
 $\overline{G_2 (h_2^{(N)})^{-1}} \in (\mathcal{P}_- \text{ の } L^2(|h_2^{(N)}|^2) \text{ 閉包})$ ゆえ、これらを、上記の不等式に代入することにより、次を得る。

$$\left| \int_{\mathbb{T}} (h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0) G \, dm \right| \leq 1$$

一方、 $\|(h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0)\|_{\infty} \leq N < \infty$ で、 $(\chi H^1)^* \cong L^{\infty}/H^{\infty}$

より、 $\|(h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0) + H^{\infty}\| \leq 1$ となる。

H^{∞} の有界閉集合は、 $\sigma(H^{\infty}, L^1/\chi H^1)$ 位相で $*$ -弱閉ゆえ、

$$\|(h_1^{(N)} h_2^{(N)})^{-1} (\varphi - k_0) - f_N\|_{\infty} \leq 1$$

を満たす $g_N \in H^\infty$ が存在する。 $k_N \stackrel{\text{def}}{=} k_0 + h_1^{(N)} h_2^{(N)} g_N$ とおくと、 $k_N \in H^1$ で、 $|g - k_N| \leq |h_1^{(N)} h_2^{(N)}|$ a.e. となる。 $|k_N| \leq |g| + |h_1^{(N)} h_2^{(N)}| \leq |g| + |g - k_0| + W_1 + W_2$ a.e. より、 $\{k_N\}_{N=1}^\infty$ は、 L^1 -ノルム有界列となる。 H^1 の、 L^1 -ノルム有界列は、 $\sigma(H^1, C/\chi A)$ 位相で $*$ -弱コンパクトゆえ、ある $k \in H^1$ にこの位相で収束する部分列 $\{k_{N_j}\}_{j=1}^\infty$ が存在する。 すなわち、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} F k_{N_j} dm = \int_{\mathbb{T}} F k dm$$

が、 $\forall F \in C$ について成り立つ。 $|g - k_N| \leq |h_1^{(N)} h_2^{(N)}|$ a.e. より、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} F (g - k_{N_j}) dm \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |F| |h_1^{(N_j)} h_2^{(N_j)}| dm$$

が、 $\forall F \in C$ について成り立つ。 $\{h_1^{(N)} h_2^{(N)}\}_{N=1}^\infty$ は、 L^1 -ノルム有界列で、 $|h_1^{(N)} h_2^{(N)}| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (W_1 W_2)^{\frac{1}{2}}$ a.e. ゆえ、Lebesgue の有界収束定理より、 $j \rightarrow \infty$ のとき、

$$\left| \int_{\mathbb{T}} F (g - k) dm \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |F| (W_1 W_2)^{\frac{1}{2}} dm$$

が、 $\forall F \in C$ について成り立つ。 これは、

$$|g - k| \leq (W_1 W_2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.e.}$$

を意味している。 このことと、前に示したように、

$$|\mu_{12}^{(s)}(E)| \leq (\mu_{11}^{(s)}(E) \mu_{22}^{(s)}(E))^{\frac{1}{2}}$$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つことも、合わせると、

$$|\mu_{12}(E) - k(E)| \leq (\mu_{11}(E) \mu_{22}(E))^{\frac{1}{2}}$$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つことが、導かれる。但し、 $k(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E k \, dm$ とする。ここで、

$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu - \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、これは、(ii) を満たしている。これで、証明が完成した。

以上の証明は、次の定理にも適用できる。

定理 A' 次の (i) と (ii)' は同値である。

$$(i) \quad \mu \succ 0 \quad (ii)' \quad \exists k \in H^1 \text{ s.t. } \mu - \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

この定理 A' は、F. and M. Riesz の定理を使うならば、定理 A から直ちに導くこともできる。

§4 問題の解決

$\mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ を、§1 で述べた問題の条件を満たす測度 ν の全体から成る集合とする。従って、 $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ なることは、 $\underline{\mu} = (\mu_{jk})$, $\mu_{11} = \mu - |\alpha|^2 \nu$, $\mu_{22} = \mu - |\beta|^2 \nu$, $\mu_{12} = \overline{\mu_{21}} = \chi_{n-1}(\mu - \alpha \bar{\beta} \nu)$ とおいたとき $\underline{\mu} \succ 0$ なることと同値になる。 μ と ν の Lebesgue 分解を、 $d\mu = w \, dm + d\mu_s$, $d\nu = \sigma \, dm + d\nu_s$ とする。 n, μ, α, β は固定し、 $|w - 2k| \leq w$ a.e. を満たすパラメーター $k \in \chi_{1-n} H^1$

に対して、次の記号を導入する。

$$\Phi(k) \stackrel{\text{def}}{=} W R_k k - |k|^2, \quad \Psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\alpha - \beta}{2} \right|^2 W + R_k \bar{\alpha} \beta k.$$

以下の議論において、我々は、上のようにパラメーター k をとることができる事情を明らかにする。

補題 1. $k \in \chi_{1-n} H^1$ が $|W - 2k| \leq W$ a.e. を、
 満たすならば、次の (1) ~ (3) が成り立つ。(1) $\Phi(k) \geq 0$
 a.e. (2) $\Psi(k)W \geq \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} \Phi(k)$ a.e. (3) $\Psi(k) \geq 0$ a.e..

証明 (1) は、 $|W - 2k| \leq W$ a.e. と同値である。(2) は、
 $\Psi(k)W - |\alpha|^2 \Phi(k) = \left| \frac{\alpha - \beta}{2} W - \alpha \bar{k} \right|^2$, $\Psi(k)W - |\beta|^2 \Phi(k) = \left| \frac{\alpha - \beta}{2} W + \beta \bar{k} \right|^2$
 a.e. なる 2つの等式による。(3) は、 $k = 0$ ならば、 $\Psi(0) \geq 0$
 a.e. であり、 $k \neq 0$ ならば $|k| \leq W$ a.e. より、 $\log W \in L^1$
 となり、(1), (2) から導かれる。

補題 2. 次の (i) と (ii) は同値である。

(i) $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$

(ii) $|W - 2k| \leq W$ a.e. を満たす $k \in \chi_{1-n} H^1$ で、
 更に、次の (1) ~ (4) を満たすものが存在する。

(1) $\Psi(k) \cap \leq \Phi(k)$ a.e.

(2) $\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} \cap \leq W$ a.e.

(3) $|\alpha|^2 \nu_s \leq \mu_s$, $|\beta|^2 \nu_s \leq \mu_s$

(4) $|(\mu_s - \alpha \bar{\beta} \nu_s)(E)| \leq \left\{ (\mu_s - |\alpha|^2 \nu_s)(E) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ (\mu_s - |\beta|^2 \nu_s)(E) \right\}^{\frac{1}{2}}$

が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つ。

証明 この § の最初に示したように、 $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ を、弱正定値測度行列に書き換えることができる。それに定理 A を適用することにより、(1) ~ (4) が導かれる。特に、(1) は、

$$|W - \alpha \bar{\beta} U - 2h| \leq (W - |\alpha|^2 U)^{\frac{1}{2}} (W - |\beta|^2 U)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.e.}$$

と同値であることを注意する。従って、

$$\begin{aligned} |W - 2h| &\leq |W - \alpha \bar{\beta} U - 2h| + |\alpha \bar{\beta} U| \\ &\leq (W - |\alpha|^2 U)^{\frac{1}{2}} (W - |\beta|^2 U)^{\frac{1}{2}} + |\alpha \bar{\beta} U| \\ &\leq W \quad \text{a.e.} \end{aligned} \quad \text{を得る。}$$

補題 3. $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ ならば $\mathbb{T}$ の部分集合 $\{\zeta; \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\}$ 上で $\nu_\zeta = 0$ となる。

証明 作用素 $\alpha P_+ + \beta P_-$ は、Hilbert 変換 $H = -iP_+ + iP_-$ により $\alpha P_+ + \beta P_- = \frac{\alpha + \beta}{2} I + i \frac{\alpha - \beta}{2} H$ と書ける。従って、 $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ より、 $|\frac{\alpha - \beta}{4}|^2 \nu \in \mathcal{R}_\mu^n(-i, i)$ を得る。補題 2 より、 $(\mu_\zeta + |\frac{\alpha - \beta}{4}|^2 \nu_\zeta)(E) \leq (\mu_\zeta - |\frac{\alpha - \beta}{4}|^2 \nu_\zeta)(E)$ が、全ての Borel 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ について成り立つ。ゆえに、 $|\frac{\alpha - \beta}{4}|^2 \nu_\zeta = 0$ となり、 $\{\alpha \neq \beta\}$ 上で、 $\nu_\zeta = 0$ となる。

定義 有界な複素数値 Borel 関数 $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ について $\bigcup_{j=1}^3 I_j = \mathbb{T}$ なる I_j を次のようにする。

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z; \alpha(z) \neq \beta(z)\}, \quad I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{z; \alpha(z) = \beta(z) \neq 0\}, \\ I_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{z; \alpha(z) = \beta(z) = 0\}.$$

定理 1. n, μ, α, β が §1 のように与えられたとき、次の (i) と (ii) は同値である。

$$(i) \quad \nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$$

$$(ii) \quad |W - 2k| \leq W \text{ a.e. を満たす } k \in \mathcal{X}_{1-n}H^1 \text{ で、}$$

更に、次の (1) ~ (4) を満たすものが存在する。

$$(1) \quad U \leq \begin{cases} \frac{\Phi(k)}{\Psi(k)} & \text{a.e. on } (I_1 \cup I_2) \cap \{\Psi(k) \neq 0\} \\ \frac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}} & \text{a.e. on } (I_1 \cup I_2) \cap \{\Psi(k) = 0\} \end{cases}$$

$$(2) \quad \nu_s = 0 \text{ on } I_1, \quad (3) \quad |\alpha|^2 \nu_s (= |\beta|^2 \nu_s) \leq \mu_s \text{ on } I_2$$

$$(4) \quad I_3 \text{ 上では、}\nu\text{ に制限はない。}$$

但し、 $d\mu = W dm + d\mu_s$, $d\nu = U dm + d\nu_s$ とする。

証明 (i) が (ii) を導くことを示す。 $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ とする。

補題 2 より、 $|W - 2k| \leq W$ a.e. を満たす $k \in \mathcal{X}_{1-n}H^1$ で、

更に $\Psi(k) U \leq \Phi(k)$ a.e. を満たすものが存在する。従って

$$\text{補題 1 より、} \quad U \leq \frac{\Phi(k)}{\Psi(k)} \leq \frac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}} \text{ a.e. on } (I_1 \cup I_2) \cap \{\Psi(k) \neq 0\}$$

となる。一方、補題 2 より、 $U \leq \frac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}}$ a.e. on $I_1 \cup I_2$

ゆえ、(1) を、 k は満たす。(2) は、補題 3 による。(3) は

補題 2 による。(4) は、集合 $\mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ の定義による。次に、

(ii) が (i) を導くことを示す。 ν が (ii) の条件を満たしているならば、補題 1 より、 $\frac{\Phi(k)}{\Psi(k)} \leq \frac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}}$ a.e. on $I_1 \cup I_2$ なることから、補題 2 の $\nu \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ なるための必要十分条件を得る。

この定理 1 より、 $\mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ の元が、Lebesgue 測度 m について絶対連続になるための必要十分条件は $\{\zeta; \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}$ となる。我々は、この条件の下で、 $\mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ を描く。

定理 2. n, μ, α, β が §1 のように与えられたとき、次の (1) と (2) が、

$\{\zeta; \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}$, $\inf_{\zeta \in \mathbb{T}} \max\{|\alpha(\zeta)|, |\beta(\zeta)|\} \neq 0$ なる条件の下で、成り立つ。

$$(1) \quad \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta) = \left\{ \nu(p, k) dm \mid \begin{array}{l} p \in L^\infty, \|p\|_\infty \leq 1 \\ k \in \chi_{1-n} H^1, |W - 2k| \leq W \text{ a.e.} \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta) \cap \{\nu; \log \nu \in L^1\}$$

$$= \left\{ \nu(p, k) dm \mid \begin{array}{l} 0 \neq p \in H^\infty, \|p\|_\infty \leq 1 \\ 0 \neq k \in \chi_{1-n} H^1, |W - 2k| \leq W \text{ a.e.} \\ \int_{\{\Psi(k) \neq 0\}} \log \frac{\Phi(k)}{\Psi(k)} dm > -\infty \end{array} \right\}$$

$$\text{但し、} \nu(p, k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} |p| \frac{\Phi(k)}{\Psi(k)} & \text{a.e. on } \{\Psi(k) \neq 0\} \\ |p| \frac{W}{\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}} & \text{a.e. on } \{\Psi(k) = 0\} \end{cases}$$

この定理2の(1)は、定理1から導かれる。(2)も、証明は[11]にゆずるが、(1)から導くことができる。ここで、

Adamyán-Arov-Kreinの定理([5] p160, p179 ex.18)を、我々の目的に合うように書き換えると、次のようになる。

補題4. もし、 $|W - 2k_0| \leq W$ a.e. を満たすような、 $0 \neq k_0 \in H^1$ が存在するならば、 $W^{-1} \in L^1$ となり次が導かれる。

$\{k \in H^1; |W - 2k| \leq W \text{ a.e.}\} = \{k; k = \frac{(1-G)(1-S)}{2(1-GS)}, S \in H^\infty, \|S\|_\infty \leq 1\}$
但し、 $\frac{1+G}{1-G} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{W} + i\left(\frac{1}{W}\right)^\sim$. $\sim$ は共役調和変換を表わす。

この補題4と定理2より、特に $n=1, \alpha \equiv 1, \beta \equiv 0$ のとき、次のことが導かれる。もし、 $\mathcal{R}_\mu^1(1,0) \neq \{0\}$ ならば、

$$\mathcal{R}_\mu^1(1,0) = \left\{ |p| \frac{|1-G|^2(1-|S|^2)}{|1-GS|^2} dm \mid \begin{array}{l} p \in L^\infty, \|p\|_\infty \leq 1 \\ S \in H^\infty, \|S\|_\infty \leq 1 \end{array} \right\}$$

一方、 $\mathcal{R}_\mu^1(1,0) \cap \{ \cup dm; \log \cup \in L^1 \}$

$$= \left\{ |p| \frac{|1-G|^2(1-|S|^2)}{|1-GS|^2} dm \mid \begin{array}{l} 0 \neq p \in H^\infty, \|p\|_\infty \leq 1 \\ 1 \neq S \in H^\infty, \|S\|_\infty \leq 1 \\ \log \operatorname{Re} \frac{1+S}{1-S} \in L^1 \end{array} \right\}$$

となる。

以上で我々は §1 の問題を解決した。証明は[11]にゆずるが、得られた結果から、次の2つの系が導かれる。これらの系の本質的な所は、系1は Kooiss ([9], [10]) で、系2は Nelson-Szegő-Sarason ([6], [7]) で 独立に証明された。

系1 n, μ, α, β が §1 のように与えられたとき、
 $\{\zeta; \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}$, $\inf_{\zeta \in \mathbb{T}} \max\{|\alpha(\zeta)|, |\beta(\zeta)|\} \neq 0$
 なる条件の下で、次の (i) と (ii) は、同値である。

- (i) $\mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta) \neq \{0\}$
 (ii) $\frac{|F|^2}{W} \in L^1$ を満たす、 $\deg F \leq n-1$ な $0 \neq F \in \mathcal{P}_+$
 が、存在する。

更に、(i) または (ii) が 成り立つとき、 $\log W \in L^1$ な、
 $U \in \mathcal{R}_\mu^n(\alpha, \beta)$ が、存在する。

系2 n, μ, α, β が §1 のように与えられたとき、
 $\alpha \in H^\infty$, $\|\alpha\|_\infty \leq 1$, $\beta \in \overline{H^\infty}$, $\|\beta\|_\infty \leq 1$, $\{\zeta; \alpha(\zeta) \neq \beta(\zeta)\} = \mathbb{T}$
 なる条件の下で、次の (i) と (ii) は、同値である。

- (i) $\int_{\mathbb{T}} |(\alpha P_+ + \beta P_-)f|^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{T}} |f|^2 d\mu$
 が、全ての $f \in \mathcal{P}(n)$ について成り立つ。

- (ii) μ は、 m について絶対連続であり、更に、
 $d\mu = W dm$, $\log W \in L^1$ となり、更に、
 $\left| \exp(-i(\log W)^\sim) - g \right| \leq \left\{ 1 - \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ a.e.
 を満たすような $g \in \alpha_{1-n} H^\infty$ が存在する。但し $\sim$ は、
 共役調和変換を表わす。

我々は、系2において、 $\alpha P_+ + \beta P_-$ として、例えば、

Hilbert 変換 H をとると、 $0 \leq W \in \mathcal{P}_+$, $\deg W \leq n-1$ となることに注意する。 $n=1$ の場合が、有名な Riesz の定理になる。Nelson-Szegő-Sarason の定理を導くには、定数 $\rho < 1$ について、 ρH をとらなければならない。

§5 付記

$\mathcal{R}_\mu^1(1,0) \neq \{0\}$ のとき、 $\mathcal{R}_\mu^1(1,0)$ は どのくらい良い性質の測度 (今の場合は m について絶対連続ゆえ L^1 関数と同一視する.) を含むかという問題がある。Carleson-Jones ([3]) は $\forall \varepsilon > 0$ について $\mu \in A_{2+\varepsilon}$ (Muckenhoupt class) なる μdm で $\mathcal{R}_\mu^1(1,0)$ に含まれるものが存在することを示した。我々の結果がこの種の問題に対してどのように役立つかは 今後の課題である。

最後に、定理 A の Arcoena-Cotlar ([1]) による証明法について述べる。 $\mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\}$, $\mathbb{Z}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z}; n \leq -1\}$ とする。 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上の複素数値関数 $K(j,n)$, $(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ が、或る 3 個の数列 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、
 $K(j,n) = a_{n-j}$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, b_{n-j} , $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_-$
 $\overline{c_{j-n}}$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_-$, c_{n-j} , $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_+$ と書けるとき $K(j,n)$ を generalized Toeplitz kernel と呼ぶ。特に、全ての有限次元ベクトル (x_j) , x_j は複素数, について

$\sum_{(j,n)} x_j \bar{x}_n K(j,n) \geq 0$ のとき、 $K(j,n)$ は正定値であるという。

この $K(j,n)$ を使って上手に Hilbert 空間を作り、『全ての等距離作用素はユニタリ拡張をもつ』という Nagy-Foias の定理と、Herglotz-Bochner の定理を使って、次を得る。

定理 B. 次の (i) と (ii) は同値である。

(i) $K(j,n)$ は 正定値の generalized Toeplitz kernel である。

(ii) $K(j,n) = \hat{\gamma}_{11}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, $\hat{\gamma}_{22}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_-$

$\hat{\gamma}_{12}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_-$, $\hat{\gamma}_{21}(n-j)$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_+$

なる $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ が存在する。

この定理 B と H. and M. Riesz の定理より、定理 A が導かれる。

この報告は、主として、Yamamoto ([11]) によった。

文 献

[1] Arocena, R. and Cotlar, M.: A generalized Herglotz-Bochner theorem and L^2 -weighted inequalities. Proc. Conference in honor of Prof. A. Zygmund, Chicago (1981) 258-269.

[2] Arocena, R., Cotlar, M. and Sadosky, C.: Weighted inequalities in L^2 and lifting properties. Adv. Math. supplementary studies V, 7A, special volume dedicated to L. Schwartz. (1981) 95-128.

- [3] Carleson, L. and Jones, P. : Weighted norm inequalities and a theorem of Koosis. Institute Mittag-Leffler, report no. 2 (1981)
- [4] Cotlar, M. and Sadosky, C. : On the Nelson-Szegő theorem and a related class of modified Toeplitz kernels. Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 35 (1979) 383-407.
- [5] Garnett, J.B. : Bounded analytic functions. Academic Press (1981)
- [6] Nelson, H. and Sarason, D.E. : Past and future. Math. Scand. 21 (1967) 5-16.
- [7] Nelson, H. and Szegő, G. : A problem in prediction theory. Annali di Mat. Pura et Applicata 4, 51 (1960) 107-138.
- [8] Koosis, P. : Weighted quadratic means of Hilbert transforms. Duke Math. J. 38 (1971) 609-634.
- [9] Koosis, P. : Moyennes quadratiques pondérées de transformées de Hilbert et fonctions de type exponentiel. C.R. Acad. Sci. Paris 276 (1973) 1201-1204.
- [10] Koosis, P. : Moyennes quadratiques pondérées de fonctions périodiques et de leurs conjuguées harmoniques. C. R. Acad. Sci. Paris 291 (1980) 255-257.
- [11] Yamamoto, T. : On the generalization of the theorem of Nelson and Szegő (preprint).